





15098

27978

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XVII

Palchetto

Num.º d'ordine 26

~~7-6-44~~

NAZIONALE

B. Prov.

R. BIBLIOTECA

VITT. EM. III

242

NAPOLI



12

Robert T. 21

ÉLÉMENTS
D'ALGÈBRE.

OUVRAGES DU BARON REYNAUD.

- 1°. *Traité d'Arithmétique*, à l'usage des Ingénieurs du Cadastre. 5 fr.
- 2°. *Traité d'Arithmétique*, à l'usage des Élèves qui se destinent aux Écoles royales Polytechnique, Militaire, de Marine et des Forêts, 14^e édit. 1827,
4 fr. 50 c.
- 3°. *Éléments d'Algèbre* en deux sections (7^e édition), 1828, 7 fr. 50 c.
La première section se vend séparément, 5 fr.
- 4°. *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, suivie des Tables de Logarithmes de M. Lalande (2^e édition), 3 fr.
- 5°. *Traité d'Application de l'Algèbre à la Géométrie*, 6 fr.
- 6°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, in-4°, 12 fr.
- 7°. *Problèmes et Développement sur les diverses parties des Mathématiques*, 6 fr.
- 8°. *Traité élémentaire de Mathématiques, de Physique et de Chimie*, suivi de quelques notions d'Astronomie, à l'usage de MM. les Pages du Roi, et des Élèves qui se préparent aux examens pour le Baccalauréat ès-lettres, 6 fr.
- 9°. *Fragmens sur l'Algèbre et la Trigonométrie*. (Épuisé.)
- 10°. *Traité de Trigonométrie* de Lagrange, avec les Notes de Reynaud, 7 fr.

Notes sur Bezout.

- Arithmétique de Bezout*, avec les notes (13^e édition stéréotype) 1828,
3 fr. 50 c.
- Géométrie de Bezout* avec des Notes contenant un grand nombre de Problèmes, et les Éléments de la Géométrie descriptive (3^e édition) 1825, 6 fr.
- Algèbre et Application de l'Algèbre à la Géométrie*, avec les Notes (6^e édit.) 1822, 6 fr.

La première section de l'Algèbre, ainsi que les Notes sur l'Arithmétique, sur la Géométrie et sur l'Algèbre, se vendent séparément.

Nota. L'*Arithmétique* (14^e édition), l'*Algèbre* (7^e édition), l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie* (comprenant la *Trigonométrie*), et les Notes sur la *Géométrie*, sont particulièrement destinées aux Élèves qui se proposent d'entrer à l'École royale Polytechnique, et à l'École spéciale militaire. Ces ouvrages renferment les solutions des principales difficultés relatives aux examens.

609281

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE

A L'USAGE DES ÉLÈVES

QUI SE DESTINENT A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, A LA MARINE,
A L'ÉCOLE MILITAIRE DE ST-CYR ET A L'ÉCOLE FORESTIÈRE;

PAR LE BARON REYNAUD,

Examineur pour l'admission dans ces Écoles, Inspecteur des Études de
MM. les Pages du Roi, et des Élèves de l'Association paternelle des
Chevaliers de Saint-Louis; Docteur de la Faculté des Sciences, Membre
de plusieurs Académies; Chevalier des Ordres royaux de Saint-Michel,
de la Légion-d'Honneur, etc.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.

SEPTIÈME ÉDITION.



PARIS,

BACHELIER (SUCCESSEUR DE M^{re} V^e COURCIER),

LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES, QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

ET A BRUXELLES,

A LA LIBRAIRIE PARISIENNE, RUE DE LA MADELEINE, N° 438.

1828

Tout Exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur et celle du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricateurs et les débitans de ces Exemplaires.

Bachelier

Neumann

AVERTISSEMENT.

Dans cette nouvelle Édition, l'ALGÈBRE est divisée en deux sections qui forment neuf chapitres, et qui correspondent à l'ordre adopté dans les Collèges royaux pour l'étude des Mathématiques.

LA PREMIÈRE SECTION, composée de cinq chapitres, renferme la partie de l'Algèbre qu'on enseigne dans la *classe de Mathématiques élémentaires*; elle contient les connaissances algébriques exigées pour l'admission directe dans la Marine en qualité d'élève de seconde classe, et pour la sortie de l'École de Marine d'Angoulême, de l'École spéciale militaire de Saint-Cyr, et de l'École Forestière.

Nous allons indiquer les principaux articles qui distinguent cette édition des précédentes.

On admet ordinairement en Algèbre, que les propriétés qui conviennent aux quantités commensurables, s'appliquent aux incommensurables; j'ai pensé que ce principe n'étant pas admis en Géométrie, il était nécessaire d'en donner une démonstration générale.

La manière dont on démontre ordinairement la règle des signes pour la multiplication des monomes me paraît peu rigoureuse; je crois que les raisonnemens que j'emploie satisfont mieux l'esprit, parce qu'ils ne sont qu'une extension de la définition que j'ai donnée de la multiplication arithmétique.

La définition que j'ai adoptée pour les exposans me fournit le moyen d'interpréter le sens qu'on doit attacher à l'exposant zéro, et aux exposans négatifs.

J'ai fait voir, à l'aide d'un artifice de calcul, dans quel cas $x^m \pm a^m$ est divisible par $x \pm a$.

Pour faire apprécier les avantages de l'Algèbre, j'ai résolu par son moyen, une partie des problèmes qui se trouvent dans mon Arithmétique.

J'ai consacré un paragraphe à la *Théorie des inégalités*, que j'ai traitée d'une manière nouvelle.

J'ai cru convenable de faire connaître avec détail, les pro-

priétés des trinomes du second degré qui servent dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

La résolution de quelques problèmes du second degré m'a conduit à reconnaître, par un caractère général, si des formules peuvent convenir à d'autres équations que celles dont elles ont été déduites.

J'ai fait voir que les nombres qu'on a désignés en Arithmétique sous le nom de *logarithmes*, et qui résultent de la comparaison de deux progressions, peuvent être considérés comme les exposans des puissances auxquelles il suffit d'élever une quantité constante pour obtenir les nombres dont on cherche les logarithmes. On trouvera dans les notes le moyen de calculer les limites des erreurs que l'on peut commettre en faisant usage d'une table de logarithmes.

La DEUXIÈME SECTION, composée de quatre chapitres, renferme la partie de l'Algèbre qu'on voit dans la classe de *Mathématiques spéciales*.

J'ai complété la théorie du plus grand commun diviseur au moyen de deux théorèmes que j'ai extraits d'un mémoire qui vient d'être publié par mon collègue M. *Lefébure de Fourcy*.

Dans le septième chapitre, qui traite de la théorie générale des équations, je n'ai pas cru devoir considérer les valeurs infinies des inconnues, parce qu'elles ne servent que dans l'Analyse appliquée. J'ai supposé que toute équation a une racine; ce théorème important, qui sert de base à la résolution des équations numériques, a été démontré par M. *Cauchy*; mais cette démonstration ne saurait trouver place dans un ouvrage élémentaire.

Les sept premiers chapitres composent la partie de l'Algèbre qui est exigée pour l'admission à l'École Polytechnique.

Le huitième chapitre renferme diverses questions qui sont propres à exercer l'esprit des élèves et à les disposer aux examens. Parmi ces questions, il en est qui m'ont conduit à une méthode à l'aide de laquelle on peut souvent éviter les valeurs des inconnues qui ne conviennent pas au problème proposé.

Le neuvième et dernier chapitre contient diverses théories qui sont de nature à préparer aux cours de l'École Polytechnique.

J'ai donné dans le n° 335, deux démonstrations de la formule du *binôme de NEWTON* pour un exposant quelconque.

La première de ces démonstrations, qui est celle d'EULER un peu simplifiée, suppose que l'on connaisse le développement dans le cas de l'exposant entier positif.

La deuxième démonstration, que j'ai publiée pour la première fois en 1800, ne suppose pas, comme on le fait ordinairement, que l'on connaisse d'avance la forme du développement; et elle convient immédiatement au cas où l'exposant est positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

J'ai conservé dans cette édition, la *Théorie des équations réciproques* telle que je l'avais exposée pour la première fois dans l'édition de mon *Algèbre* publiée en 1800. On appelait équations réciproques, celles dont les coefficients des termes également distans des extrêmes étaient égaux et de mêmes signes. La nouvelle définition que j'ai proposée, et qui est aujourd'hui généralement adoptée, m'a fourni le moyen de résoudre non-seulement les équations de cette forme, mais encore celles dont les coefficients des termes, également distans des extrêmes sont égaux et de signes contraires.

La *Théorie des fonctions symétriques* n'étant pas exigée pour l'admission à l'École Polytechnique, n'a pu trouver sa place dans les sept premiers chapitres de ce *Traité*. J'ai donc été forcé de donner l'*élimination* par le procédé du plus grand commun diviseur, afin d'en déduire le moyen de calculer l'équation aux différences qui est indispensable dans la recherche des racines incommensurables d'une équation numérique à une seule inconnue. Ce mode d'élimination, le plus simple dans la pratique, a l'inconvénient de conduire à une équation finale qui fournit quelquefois des *valeurs étrangères* de l'inconnue.

Les élèves qui étudieront la théorie des fonctions symétriques, feront bien de s'en occuper avant de passer à la résolution des équations numériques; ils en tireront l'avantage, indépendamment de l'importance que cette théorie présente par elle-même, de parvenir directement à l'équation aux carrés des différences, et de pouvoir ainsi calculer les racines incommensurables d'une équation à une seule inconnue, sans avoir recours à aucune mé-

thode d'élimination. Ils auront en outre la facilité de traiter la théorie de l'élimination au moyen des fonctions symétriques, et d'éviter ainsi les discussions embarrassantes qu'offre cette théorie lorsqu'on la donne par le plus grand commun diviseur.

On doit cependant observer que lorsqu'on a recours à l'élimination pour résoudre deux équations à deux inconnues, la méthode du plus grand commun diviseur est la plus commode, parce qu'elle fait dépendre la résolution des équations proposées, de la recherche des solutions de deux nouvelles équations dont l'une, qui ne renferme qu'une inconnue, fournit les valeurs de cette inconnue, et dont l'autre qui est généralement du premier degré par rapport à la seconde inconnue, détermine les valeurs correspondantes de cette inconnue. Il n'en est pas de même quand on obtient l'équation finale par les fonctions symétriques; cette équation ne renferme à la vérité que les bonnes valeurs d'une des inconnues, mais comme il faut substituer chaque fois la *valeur exacte* de cette inconnue dans les deux équations proposées, pour déterminer les valeurs correspondantes de l'autre inconnue, *on ne saurait obtenir de cette manière que les solutions qui correspondent aux racines de l'équation finale dont on connaît les valeurs exactes.*

J'ose espérer que la comparaison de cette nouvelle édition avec les précédentes, fera voir que j'ai cherché à profiter des avis que j'ai reçus des personnes qui veulent bien enseigner mes ouvrages; je dois particulièrement des remerciemens à M. MAYER, ancien élève de l'École Polytechnique.

On pourra passer à la première lecture les articles dont les numéros sont précédés d'une étoile *, mais il sera utile d'y revenir ensuite.

Les numéros placés entre parenthèses indiquent des renvois aux articles correspondans de l'*Algèbre* et de mon *Arithmétique* (14^e édition). Ainsi, dans la page 177, le signe (n^o 19) renvoie au principe de l'article 19 (page 24); et dans la page 50, le signe (*Arith.* n^o 51) renvoie à l'article 51 de mon *Arithmétique* (page 47).

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE SECTION.

CHAPITRE PREMIER.

§ 1^{er}.

Nombres.	Page.
1...3. Préliminaires.....	1...9

§ II. Des quatre opérations algébriques.

4. But des quatre règles.....	10
5. Réduction des polynômes.....	10 et 12
6. Addition des polynômes.....	12 et 13
7. Soustraction des polynômes.....	13 et 14
8. Des quantités négatives.....	14 et 15
9. Addition et soustraction des monômes.....	15
10. Des valeurs absolues et relatives.....	15 et 16
11...20. Multiplication.....	16...25
21...29. Division.....	25...35

§ III. Des fractions littérales.

30. Origine et propriétés des fractions.....	35...37
31 et 32. Addition, soustraction, multiplication et division des fractions.....	37...42
33 et 34. De l'exposant zéro, et des exposans négatifs.....	42 et 43
35. Des expressions infinies et indéterminées.....	44...46

CHAPITRE II.

§ 1^{er}.

36. Définitions relatives aux équations et aux identités.....	47 et 48
---	----------

§ II.

37 et 38. Des équations et des problèmes du premier degré à une seule inconnue.....	48...63
---	---------

§ III.

39...45. Des équations et des problèmes du premier degré à plusieurs inconnues.....	63...90
---	---------

§ IV.

46. Des circonstances particulières que présente la résolution des problèmes du premier degré.....	90...98
---	---------

§ V.

47...51. Résolution des équations littérales du premier degré...	98...110
--	----------

§ VI.

52...57. Des circonstances particulières que présente la résolution des équations du premier degré.....	111...122
--	-----------

§ VII.

58 et 59. Composer un système d'équations qui admette des solu- tions données.....	122...128
---	-----------

§ VIII. Des inégalités.

60...62. Propriétés générales des inégalités.....	128...132
63. Problèmes relatifs aux inégalités.....	132...134
64...68. Des inégalités entre plusieurs variables. Problèmes.....	134...143

§ IX. Analyse indéterminée du premier degré.

69 et 70. Calcul des solutions entières d'une équation numérique à deux inconnues.....	143...148
71. Problèmes indéterminés à deux variables.....	148...152
72...74. Discussion générale de l'équation $ax + by = c$..	152...157
75. Calculer les solutions entières de m équations entre $m+n$ variables.....	157...163
76. Problèmes indéterminés.....	163...169

CHAPITRE III.

§ I^{er}.

77...86. Des quarrés et de la racine quarrée.....	170...183
---	-----------

§ II.

87...102. Des équations et des problèmes du second degré.....	183...213
103. Règle générale pour reconnaître si des formules peuvent convenir à d'autres équations que celles dont elles sont dédites.....	213

TABLE DES MATIÈRES.

xj

Numéros.

Pages.

§ III. *Propriétés du trinôme $ax^2 + bx + c$.*

104. Décomposer un trinôme du second degré en deux facteurs du premier degré.....	213 et 214
105. Exprimer que $ax^2 + bx + c$ est un carré.....	214
106. Rendre le premier terme plus grand que la somme des deux autres.....	214..216
107..109. Trouver les limites des valeurs réelles de x qui rendent un trinôme positif.....	216..218

CHAPITRE IV.

§ I^{er}. *Puissances et racines des monomes.*

110. Définition des puissances. Notation adoptée.....	219
111. Puissances des monomes.....	219 et 220
112. Racines arithmétiques des monomes.....	220 et 221
113. Réduire un radical à sa plus simple expression.....	221..223
114. Calcul des radicaux, eu n'ayant égard qu'à leurs valeurs arithmétiques.....	223..228
115. Des valeurs réelles et imaginaires des radicaux.....	228 et 229
116 et 117. Des exposans fractionnaires et incommensurables.....	229..231
118. Ordonner les polynomes qui renferment des radicaux.	231
119..121. Propriétés des puissances et des racines arithmétiques des quantités positives.....	231..235

§ II.

122..131. Puissances des binomes. Forme du produit de plusieurs binomes. Des combinaisons, des permutations, etc..	235..247
132. Puissances des polynomes.....	247

§ III.

133..135. Puissances et racines des nombres.....	247..252
--	----------

§ IV.

136..140. Extraction des racines des quantités littérales.....	253..260.
--	-----------

CHAPITRE V.

§ I^{er}.

141..145. Des proportions.....	261..267
--------------------------------	----------

§ II.

146..148. Progressions arithmétiques ou par différence.....	267..271
149..151. Progressions géométriques ou par quotient.....	271..278

§ III. *Des fractions continues.*

152. Définitions des fractions continues, des réduites, etc.	278 et 279
153. 160. Propriétés générales des réduites.	279..286
161. Exprimer une quantité quelconque en fraction continue.	286..288
162 et 163. Résolution de l'équation $ax = c$.	289..292
164. Les fractions continues fournissent les solutions entières de toute équation du premier degré à deux inconnues.	292..294

§ IV. *Théorie algébrique des logarithmes.*

165. Analogie entre les logarithmes et les exposans.	294 et 295
166. 168. Les logarithmes peuvent être considérés comme des exposans.	295..297
169. 176. Propriétés des logarithmes considérés comme des exposans.	297..302
177. Usage des logarithmes pour résoudre les équations à une seule inconnue dans lesquelles l'inconnue entre comme exposant.	302..304

DEUXIÈME SECTION.

CHAPITRE VI.

§ 1^{er}. *Théorèmes et problèmes sur les diviseurs des nombres et sur les fractions irréductibles.*

178. 181. Propriétés des diviseurs des nombres.	305..309
182. Déterminer tous les diviseurs d'un nombre.	309..311
*183. Propriété remarquable de ces diviseurs.	311 et 312
*184. Décomposer un nombre en deux facteurs entiers positifs.	312
*185. Composer un nombre qui admette k diviseurs.	312 et 313
*186. Trouver des nombres parfaits.	313 et 314
*187. Solutions entières de $xy = N$ et de $xy + ax + by = c$.	314..316
188. 193. Propriétés des fractions irréductibles.	316..318

§ II. *Des différens systèmes de numération. Propriétés des nombres dans ces divers systèmes. Des quotiens périodiques.*

194. De la numération.	319 et 320
195. Passer d'un système de numération à un autre.	320
196. Problèmes sur des nombres écrits dans différens systèmes.	321..323
197. Opérations de l'arithmétique sur des nombres écrits dans un système quelconque.	323

TABLE DES MATIÈRES.

xij

<u>Sujets.</u>	<u>Pages.</u>
198. Déterminer le reste de la division d'un nombre par un autre, sans effectuer la division.....	323..326
199. Conventions relatives aux valeurs des chiffres placés à droite de la virgule.....	326
200. Effets produits par le déplacement de la virgule.....	326
201. Convertir en fraction ordinaire un nombre qui renferme plusieurs chiffres à droite de la virgule.....	326 et 327
202. Mettre sous la forme d'un nombre entier, une fraction dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéros.	327
203. Règle pour mettre une fraction quelconque sous la forme d'un nombre entier, en effectuant la division du numérateur par le dénominateur.....	327 et 328
204. Conversion des quotiens périodiques en fractions ordinaires.....	328..331
205 et 206. Reconnaître d'avance si la division du numérateur d'une fraction par son dénominateur conduira à un quotient exact ou périodique. Déterminer le nombre des chiffres du quotient où de la partie non périodique.....	332..338
*207. Problèmes.....	338 et 339

§ III. Théorie du plus grand commun diviseur.

208..210. Définitions.....	340
211. Plus grand commun diviseur des monomes.....	340 et 341
212. Recherche du plus grand commun diviseur des polynomes quand toutes les divisions s'effectuent exactement.....	341..344
213..217. Recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs polynomes.....	344..354
*218. On parvient toujours au même plus grand commun diviseur quelle que soit la lettre par rapport à laquelle on ordonne les polynomes.....	354..357

CHAPITRE VII.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

§ 1^{re}. Définitions et notations. Propriétés relatives aux facteurs des polynomes entiers, et aux racines des équations à une seule inconnue.

§ 1^{er}.

219. But de la théorie générale des équations. Notations..	358 et 359
220..231. Propriétés des diviseurs et des racines.....	359..373

§ II.

232..239.	Des limites des racines d'une équation.....	373..382
240.	Rendre le premier terme d'un polynôme plus grand que la somme de tous les autres.....	382et383

§ III.

241..243.	Règle des signes de Descartes.....	383..387
-----------	------------------------------------	----------

§ IV.

244..251.	Des fonctions dérivées.....	387..395
-----------	-----------------------------	----------

§ V. Résolution d'une équation numérique à une seule
* inconnue.

252..258.	Des racines commensurables.....	395..406
259..272.	Des racines incommensurables inégales.....	407..423
273.	Des équations homogènes.....	423et424
274.	Trouver les solutions communes à plusieurs équations à une seule inconnue.....	424et425
275..277.	Théorie des racines égales.....	425..430
278et279.	Résumé général.....	430..433

§ VI.

280..291.	Théorie de l'élimination. Résolution de deux équations à deux inconnues.....	433..456
292et293.	Résoudre m équations entre n inconnues.....	456..458

§ VII.

294..296.	Équation aux différences. Calcul d'une quantité moindre que la plus petite des différences entre les racines prises deux à deux d'une équation donnée.....	458..463
-----------	--	----------

§ VIII.

297.	Des équations binômes.....	463..465
298..300.	Des valeurs algébriques des radicaux.....	465..468
301.	Des équations trinômes réductibles au second degré....	468et469
302.	Des équations irrationnelles.....	469et470

§ IX.

303..308.	Des équations réciproques.....	470..480
-----------	--------------------------------	----------

TABLE DES MATIÈRES.

xv

Numéros.

Pages.

CHAPITRE VIII.

PROBLÈMES.

§ I^{er}.

309. Questions relatives aux intérêts composés.....	481..485
---	----------

§ II.

310. Problèmes qui dépendent de la théorie des progressions. Recherche du nombre des boulets contenus dans une pile.....	485..493
--	----------

§ III. Questions relatives à la théorie générale des équations.

311. Recherche des diviseurs d'un polynôme.....	493..495
312. Trouver les racines d'une équation qui satisfont à des conditions données.....	495..499
313. Déterminer les relations qui doivent exister entre les coefficients d'une équation à une seule inconnue, pour que des racines de cette équation satisfassent à des conditions données.....	499..506
Exprimer que deux équations à une seule inconnue ad- mettent des solutions communes.....	506..508
Exprimer qu'un polynôme du second degré en x et y est décomposable en deux facteurs rationnels du premier degré.....	508 et 509
314. Problèmes sur la transformation des équations.....	509..513
315. Déterminer l'équation dont les racines sont les sommes ou les produits deux à deux, ou les quotients, des ra- cines d'une équation donnée.....	513..519
316. Déterminer les coefficients arbitraires contenus dans des équations de manière qu'elles admettent des solutions données.....	519..524
317. Quand la valeur $x=a$ réduit $f(x)$ à zéro, on est certain que $f(x)$ est exactement divisible par $(x-a)^m$, l'expo- sant m étant un nombre positif entier ou fractionnaire.	524 et 525
318. Théorie des fractions qui se réduisent à $\frac{0}{0}$	525..528

CHAPITRE IX.

§ I^{er}. Théorie des fonctions symétriques.

319. Définitions et notations.....	529
320. Sommes des puissances entières des racines d'une équation, en fonction des coefficients de cette équation....	536..533

321 et 322.	Exprimer les fonctions symétriques des racines d'une équation, au moyen des coefficients de cette équation.	533..539
-------------	---	----------

§ II. Applications de la théorie des fonctions symétriques.

323.	Recherche de l'équation aux carrés des différences	539..545
324 et 325.	Former l'équation qui a pour racine une fonction déterminée des racines inconnues d'une équation donnée.	545..548

§ III.

326.	Toute équation dont les coefficients sont réels a une racine de la forme $a + c\sqrt{-1}$	548..554
327.	Quand $a + c\sqrt{-1}$ est racine d'une équation, $a - c\sqrt{-1}$ est racine de la même équation.....	554
328..330.	Toute équation est décomposable en facteurs réels du premier et du second degré.....	554..556
331.	Recherche des racines imaginaires.....	556
332.	Propriété remarquable de l'équation aux carrés des différences.....	556

§ IV.

333.	De l'élimination par les fonctions symétriques.....	557..562
334.	Du degré de l'équation finale.....	563..567

§ V.

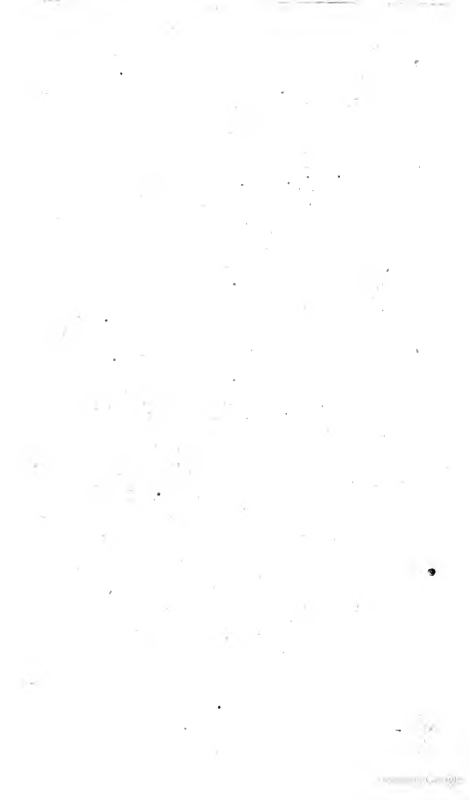
335.	Démonstrations de la formule du binôme pour un exposant quelconque.....	568..576
------	---	----------

NOTES.

336.	Méthode abrégée pour extraire la racine carrée d'un nombre.....	577..592
337.	Résolution des équations exponentielles composées de plusieurs termes.....	580
338.	Exprimer qu'une équation a deux racines égales et de signes contraires.....	580..582
339.	Note relative à l'élimination.....	582
340..345.	Évaluation des limites des erreurs que l'on peut commettre, lorsqu'on fait usage d'une table de logarithmes.	584..592

ERRATA.

- Page 30, ligne 14, ces produits, lisez ce produit
 36, dernière ligne, 126000, lisez 12600
 48, ligne 15, somme, lisez sommes
 52, ligne 4, nombre, lisez membre
 82, avant-dernière ligne, $+a'$, lisez $a+a'$
 94, ligne 8, en remontant, au lieu de $2n$, lisez 2^n
 112, ligne 4, au lieu de $\frac{3}{2}$, lisez $\frac{2}{3}$
 114, ligne 3 du n° 55, déterminées, lisez indéterminées
 116, mettez une virgule à la fin de la ligne 11
 141, ligne 11, au lieu de $x < 1$, lisez $x < 11$
 184, ligne 8, ôtez la virgule qui précède etc.
 207, ligne 19, au lieu de $bcpqr$, etc., lisez $bcpqr$ etc.
 266, ligne 5 du n° 144, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{d}$, lisez $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{d}$
 269, ligne 1, au lieu de d, n, a, s , lisez d, n, u, s
 344, lignes 3 et 5, au lieu de $+8$ et de 8 , lisez -16
 346, ligne 20, au lieu de x^2 , lisez x^3
 349, lignes 20 et 21, le produit, lisez le premier terme du produit
 366, dernière ligne, $+1, -2$ et $+2$, lisez $+1, -1$ et $+2$
 388, ligne 16, lisez $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-h)$
 404, ligne 7, au lieu de $+4$, lisez 4
 416, ligne 20, $= \frac{x^3 - 112(x-4)}{3x^2 - 112}$, lisez $= -\frac{x^3 - 112(x-4)}{3x^2 - 112}$
 512, ligne 5 en remontant, $\frac{1}{2}f''(-h)$, lisez $\frac{1}{2}f^3f''(-h)$
 519, ligne 13, lisez
 $\varphi(y) = 4y^6 + 8y^2 - 13y^4 - 34y^3 - 13y^2 + 8y + 4 = 0$
 535, ligne 7, $(s^2 - s_{2\alpha})$, lisez $(s^2\alpha - s_{2\alpha})$
 543, dernière ligne, l'on, lisez si l'on
 586, ligne 14, $(n+pk)-n$, lisez $(n+pk)-n$



ALGÈBRE.

PREMIÈRE SECTION.

CHAPITRE PREMIER.



Préliminaires. Addition, Soustraction, Multiplication, Division, Fractions.

§ 1^{er}. *Introduction. Signes algébriques. Des Monomes et des Polynomes.*

1. Dans les questions que nous avons résolues en Arithmétique, les relations indiquées par l'énoncé du problème, entre les quantités connues et inconnues, étaient assez simples pour qu'on pût, à l'aide de quelques raisonnemens, en déduire les valeurs des inconnues, en opérant constamment sur des nombres connus. Mais, quand ces relations sont plus compliquées, les raisonnemens pour trouver les inconnues deviennent si difficiles et sont tellement multipliés, que les procédés arithmétiques ne peuvent plus suffire. On a alors recouru à des méthodes nouvelles qui ont donné naissance à l'ALGÈBRE.

On représente les inconnues par des caractères particuliers, qui sont ordinairement les dernières lettres de l'alphabet, et l'on indique les opérations par des signes ; cela fournit le moyen d'écrire d'une manière abrégée les relations primitives établies par l'énoncé de la question entre les quantités connues et inconnues. On en déduit ensuite les valeurs des inconnues, à l'aide de règles fixes.

Nous allons traiter une question très simple qui jettera du jour sur ces considérations générales, et nous ferons usage des *signes*

$$+ \quad - \quad \times \quad =$$

déjà employés en Arithmétique, qui signifient respectivement
plus, moins, multiplié par, égale.

PROBLÈME. *La somme de deux nombres est 18, leur différence est 4. Trouver ces deux nombres.*

On désigne le plus petit des deux nombres inconnus par x ; d'après l'énoncé, le plus grand sera $x + 4$. Or, la somme de ces deux nombres, indiquée par $x + (x + 4)$, doit être 18. Les relations qui existent entre les nombres connus et inconnus seront donc exprimées d'une manière abrégée par l'égalité

$$x + x + 4 = 18,$$

qui a reçu le nom d'*équation*.

Pour tirer de cette *équation* la valeur de x , on observe que $x + x + 4$ étant la même chose que

$$2 \text{ fois } x + 4, \text{ ou que } x \times 2 + 4,$$

l'équation primitive revient à

$$x \times 2 + 4 = 18.$$

Si des deux quantités égales $x \times 2 + 4$ et 18, on retranche 4, les restes $x \times 2$ et 14 seront égaux et fourniront la nouvelle équation

$$x \times 2 = 14.$$

Divisant par 2 les quantités égales $x \times 2$ et 14, les quotiens x et 7 seront égaux, et donneront l'équation

$$x = 7,$$

qui fait connaître le plus petit des deux nombres demandés.

Le plus grand de ces nombres sera donc $7 + 4$ ou 11

Il est facile de s'assurer que les nombres 7 et 11 satisfont à toutes les conditions du problème; car leur somme est $7 + 11$ ou 18, et leur différence est $11 - 7$ ou 4.

On voit que la méthode que nous venons de suivre pour résoudre le problème proposé, se compose de deux parties distinctes.

Dans la *première partie*, on a écrit d'une manière abrégée les conditions du problème, à l'aide des *signes algébriques*; ce qui a fourni une équation entre les nombres connus et inconnus. C'est ce qu'on appelle *mettre le problème en équation*.

Dans la *seconde partie*, on est parvenu à la valeur de l'inconnue en soumettant l'équation primitive du problème à des *transformations* très simples. C'est ce qu'on nomme *résoudre l'équation*.

Enfin, on a fait la *PREUVE* en s'assurant que les valeurs obtenues pour les inconnues satisfont à toutes les conditions du problème.

On aperçoit aisément que *ces moyens de simplification, sont applicables à tous les problèmes*.

Si l'on prenait dans la question proposée d'autres nombres pour la *somme* et la *différence*, les valeurs des deux nombres inconnus changeraient, mais les raisonnemens et les calculs à faire pour déduire ces nombres inconnus de la *somme* et de la *différence*, resteraient les mêmes. Par conséquent, pour parvenir à une expression générale de l'inconnue x qui conserve la trace des opérations arithmétiques qu'il faut exécuter sur les nombres donnés 18 et 4, pour obtenir la valeur de cette inconnue, il suffit, dans les diverses transformations précédentes de l'équation primitive, de se borner à indiquer les opérations arithmétiques, au lieu de les effectuer.

En opérant de cette manière, l'équation primitive

$$x \times 2 + 4 = 18,$$

conduit à $x \times 2 = 18 - 4, \quad x = \frac{18 - 4}{2}.$

Ce dernier résultat jouit de la propriété demandée; car il nous apprend que le plus petit nombre x peut toujours se déduire directement de la *somme* et de la *différence données*, en retranchant la *différence* de la *somme*, et en divisant le reste par 2.

D'après cette règle, lorsque la somme de deux nombres étant 20, leur différence est 4, on obtient directement le plus petit de ces nombres en divisant $20 - 4$ ou 16 par 2; ce qui donne 8. Le plus grand nombre est donc $8 + 4$ ou 12.

Si, la somme des deux nombres inconnus étant 18, leur différence était 2, en désignant toujours par x le plus petit de ces nombres, on serait conduit aux équations

$$x + x + 2 = 18, \quad x \times 2 = 18 - 2, \quad x = \frac{18 - 2}{2},$$

et cette valeur de x aurait l'inconvénient de ne plus faire connaître comment l'inconnue se déduit des *données* 18 et 2; car on pourrait croire qu'il faut retrancher la différence donnée 2 de la somme 18, et diviser le reste par la différence donnée 2. Ce qui n'est pas généralement vrai, puisque le dénominateur 2 de la valeur de x , résultant de ce qu'on a remplacé dans l'équation primitive, $x + x$ par $x \times 2$, ce dénominateur sera toujours 2, quelles que soient la somme et la différence données, tandis que dans le numérateur $18 - 2$, le même nombre 2 exprime la différence donnée qui peut changer.

Pour éviter que la réduction des termes qui renferment l'inconnue, ne puisse induire en erreur, en introduisant des nombres qui se confondent avec les *données* particulières de la question proposée, et afin que l'expression de l'inconnue conserve la trace des calculs arithmétiques à faire sur les *données* pour en déduire directement cette valeur de l'inconnue, sans être obligé de passer par toutes les transformations de l'équation primitive, on a représenté les quantités données par des *caractères* généraux qui sont ordinairement les premières lettres de l'alphabet.

Ainsi, dans le problème précédent, on désigne par a la *somme* des deux nombres inconnus et par b leur *différence*; le plus petit de ces nombres étant x , le plus grand sera $x + b$, et leur somme devant être égale à a , on aura

$$x + x + b = a, \quad \text{ou} \quad x \times 2 + b = a, \quad \text{ou} \quad 2x + b = a (*).$$

(*) Pour indiquer le produit de x par 2 on écrit $2x$.

La somme des quantités $2x$, b , étant a , on obtiendra $2x$ en ôtant b de a ; de sorte que

$$2x = a - b.$$

Le plus petit nombre x est donc égal à la moitié de $a - b$,
ou à $\frac{a - b}{2}$.

On obtiendra donc le plus petit nombre en retranchant de la somme a des nombres cherchés, la différence donnée b , et en divisant le reste par 2.

On peut aussi déduire directement le plus grand nombre, de la somme et de la différence données; car l'expression générale du plus petit des nombres cherchés étant $\frac{a - b}{2}$, il suffit de lui ajouter la différence donnée b pour obtenir le plus grand nombre. Le plus grand nombre a donc pour expression générale,

$$\frac{a - b}{2} + b, \text{ ou } \frac{a - b}{2} + \frac{2b}{2}, \text{ ou } \frac{a - b + 2b}{2}.$$

Or, $a - b + 2b$ se réduit à $a + b$; car ôter une fois b de a , pour ajouter ensuite 2 fois b au résultat $a - b$, revient à ajouter une fois b à a .

Le plus grand nombre étant exprimé par $\frac{a + b}{2}$, on voit que pour le déterminer, il suffit d'ajouter la différence des nombres cherchés à leur somme et de diviser le résultat par 2.

Si l'on veut parvenir directement à cette expression générale du plus grand des deux nombres cherchés, on désignera ce nombre par x , le plus petit nombre sera $x - b$, et la somme de ces deux nombres devant être a , on aura

$$x + x - b = a, \text{ ou } 2x - b = a.$$

Pour résoudre cette équation, on ajoute b aux deux quantités égales $2x - b$ et a ; les sommes $2x - b + b$ et $a + b$ étant égales, on a

$$2x - b + b = a + b;$$

ce qui se réduit à $2x = a + b$,

car, lorsque après avoir ôté b de $2x$, on ajoute b au résultat $2x - b$, ces deux opérations se détruisent nécessairement et donnent $2x$.

Enfin, pour résoudre l'équation $2x = a + b$, on divise par 2 les quantités égales $2x$ et $a + b$; les quotiens x et $\frac{a + b}{2}$ étant égaux, on a $x = \frac{a + b}{2}$, ce qui détermine le plus grand des deux nombres cherchés.

Pour en déduire le plus petit, on ôte la différence b , du plus grand nombre $\frac{a + b}{2}$; l'expression générale du plus petit nombre est donc

$$\frac{a + b}{2} - b, \text{ ou } \frac{a + b}{2} - \frac{2b}{2}, \text{ ou } \frac{a + b - 2b}{2}, \text{ ou } \frac{a - b}{2},$$

car il est évident qu'ajouter une fois b à a pour ôter ensuite 2 fois b du résultat, revient à ôter une fois b de a .

On peut donner une autre forme aux expressions $\frac{a + b}{2}$, $\frac{a - b}{2}$, car d'après ce qui a été démontré dans l'Arithmétique,

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a - b}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Par conséquent,

$$\text{le plus petit nombre} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2},$$

$$\text{le plus grand nombre} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

2. Ces résultats sont des *formules* qui nous apprennent que, *connaissant la somme et la différence de deux nombres, le plus petit est égal à la demi-somme moins la demi-différence, et le plus grand est égal à la demi-somme plus la demi-différence.*

Notations et définitions.

3. La recherche des valeurs des inconnues conduisant à effectuer des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions, sur des quantités représentées par des lettres, nous allons donner les moyens d'exécuter ces opérations; mais auparavant, nous ferons connaître quelques nouvelles *notations*.

Pour désigner la *somme* ou la *différence* des quantités représentées par a et b on écrit $a + b$, ou $a - b$.

Chacune des expressions $a \times b$, ab , indique le *produit* de a par b .

Pour marquer le *quotient* de la division de a par b , on écrit $a : b$ ou $\frac{a}{b}$.

Lorsqu'on veut indiquer une opération à effectuer sur une quantité, on place quelquefois cette quantité entre *parenthèses*, et on met le signe de l'opération hors de la parenthèse.

Ainsi, $(a - b) + (c - d)$ et $(a - b) - (c - d)$, désignent respectivement la somme et la différence des deux quantités $a - b$, $c - d$.

Pour indiquer le produit de $a - b$ par $c - d$, on écrit $(a - b) \times (c - d)$, ou simplement $(a - b)(c - d)$.

Chacune des expressions

$$\frac{(a - b)}{(c - d)}, \quad \left(\frac{a - b}{c - d} \right), \quad \frac{a - b}{c - d}, \quad (a - b) : (c - d),$$

représente le quotient de $a - b$ par $c - d$.

Pour marquer que deux quantités sont inégales, on met entre elles l'un des signes $>$ ou $<$, qui signifie *plus grand* ou *plus petit*.

Ainsi, $b < c$ est une *inégalité* qui exprime que b est *plus petit* que c .

Pour indiquer la somme de plusieurs quantités égales entre elles, on écrit une de ces quantités et on met à sa gauche le nombre qui exprime combien de fois elle est répétée; ce nombre s'appelle *coefficient*.

Ainsi, $3b$ représente la somme de 3 quantités égales à b ; 3 est le coefficient ou le multiplicateur de b .

Lorsqu'on multiplie une quantité plusieurs fois par elle-même, le produit est une puissance de cette quantité, et cette quantité est la racine de la puissance.

Ainsi, la $m^{\text{ième}}$ puissance de b est le produit de m facteurs égaux à b , et la racine $m^{\text{ième}}$ de a est la quantité qui prise m fois comme facteur donne un produit égal à a .

Pour indiquer le produit de m facteurs égaux à b , c'est-à-dire la $m^{\text{ième}}$ puissance de b , on écrit b^m , et m est ce qu'on nomme l'exposant de b .

Ainsi, b^3 représente le produit de 3 quantités égales à b ; 3 est l'exposant de b .

Or, b^3 revient à $1 \times b \times b \times b$. On peut donc dire aussi que l'exposant d'une quantité marque combien de fois l'unité est multipliée par cette quantité.

On est convenu de supprimer les coefficients et les exposants, lorsqu'ils sont égaux à l'unité. De sorte que $1b^1a^1c^1$ a la même valeur que bac .

Pour désigner la racine $m^{\text{ième}}$ de a , on écrit $\sqrt[m]{a}$, et m est le degré ou l'indice du radical $\sqrt[m]{a}$.

Pour indiquer la racine quarrée ou deuxième d'un nombre, on peut placer ce nombre sous le signe $\sqrt{}$; mais ordinairement on fait abstraction de l'indice 2. De sorte que $\sqrt{b}$ représente la racine quarrée de b .

Chacune des quantités a , $3bc^2$, est un monome; la réunion de plusieurs monomes affectés des signes $+$ et $-$, est un polynome, et ces monomes sont les termes du polynome. Selon qu'on veut exprimer qu'une quantité est composée de deux monomes, de trois monomes, etc., on dit que cette quantité est un binôme, un trinôme, etc.

Un terme d'un polynome est dit positif ou négatif, suivant qu'il est affecté du signe $+$ ou $-$.

Les monomes qui ne sont précédés d'aucun des signes $+$, $-$,

sont censés affectés du signe $+$, et sont par conséquent *positifs*.

Des termes sont dits *semblables*, lorsqu'ils sont les mêmes, abstraction faite des signes $+$, $-$ et des coefficients numériques.

Ainsi $+6a^2b^3$ et $-5a^2b^3$ sont des *termes semblables*.

Le nombre des facteurs algébriques qui entrent dans un produit, mesure le *degré* ou la *dimension* du produit; les coefficients numériques ne comptent pas dans l'estimation de ce degré.

Quand tous les termes d'un polynome sont du même degré, on dit que ce polynome est *homogène*.

Ainsi, $a^4 + 5a^2b^2 + 3abcd$ est un *trinome* homogène du quatrième degré.

On est convenu de classer les grandeurs des quantités algébriques, d'après les grandeurs des exposans d'une même lettre, prise arbitrairement.

Ainsi, b^3 est plus grand que b^2 ; mais il ne s'agit pas des valeurs numériques; car selon que la quantité représentée par b est plus grande ou plus petite que l'unité, la valeur numérique de b^3 est plus grande ou plus petite que celle de b^2 .

Par exemple,

$b=4$, donne $b^3=4 \times 4 \times 4=64$, $b^2=4 \times 4=16$; $b^3 > b^2$.

$b=\frac{1}{4}$, donne $b^3=\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}=\frac{1}{64}$, $b^2=\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}=\frac{1}{16}$; $b^3 < b^2$.

Quand les termes d'un polynome sont disposés suivant l'ordre indiqué par les grandeurs des exposans d'une lettre, on dit que ce polynome est *ordonné* par rapport à cette lettre.

Ainsi, le polynome $a^5b - 5b^2a^4 + 2b^3a^3$ est *ordonné* suivant les puissances décroissantes de a , et suivant les puissances croissantes de b .

Lorsqu'on dira qu'un polynome est *plus grand* qu'un autre, il faudra toujours sous-entendre que ces polynomes étant ordonnés par rapport à une même lettre, le plus fort exposant de cette lettre est plus grand dans le premier polynome que dans le second. Sous ce point de vue, $a^3 + 2a + 1$ est plus grand que $a^2 + 89a + 2$.

§ II. Des quatre opérations algébriques.

4. Lorsqu'on veut faire l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division de plusieurs polynômes, on se propose de parvenir à un polynôme unique qui soit tel, que si l'on assigne des valeurs numériques particulières aux lettres contenues dans les polynômes proposés et dans le polynôme cherché, ce dernier prenne la valeur numérique qu'on obtiendrait si l'on opérât directement sur les nombres auxquels se réduisent les polynômes donnés.

5. Le polynôme qui résulte de l'une quelconque de ces quatre opérations, étant souvent susceptible d'être réduit à un plus petit nombre de termes, nous commencerons par faire connaître comment on peut réduire un polynôme à sa plus simple expression.

Il est d'abord facile de voir que les quantités

$$b + 3 + 5, \quad b - 3 - 5, \quad b + 5 - 3, \quad b - 5 + 3,$$

se réduisent respectivement à

$$b + 8, \quad b - 8, \quad b + 2, \quad b - 2.$$

En effet :

$b + 3 + 5$, exprime qu'après avoir ajouté 3 à b , on doit ajouter 5 à la somme ; ces deux opérations reviennent à ajouter 3 + 5 ou 8 à b .

L'expression $b - 3 - 5$, indique qu'il faut d'abord soustraire 3 de b , et ôter ensuite 5 du reste ; ce qui revient à ôter 3 + 5 ou 8 de b .

Pour évaluer $b + 5 - 3$, on doit ajouter 5 à b , et retrancher ensuite 3 de la somme ; ces deux opérations se réduisent à ajouter 5 - 3 ou 2 à b .

Enfin, $b - 5 + 3$, indique qu'on doit ôter 5 de b et ajouter 3 au reste ; ce qui se réduit à ôter de b , le nombre 2 qui est la différence entre 5 et 3.

Ces résultats étant indépendans de la valeur de b , on peut faire $b = 0$; ce qui donne

$$3+5=8, -3-5=-8, 5-3=+2, -5+3=-2.$$

On verrait de même que

$$2+7-4=5, 2-4+7=5, 9-5+7-3=8.$$

En général : *Pour simplifier une expression composée de plusieurs nombres précédés des signes + et - , on calcule séparément la somme des nombres affectés du signe + et celle des nombres affectés du signe - ; on retranche la plus petite somme de la plus grande ; le reste affecté du signe des nombres qui ont fourni la plus grande somme , est le résultat demandé.*

D'après cette règle, si l'on regarde b comme une certaine unité, on aura

$$3b+5b=8b, -3b-5b=-8b, 5b-3b=+2b, 3b-5b=-2b, \\ 2b+7b-4b=5b, 2b-4b+7b=5b, 9b-5b+7b-3b=8b.$$

REMARQUE. *L'ordre dans lequel on écrit les termes d'un polynome est indifférent ; car les valeurs de ces termes étant indépendantes de leurs positions relatives, le résultat exprime toujours la somme des quantités additives, diminuée de la somme des quantités soustractives.*

Ainsi, $2b+7b-4b=2b-4b+7b.$

Il est d'ailleurs facile de le vérifier en effectuant successivement les opérations dans l'ordre indiqué ; car on trouve

$$2b+7b-4b=9b-4b=5b, 2b-4b+7b=-2b+7b=5b.$$

En général : *Pour réduire un polynome à sa plus simple expression, c'est-à-dire au plus petit nombre de termes, il suffit de réunir tous les termes semblables en un seul, en opérant sur leurs coefficients numériques d'après la règle précédente.*

On trouve de cette manière que

$$5a+6b^2c-2a-8b^2c, \text{ se réduit à } 3a-2b^2c; \text{ car}$$

$$5a+6b^2c-2a-8b^2c \text{ revient à } (5a-2a)+(6b^2c-8b^2c),$$

$$\text{et } 5a-2a=3a, 6b^2c-8b^2c=-2b^2c.$$

Il est facile de s'assurer que chacun des polynomes

$$5a + 6b^2c - 2a - 8b^2c, \quad 3a - 2b^2c,$$

prend la même valeur numérique, lorsqu'on y remplace a , b et c par des nombres quelconques.

Par exemple, soient $a = 30$, $b = 2$, $c = 5$, on aura

$$\begin{aligned} 5a + 6b^2c - 2a - 8b^2c &= 5 \times 30 + 6 \times 2^2 \times 5 - 2 \times 30 - 8 \times 2^2 \times 5 \\ &= 150 + 120 - 60 - 160 = 270 - 220 = 50, \end{aligned}$$

$$3a - 2b^2c = 3 \times 30 - 2 \times 2^2 \times 5 = 90 - 40 = 50.$$

En général, un polynome réduit à sa plus simple expression offre le *tableau* des calculs à effectuer sur les valeurs numériques des lettres qu'il renferme, pour parvenir le plus directement à la valeur numérique de ce polynome.

Addition algébrique.

6. Pour ADDITIONNER plusieurs quantités, il suffit d'écrire les termes de ces quantités les uns à la suite des autres et avec leurs signes (les termes qui ne sont précédés d'aucun signe, sont censés avoir le signe +).

Par exemple, pour ajouter $b - c$ à a , on observe que la somme des quantités a , b étant $a + b$; quand b diminue de c , la somme $a + b$ doit diminuer de c ; la somme des quantités a , $b - c$, est donc $a + b - c$.

On verrait de même que la somme des trois polynomes $3a - b$, $c - 2d$, $e + 2f - 4g$, est $3a - b + c - 2d + e + 2f - 4g$; car la somme des trois quantités positives $3a$, c , $e + 2f$, étant indiquée par $3a + c + e + 2f$, si ces trois quantités diminuent respectivement de b , de $2d$ et de $4g$, leur somme $3a + c + e + 2f$, diminuera nécessairement de $b + 2d + 4g$; elle deviendra donc

$$3a + c + e + 2f - b - 2d - 4g.$$

Ce qui revient à écrire tous les termes des quantités proposées avec leurs signes, comme il suit :

$$3a - b + c - 2d + e + 2f - 4g.$$

En général, si l'on supprimait tous les termes négatifs des quantités qu'il s'agit d'additionner, la somme serait formée des termes positifs écrits les uns à la suite des autres; et cette dernière somme serait évidemment trop grande de toutes les quantités négatives dont on a fait abstraction; on obtiendra donc la somme des quantités proposées en diminuant la somme des termes positifs, de la somme des termes qui sont précédés du signe —; ce qui revient à écrire tous ces termes les uns à la suite des autres, avec leurs signes.

Lorsque les quantités qu'il s'agit d'additionner renferment des termes *semblables*, on facilite les réductions dont la somme est susceptible, en écrivant les termes semblables les uns sous les autres. En voici deux exemples:

$$\begin{array}{r|l}
 3a + 5b^2 & 10a^2b - 12a^3bc - 15b^2c^4 + 10 \\
 7a - 2b^2 & - 4a^2b + 8a^3bc - 10b^2c^4 - 4 \\
 -9a - 13b^2 & - 3a^2b - 3a^3bc + 20b^2c^4 - 3 \\
 4a + 4b^2 & 2a^2b + 12a^3bc + 5b^2c^4 + 2 \\
 \hline
 \text{Somme } 5a - 6b^2 & 5a^2b + 5a^3bc + 5.
 \end{array}$$

Dans la 1^{re} addition, la somme des coefficients de a est $3 + 7 + 4 - 9$, ou $14 - 9$, ou 5 ; et celle des coefficients de b^2 est $5 + 4 - 2 - 13$, ou $9 - 15$, ou -6 ; la somme des quatre binomes proposés est donc $5a - 6b^2$.

Dans la 2^e addition, le coefficient de b^2c^4 se réduit à zéro; de sorte que b^2c^4 disparaît de la somme $5a^2b + 5a^3bc + 5$.

Soustraction algébrique.

7. La *SOUSTRACTION algébrique* a pour but, connaissant la somme de deux quantités et l'une d'elles, de trouver l'autre quantité nommée *RESTE*.

Par exemple, soit proposé d'ôter $c - d$ de $a - b$. Si l'on ôtait c de $a - b$, le reste serait $a - b - c$; mais on ne devait soustraire que $c - d$; on a donc ôté d de trop; le reste $a - b - c$ est donc trop faible de d ; le reste cherché est donc $a - b - c + d$.

On verra de même que si l'on ôte $2a+3b^2c-7$ de $8a-5b^2c-4$, le reste sera

$$8a-5b^2c-4-2a-3b^2c+7; \text{ il se réduit à } 6a-8b^2c+3.$$

En général : *Pour obtenir le reste d'une soustraction, il suffit d'écrire à la suite de la quantité dont on veut soustraire, tous les termes de la quantité à soustraire pris avec des signes contraires à ceux qu'ils ont, et d'effectuer ensuite les réductions des termes semblables (n° 5); le résultat est le reste demandé, réduit à sa plus simple expression.*

En effet, soient A et B, deux quantités quelconques, monomes ou polynomes : lorsqu'on a ôté B de A, le reste R doit être tel, qu'ajouté à B, il donne une somme égale à A. Or, si l'on mettait à la suite de B, tous les termes de B, pris avec des signes contraires à ceux qu'ils ont, le résultat se réduirait à zéro, car tous ces termes seraient deux à deux égaux et de signes contraires; la quantité R, qu'on doit ajouter à B pour obtenir A, est donc composée de A et de tous les termes de B pris avec des signes contraires à ceux qu'ils ont. Ce qui démontre la règle énoncée.

Pour faire dépendre la soustraction de l'addition, et faciliter les réductions des termes semblables, on pose sous la quantité dont on soustrait, tous les termes de la quantité à soustraire pris avec des signes contraires à ceux qu'ils ont, en ayant soin d'écrire les termes semblables les uns sous les autres; la somme de ces deux polynomes, réduite à sa plus simple expression, exprime le reste demandé.

Ainsi, pour ôter $2a+3b^2c-7$ de $8a-5b^2c-4$, on exécute le calcul de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 8a - 5b^2c - 4 \\ -2a - 3b^2c + 7 \\ \hline \text{Reste } 6a - 8b^2c + 3. \end{array}$$

8. La soustraction conduit aux *quantités négatives*. En effet, soit proposé d'ôter 7 de 5; cela revient à retrancher de 5, les parties 5 et 2 du nombre 7. Mais quand on a ôté 5 de 5, le

reste est zéro ; on devrait donc ôter 2 de 0 ; le reste demandé est donc $0 - 2$, ou -2 .

En général, lorsqu'on retranche $a + b$ de a , le reste est $a - a - b$, ou $0 - b$, ou $-b$.

Toute quantité négative $-b$ peut donc être considérée comme indiquant le reste d'une soustraction qui n'a pu s'effectuer qu'en partie, et dans laquelle la quantité à soustraire surpasse de b , la quantité dont on veut la soustraire.

9. Les règles qui ont été données pour l'addition et la soustraction des polynômes, s'appliquent aux monômes affectés des signes $+$ et $-$; car ces règles étant indépendantes des valeurs numériques, des termes qui composent les polynômes, on peut supposer que ces polynômes se réduisent à des monômes.

Par exemple, les relations

$$\begin{aligned}(a - b) + (c - d) &= a - b + c - d \\ (a - b) - (c - d) &= a - b - c + d,\end{aligned}$$

ayant lieu quelles que soient les valeurs des quantités représentées par a, b, c, d , on peut élever à zéro deux quelconques de ces quantités ; ce qui donne

$$\begin{aligned}a + (-d) &= a - d, & (-b) + (-d) &= -b - d, \\ a - (-d) &= a + d, & (-b) - (-d) &= -b + d.\end{aligned}$$

Il est facile de s'assurer directement de l'exactitude de ces résultats. Par exemple, a étant égal à $a - d + d$, selon qu'on en ôte $-d$ ou $+d$, le reste est $a + d$ ou $a - d$.

10. On peut comparer plusieurs quantités, en faisant abstraction des signes $+$ et $-$, ou en ayant égard à ces signes ; dans le 1^{er} cas, on compare les *grandeurs absolues* des quantités, et dans le 2^e leurs *grandeurs relatives*.

Les valeurs relatives des quantités négatives sont d'autant plus petites, que les valeurs absolues de ces quantités sont plus grandes.

En effet, soit l'inégalité $a < a + b$.

Si l'on retranche $a + b + c$ de part et d'autre, on aura nécessairement,

$$a - (a + b + c) < (a + b) - (a + b + c), \text{ ou } -(b + c) < -c.$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

Ainsi, on a $-7 < -5$.

On peut d'ailleurs s'en assurer, car en ajoutant 9 de part et d'autre, il vient

$$-7 + 9 < -5 + 9, \text{ ou } 9 - 7 < 9 - 5, \text{ ou } 2 < 4.$$

Cette dernière inégalité étant vraie, l'inégalité primitive.....
 $-7 < -5$ était nécessairement exacte.

La valeur relative d'une quantité négative est plus petite que zéro ; car lorsqu'on suppose $c = 0$, l'inégalité $-(b + c) < -c$ donne $-b < 0$.

C'est dans ce sens qu'on dit qu'une quantité négative est plus petite que zéro, quoiqu'il n'existe aucune quantité dont la valeur absolue soit moindre que zéro.

Lorsque nous parlerons d'une quantité moindre que zéro, il faudra toujours entendre qu'elle est négative, et que nous considérons sa valeur relative.

On peut aussi se rendre compte de ces propriétés, en considérant la suite indéfinie

$$\dots +4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, -4, \dots$$

car chaque terme étant égal au précédent diminué de 1, les termes successifs ont des valeurs relatives de plus en plus petites. Ainsi on a

$$3 < 4, 2 < 3, 1 < 2, 0 < 1, -1 < 0, -2 < -1, -3 < -2, \dots$$

Multiplication algébrique.

11. *Le but de la MULTIPLICATION algébrique est de déterminer une quantité nommée PRODUIT qui soit composée avec une quantité nommée MULTIPLICANDE, de la même manière qu'une autre quantité nommée MULTIPLICATEUR ; est composée avec l'unité.*

De sorte que pour obtenir le produit, il suffit d'effectuer sur

le multiplicande, les mêmes opérations qu'il faudrait effectuer sur l'unité, pour former le multiplicateur.

Le multiplicande et le multiplicateur sont les *facteurs* du produit.

12. Nous avons démontré en Arithmétique, que *le produit de plusieurs facteurs commensurables ne change pas de valeur dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications*; nous allons faire voir que *la même propriété convient à des facteurs incommensurables quelconques*.

Cela se réduit à prouver qu'on peut intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques, b, c

Soient, a le produit des facteurs incommensurables qui précèdent b , et d, e, f , etc., les facteurs incommensurables qui suivent c ; le principe sera démontré si les produits abc , acb , sont égaux, car en les multipliant successivement et dans le même ordre par d, e, f , etc., les résultats seront nécessairement égaux.

Or, on peut toujours concevoir des quantités commensurables variables a', b', c' , respectivement moindres que les incommensurables constantes a, b, c , et qui en approchent indéfiniment (*); c'est-à-dire que les différences $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$, peuvent devenir moindres que toute quantité donnée. Soient, pour simplifier,

$$abc = A, acb = B, a'b'c' = A', a'c'b' = B'.$$

Les produits A', B' seront respectivement moindres que A et B , et les différences $A - A'$, $B - B'$, seront susceptibles de devenir moindres que toute quantité donnée.

Cela posé : si l'on avait $A > B$, la différence $A - B$ serait finie et constante; le produit A' pouvant approcher indéfiniment de A , la différence variable $A - A'$ finirait par devenir

(*) Toutes les fois qu'on dira qu'une quantité variable approche *indéfiniment* d'une quantité constante, on entendra que la différence entre ces deux quantités est susceptible de devenir moindre que toute grandeur donnée.

moindre que la différence constante et finie $A - B$; de sorte que A' finirait par dépasser B . Mais, a', b', c' , étant commensurables, les produits A', B' restent constamment égaux; B' deviendrait donc plus grand que B ; ce qui est absurde, puisque les facteurs a', c', b' , de B' sont respectivement moindres que les facteurs a, c, b , de B . Or, cette absurdité résulte de ce qu'on a supposé que les produits A, B étaient différens. Ces produits sont donc égaux.

13. En général, lorsqu'une relation a lieu entre des quantités, quelques valeurs commensurables qu'elles puissent avoir, cette relation subsiste encore quand ces quantités deviennent incommensurables.

En effet; soient A et B des expressions qui renferment des quantités incommensurables données a, b, c , etc., et qui sont telles, que $A = B$ quand on remplace a, b, c , etc., par des quantités commensurables quelconques. Il existera toujours des quantités commensurables variables a', b', c' , etc., qui approcheront indéfiniment de a, b, c , etc.; et l'on pourra supposer à volonté que a', b', c' , etc., sont respectivement plus grandes ou plus petites que a, b, c , etc.; de sorte que les différences entre les variables a', b', c' , etc., et les constantes a, b, c , etc., seront susceptibles de devenir moindres que toute quantité donnée. Désignant donc par A' et B' les valeurs commensurables que prennent les incommensurables A, B , quand on y remplace a, b, c , etc., par a', b', c' , etc., il suit de l'hypothèse que les variables A', B' seront toujours égales entre elles. A mesure que a', b', c' , etc., approcheront de a, b, c , etc., les quantités A', B' approcheront indéfiniment de A et B ; et l'on pourra toujours supposer qu'elles restent moindres que A et B , en prenant pour a', b', c' , etc., des valeurs approchées convenables. Cela posé, si les incommensurables A, B n'étaient pas égales, l'une d'elles, A par exemple, serait plus grande que l'autre; et la différence $A - B$ étant une quantité finie, on pourrait toujours concevoir que la variable A' augmentant et s'approchant indéfiniment de A , finirait par dépasser la quantité B moindre

que A ; mais $B' = A'$; B' dépasserait donc sa limite B ; ce qui est contre l'hypothèse. Le principe est donc démontré.

14. On a vu en Arithmétique que, pour multiplier par le produit de plusieurs facteurs commensurables, il suffit de multiplier successivement par les facteurs du produit. (Arithm., n° 17.) Il résulte du principe précédent que la même propriété convient à des facteurs incommensurables quelconques.

De la multiplication des monomes.

15. Les principes établis dans les n° 3 et 12, démontrent les règles suivantes :

1°. Le coefficient du produit de plusieurs monomes est égal au produit des coefficients de ces monomes. Par exemple,

$$3a \times 2b = 3 \times a \times 2 \times b = 3 \times 2 \times a \times b = 6ab.$$

Cela est d'ailleurs évident, car le produit de $3a$ par b étant $3ab$, si le multiplicateur devient 2 fois plus grand, le produit deviendra 2 fois plus grand ; le produit de $3a$ par $2b$ est donc 2 fois $3ab$, ou $6ab$.

2°. Le produit de plusieurs PUISSANCES d'une même quantité, a pour exposant la somme des exposans de cette quantité dans les facteurs.

Ainsi, $b^2 \times b^3 = bb \times bbb = bbbbb = b^5 = b^{2+3}.$

En général, lorsque m et n sont des nombres entiers positifs, on a

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

3°. Lorsqu'un produit contient plusieurs puissances d'une quantité, il suffit d'écrire une seule fois cette quantité, et de lui donner pour exposant la somme des nombres qui marquent combien de fois elle est facteur. Par exemple,

$$a^3b^2 \times a^2b^4 = a^3b^2a^2b^4 = a^3a^2b^2b^4 = a^{3+2}b^{2+4} = a^5b^6.$$

4°. Quand un des facteurs d'un produit se réduit à zéro, le produit devient nul ; car on peut prendre pour multiplicande le

facteur qui doit se réduire à zéro ; et le multiplicande zéro répété plusieurs fois, donne nécessairement un produit nul.

5°. *Le produit de deux monomes de même signe a le signe +, et le produit de deux monomes affectés de signes différens a le signe -.*

Pour le démontrer, nous supposons que le multiplicateur est un nombre entier, car le signe d'un produit ne dépend que des signes des facteurs. Dans cette hypothèse :

Quand le multiplicateur a le signe +, le produit a le signe du multiplicande ; car le multiplicateur positif étant composé de la somme de plusieurs unités, il résulte de la définition de la multiplication, que le produit est la somme de plusieurs quantités égales au multiplicande, et la somme de plusieurs quantités de mêmes signes est affectée du signe de ces quantités.

Ainsi, le produit de $+a$ par $+b$ est $+ab$, et celui de $-a$ par $+b$ est $-ab$.

Par exemple,

$$\begin{aligned} (+3) \times (+2) &= 3 + 3 = +6, \\ (-3) \times (+2) &= -3 - 3 = -6. \end{aligned}$$

Quand le multiplicateur a le signe -, le produit a un signe contraire à celui du multiplicande ; car le multiplicateur négatif étant composé de la soustraction de plusieurs unités, on formera le produit en retranchant plusieurs fois le multiplicande ; ce qui revient à faire la somme de plusieurs quantités de signes contraires au multiplicande.

Ainsi, le produit de $+a$ par $-b$ est $-ab$, et celui de $-a$ par $-b$ est $+ab$.

Par exemple, dans la multiplication de -3 par -2 , le multiplicateur -2 étant composé de la soustraction de 2 unités, le produit s'obtiendra en retranchant 2 fois le multiplicande -3 ; or pour soustraire -3 , il suffit d'écrire $+3$; le produit demandé de -3 par -2 , est donc $+3 + 3$ ou $+6$.

16. La règle du n° 15 (5°) conduit aux propriétés suivantes :

1°. Le produit a le signe $+$, quand tous ses facteurs sont positifs.

2°. Le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs est positif; car ces facteurs, multipliés deux à deux, donnent des résultats positifs.

Ainsi, $(-a)(-b)(-c)(-d) = (+ab) \times (+cd) = +abcd$.

3°. Le produit d'un nombre impair de facteurs négatifs est négatif; car d'après (2°), le produit de tous les facteurs, excepté le dernier, est positif, et ce produit multiplié par le dernier facteur donne un résultat négatif.

4°. Suivant qu'on change les signes d'un nombre pair ou impair de facteurs, le produit ne change pas de signe ou change de signe.

Il résulte de ces propriétés et du principe du n° 12, que le produit de plusieurs facteurs affectés de signes quelconques ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications, car le signe et la valeur de ce produit restent les mêmes.

On trouve d'après les règles précédentes que

$$\begin{aligned} (+3a^2bc) \times (+4a^1c^2) &= (-3a^2bc) \times (-4a^1c^2) = +12a^3bc^3, \\ (+3a^2bc) \times (-4a^1c^2) &= (-3a^2bc) \times (+4a^1c^2) = -12a^3bc^3. \end{aligned}$$

De la multiplication des polynomes.

17. Pour former le produit de deux polynomes, il suffit de multiplier successivement chaque terme du multiplicande, par chaque terme du multiplicateur, en donnant le signe $+$ au produit de deux termes de même signe, et le signe $-$ au produit de deux termes de signes différents.

En effet; soit proposé de multiplier $a - b$ par $c - d$.

Le produit de a par c étant ac , si le multiplicande diminue de b , le produit diminuera de c fois b ou de bc ; le produit de $a - b$ par c est donc $ac - bc$.

Par une raison semblable, le produit de $a - b$ par d est $ad - bd$.

Or, le produit de $a - b$ par c étant $ac - bc$, si le multipli-

cateur c diminue de d , le produit diminuera de d fois le multiplicande $a - b$, ou de $ad - bd$. Le produit de $a - b$ par $c - d$ s'obtiendra donc en retranchant $ad - bd$ de $ac - bc$; ce produit est donc $ac - bc - ad + bd$. Ce qui démontre le principe énoncé.

REMARQUE. La règle des signes, dans la multiplication des monomes (n° 15, 5°), peut se déduire de l'égalité

$$(a - b) \times (c - d) = ac - bc - ad + bd,$$

en supposant successivement que deux des quantités a, b, c, d , se réduisent à zéro.

Par exemple, lorsqu'on fait $a = 0$, $c = 0$, on trouve que le produit de $-b$ par $-d$ est $+bd$.

Pour mettre plus d'ordre dans la formation du produit de deux polynomes et pour faciliter les réductions dont ce produit est susceptible, on ordonne les facteurs par rapport à une lettre, et on dispose les produits partiels de manière que les termes semblables se trouvent les uns sous les autres.

EXEMPLE. Soit proposé de multiplier

$$-b^3 - a^2b + a^3 + ab^2 \text{ par } -4b^2 + 3a^2 - 3ab;$$

on ordonne ces facteurs par rapport à a ; ce qui conduit au calcul suivant:

Multiplicande $a^3 - ba^2 + b^2a - b^3$

Multiplicateur $3a^2 - 3ba - 4b^2$

$$\begin{array}{lcl} \text{Produits} & \left\{ \begin{array}{l} 3a^5 - 3ba^4 + 3b^2a^3 - 3b^3a^2, \dots\dots\dots 1^{\text{er}} \text{ produit.} \\ -3ba^4 + 3b^2a^3 - 3b^3a^2 + 3b^4a, \dots\dots\dots 2^{\text{e}} \text{ produit.} \\ -4b^5a^3 + 4b^2a^2 - 4b^4a + 4b^5, \dots\dots\dots 3^{\text{e}} \text{ produit.} \end{array} \right. & \\ \text{Produit total} & 3a^5 - 6ba^4 + 2b^2a^3 - 2b^3a^2 - b^4a + 4b^5. & \end{array}$$

La multiplication du multiplicande par le 1^{er} terme $3a^2$ du multiplicateur, a donné le 1^{er} produit partiel; on a obtenu le 2^e produit partiel, en multipliant le multiplicande par le 2^e terme $-3ba$ du multiplicateur; et on a formé le 3^e produit partiel, en multipliant le multiplicande par le 3^e terme $-4b^2$, du multiplicateur. On a disposé les termes semblables les uns

sous les autres; la somme des produits partiels, réduite à sa plus simple expression, a donné le produit total.

Lorsqu'un polynome renferme plusieurs monomes affectés des mêmes puissances de la lettre par rapport à laquelle on veut ordonner, on réunit tous ces monomes en un seul terme, et on ordonne chacun des polynomes, qui sert de coefficient à cette lettre, par rapport à une autre lettre.

Ainsi, pour ordonner le polynome

$$2b^3a^4 - 5ba^3 + b^3a^5 - 3b^2a^4 - 2a^5,$$

par rapport aux puissances décroissantes des lettres a et b , on écrit

$$(b^3 - 2)a^5 + (2b^3 - 3b^2)a^4 - 5ba^3.$$

Sous cette dernière forme, chaque puissance différente de a est considérée comme un seul terme; de sorte que $(b^3 - 2)a^5$ est le premier terme.

En général, un polynome ordonné suivant les puissances décroissantes de a , est de la forme $pa^m + qa^{m-1} + ra^{m-2} + \text{etc.}$; les coefficients $p, q, r, \text{etc.}$, des diverses puissances de a , sont indépendans de a ; ils peuvent désigner des monomes ou des polynomes; le 1^{er} terme est pa^m , le 2^e terme est qa^{m-1} , etc.

EXEMPLE. Soit proposé de calculer le produit de

$$ba^3 + a^4 + b^2a^3 - ba^4 + b^2a^4, \text{ par } -a^3 - a^2b^2 - a^3b + ba^2.$$

On pourrait former le produit demandé en multipliant successivement chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, mais on parvient plus simplement au résultat, en ordonnant les deux facteurs suivant les puissances croissantes ou décroissantes de a et b .

Si l'on ordonne les deux facteurs suivant les puissances croissantes de a et b , ils deviennent

$$(b + b^2)a^3 + (1 - b + b^2)a^4 \text{ et } (b - b^2)a^3 - (1 + b)a^2.$$

Pour faciliter les calculs, on peut poser

$$b + b^2 = p, \quad 1 - b + b^2 = q, \quad b - b^2 = m, \quad 1 + b = n.$$

La question se réduit à multiplier $pa^3 + qa^4$ par $ma^3 - na^2$; le produit est $pma^5 + (qm - pn)a^6 - qna^7$.

On remplace m, n, p et q par leurs valeurs, et on effectue les produits pm, qm, pn, qn ; on trouve ainsi que le produit demandé est

$$(1 - b^4)b^4a^5 - (4 - b + b^3)b^4a^5 - (1 + b^3)a^7.$$

18. Pour former le produit de plusieurs polynômes, on les ordonne par rapport à une même lettre; on multiplie ensuite le 1^{er} polynôme par le 2^e, et on effectue toutes les réductions possibles; le produit des deux premiers polynômes, multiplié par le troisième, donne le produit des trois premiers polynômes; et ainsi de suite.

Par exemple, pour calculer le produit des quatre facteurs $a - b, a^2 + ab + b^2, a + b, a^2 - ab + b^2$, on multiplie d'abord $a - b$ par $a^2 + ab + b^2$; le produit $a^3 - b^3$, multiplié par $a + b$, détermine le produit $a^4 + a^2b - ab^3 - b^4$ des trois premiers facteurs; et la multiplication de $a^4 + a^2b - ab^3 - b^4$, par $a^2 - ab + b^2$, donne le produit $a^6 - b^6$, des facteurs proposés.

On trouverait de même que le produit des trois binômes $a + bx, a' + b'x, a'' + b''x$, est

$$aa'a'' + (ba'a'' + b'aa'' + b''aa')x + (ab'b'' + a'bb'' + a''bb')x^2 + bb'b''x^3.$$

On voit que pour obtenir le coefficient de la 1^{re} puissance de x , dans ce produit, il suffit de multiplier successivement le coefficient de la 1^{re} puissance de x dans chaque facteur, par le produit des termes indépendans de x dans chacun des autres facteurs; la somme des produits ainsi formés, exprime le coefficient demandé.

Cette propriété convient à un nombre quelconque de facteurs de la forme $a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$

19. Lorsque deux facteurs et leur produit sont ordonnés par rapport à une lettre, le premier terme du produit total est le produit du 1^{er} terme du multiplicande par le 1^{er} terme du multiplicateur.

En effet, si l'on ordonne par rapport aux puissances croissantes d'une lettre x , le 1^{er} terme de chaque facteur sera celui

qui contiendra le plus petit exposant de x ; le produit p , de ces premiers termes, déterminera donc le terme du produit total qui renferme le plus petit exposant de x , car, dans les autres termes des produits partiels les exposants de x étant plus forts que dans p , ces termes ne pourront pas être réunis à p ; p sera donc le 1^{er} terme du produit total.

On démontrerait de même que le dernier terme du produit total est le produit du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.

Il est facile d'en conclure que les mêmes propriétés conviennent à un nombre quelconque de facteurs.

20. Pour multiplier un polynome par une quantité indépendante de la lettre suivant laquelle ce polynome est ordonné, il suffit d'effectuer la multiplication sur les coefficients des diverses puissances de cette lettre. Cela est évident.

Par exemple, pour trouver le produit de

$$(b - c)a^3 + (b^3 - cb^2 + c^2b - c^3)a^2 + 3a, \text{ par } b + c,$$

on multiplie chacun des coefficients $b - c$, $b^3 - cb^2 + c^2b - c^3$, $+ 3$, par $b + c$; ce qui donne les produits, $b^2 - c^2$, $b^4 - c^4$, $3(b + c)$; le produit demandé est donc

$$(b^2 - c^2)a^3 + (b^4 - c^4)a^2 + 3(b + c)a.$$

Division algébrique.

21. La DIVISION algébrique a pour but, connaissant le produit de deux facteurs nommé DIVIDENDE, et l'un de ces facteurs appelé DIVISEUR, de trouver l'autre facteur nommé QUOTIENT.

Toutes les règles relatives à la division se déduiront de celles qui ont été données pour la multiplication; car on obtiendra le quotient en cherchant par quelle quantité il faut multiplier le diviseur, pour obtenir le dividende.

Quand tous les facteurs du diviseur sont en évidence dans le dividende, on obtient immédiatement le quotient en supprimant ces facteurs dans le dividende.

De la division des monomes.

1°. La règle des signes est la même que dans la multiplication ; quand le dividende et le diviseur sont de même signe , le quotient a le signe + ; lorsque le dividende et le diviseur ont des signes contraires , le quotient a le signe —.

$$\text{Ainsi, } \frac{+6}{+2} = \frac{-6}{-2} = +3, \quad \frac{+6}{-2} = \frac{-6}{+2} = -3.$$

2°. La règle des coefficients est de diviser le coefficient du dividende par celui du diviseur ; le résultat exprime le coefficient du quotient.

3°. La règle des lettres est de supprimer dans le dividende tous les facteurs algébriques du diviseur. Ces facteurs monomes sont toujours en évidence.

Ainsi, le quotient de $abcd$ par ab est cd .

4°. Dans la division de deux puissances d'une même quantité, la règle des exposans est de retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende ; le reste exprime l'exposant du quotient. Cela résulte de (3°).

$$\text{Ainsi, } \frac{a^5}{a^2} = \frac{a^3 \times a^2}{a^2} = a^3 = a^{5-2}.$$

On déduit de ces règles que

$$\begin{aligned} \frac{+12a^6bc^3}{+3a^2bc} &= +4a^4c^2, & \frac{-12a^6bc^3}{-3a^2bc} &= +4a^4c^2 \\ \frac{-12a^6bc^3}{+3a^2bc} &= -4a^4c^2, & \frac{+12a^6bc^3}{-3a^2bc} &= -4a^4c^2. \end{aligned}$$

Lorsque le dividende ne renferme pas tous les facteurs du diviseur, le quotient prend la forme fractionnaire, et on le simplifie en supprimant les facteurs communs au dividende et au diviseur. Ainsi,

$$\frac{abcde}{acmn} = \frac{bde}{mn}, \quad \frac{60a^3b^4cd^2}{80ab^2d^1} = \frac{20ab^4d^2 \times 3a^2c}{20ab^2d^2 \times 4b^2d^1} = \frac{3a^2c}{4b^2d^1}.$$

De la division des polynomes.

22. La division des monomes ne pouvant plus offrir de difficulté, occupons-nous des polynomes.

On doit toujours considérer le dividende comme un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs.

Il est donc naturel d'examiner quelle est la forme d'un produit, afin d'en déduire le moyen de le décomposer. En voici un exemple :

Multiplication ou formation d'un produit.

$$\begin{array}{r}
 a^5 - 3ba^4 \\
 a^2 - 2ba - b^2 \\
 \hline
 a^5 - 3ba^4 \\
 - 2ba^4 + 6b^2a^3 \\
 \hline
 - b^2a^3 + 3b^3a^2 \\
 \hline
 a^5 - 5ba^4 + 5b^2a^3 + 3b^3a^2
 \end{array}$$

Division ou décomposition d'un produit.

$$\begin{array}{r}
 a^5 - 5ba^4 + 5b^2a^3 + 3b^3a^2 \quad \left| \begin{array}{l} a^3 - 3ba^2 \\ a^2 - 2ba - b^2 \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{1}^{\text{er}} \text{ reste } - 2ba^4 + 5b^2a^3 + 3b^3a^2 \\
 \phantom{\text{1}^{\text{er}} \text{ reste }} 2ba^4 - 6b^2a^3 \\
 \hline
 \text{2}^{\text{e}} \text{ reste } - b^2a^3 + 3b^3a^2 \\
 \phantom{\text{2}^{\text{e}} \text{ reste }} + b^2a^3 - 3b^3a^2 \\
 \hline
 \text{le 3}^{\text{e}} \text{ reste est } 0
 \end{array}$$

La comparaison du produit avec ses facteurs, fait voir que ces trois polynomes étant ordonnés par rapport à a , le 1^{er} terme a^5 du produit total est le produit du 1^{er} terme a^3 du multiplicande par le 1^{er} terme a^2 du multiplicateur; que le dernier terme $3b^3a^2$ de ce produit résulte de la multiplication du dernier terme $-3ba^2$ du multiplicande, par le dernier terme $-b^2$ du multiplicateur, et que les autres termes du produit total peuvent résulter de la réduction de plusieurs termes semblables des produits partiels.

Par conséquent, la division du 1^{er} terme a^5 du dividende, par le 1^{er} terme a^3 du diviseur, fournit le 1^{er} terme a^2 du quotient; tandis que la division d'un autre terme du dividende par un terme du diviseur, peut ne pas donner un terme du quotient.

Le dividende exprimant la somme des produits partiels du diviseur par les différens termes du quotient, si l'on retranche du dividende, le produit $a^5 - 3ba^4$ du diviseur $a^3 - 3ba^2$ par le 1^{er} terme a^2 du quotient; le reste $-2ba^4 + 5b^2a^3 + 3b^3a^2$ sera le produit du diviseur par les autres termes du quotient.

On calcule ce reste par la méthode indiquée (p. 14), en plaçant sous le dividende les termes $+a^5$, $-3ba^4$ de la quantité à soustraire pris avec des signes contraires, et en ajoutant $-a^5+3ba^4$ au dividende; ce qui revient à poser sous le dividende les termes du produit de a^5-3ba^4 par a^4 , en affectant du signe $-$ le produit de deux termes de mêmes signes, et en donnant le signe $+$ au produit de deux termes de signes contraires. On effectue ensuite les réductions, et on ordonne le résultat.

Connaissant le 1^{er} terme a^5 du quotient, et le 1^{er} reste, pour déterminer les autres termes du quotient, on observe que le 1^{er} reste exprime le produit du diviseur par la somme des termes inconnus du quotient, et que par conséquent, le 1^{er} terme $-2ba^4$ du 1^{er} reste est le produit du 1^{er} terme a^5 du diviseur par le 1^{er} des termes inconnus du quotient; on obtiendra donc le 1^{er} de ces termes, c'est-à-dire le 2^e terme du quotient demandé, en divisant le 1^{er} terme $-2ba^4$ du 1^{er} reste, par le 1^{er} terme a^5 du diviseur; ce qui fournit le 2^e terme $-2ba$ du quotient demandé.

Enfin, pour trouver le 3^e terme du quotient, qui est le dernier, on retranche du 1^{er} reste, le produit du diviseur par le 2^e terme $-2ba$ du quotient, le 2^e reste est le produit du diviseur par le dernier terme du quotient; de sorte que la division du 1^{er} terme $-b^5a^3$ de ce 2^e reste, par le 1^{er} terme a^5 du diviseur, fournit le dernier terme $-b^5$ du quotient. Retranchant du 2^e reste le produit du diviseur par $-b^5$, le reste zéro fait voir que le quotient obtenu $a^5-2ba-b^5$ est exact; car on est parvenu à ce reste, en retranchant du dividende et des restes, les produits partiels du diviseur par les termes a^5 , $-2ba$, $-b^5$, du quotient; ce qui revient à ôter du dividende, le produit du diviseur par $a^5-2ba-b^5$; le reste étant nul, le dividende est le produit exact du diviseur par $a^5-2ba-b^5$.

23. En général, le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, si on ordonne le dividende et le diviseur par rapport à une lettre, et si l'on conçoit le quotient ordonné de la même manière, le 1^{er} terme du dividende sera le produit du 1^{er} terme du diviseur, par le 1^{er} terme du quotient (n^o 19).

La division du 1^{er} terme du dividende , par le 1^{er} terme du diviseur , donnera donc toujours le 1^{er} terme du quotient.

Or , le dividende est la somme des produits partiels du diviseur par tous les termes du quotient. Par conséquent , si l'on retranche du dividende , le produit du diviseur par le 1^{er} terme du quotient , le reste sera le produit du diviseur par tous les autres termes du quotient. La division du 1^{er} terme de ce reste , par le 1^{er} terme du diviseur , donnera donc le 2^e terme du quotient ; et ainsi de suite.

24. *Dans tout le cours des opérations relatives à la division , le dividende est constamment égal au produit du diviseur par le quotient obtenu , augmenté du reste qui correspond à ce quotient ; car on a trouvé le reste , en retranchant du dividende et des restes successifs , les produits partiels du diviseur par chacun des termes du quotient obtenu , ce qui revient à retrancher du dividende , le produit du diviseur par le quotient obtenu.*

Il en résulte que *lorsqu'on parvient à un reste nul , le quotient obtenu est exact ; car le dividende est alors égal au produit du diviseur par ce quotient.*

25. Les raisonnemens précédens conduisent à cette règle générale : *Pour calculer le quotient de la division de deux polynomes l'un par l'autre , ordonnez-les par rapport à une même lettre. Divisez le 1^{er} terme du dividende par le 1^{er} terme du diviseur ; le résultat sera le 1^{er} terme du quotient. Retranchez du dividende , le produit du diviseur par le 1^{er} terme du quotient , vous obtiendrez un 1^{er} reste. Divisez le 1^{er} terme de ce 1^{er} reste , par le 1^{er} terme du diviseur ; le résultat sera le 2^e terme du quotient ; et ainsi de suite. Lorsque vous parviendrez au reste zéro , le quotient obtenu sera exact ; et si vous n'avez pas commis de faute de calcul , le diviseur multiplié par ce quotient donnera un produit égal au dividende.*

Pour soustraire les produits partiels du diviseur , par chaque terme du quotient , on écrit les termes de ces produits , en changeant les signes $+$ en $-$ et les signes $-$ en $+$; on effectue ensuite les réductions , et on ordonne le reste.

Si l'on applique cette règle à la décomposition du produit qui

a été formé (page 22), on trouvera que le quotient de

$3a^5 - 6ba^4 + 2b^2a^3 - 2b^3a^2 - b^4a + 4b^5$ par $a^3 - ba^2 + b^2a - b^3$ est $3a^2 - 3ba - 4b^2$. Voici le détail du calcul :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 3a^5 - 6ba^4 + 2b^2a^3 - 2b^3a^2 - b^4a + 4b^5 \\
 - 3a^5 + 3ba^4 - 3b^2a^3 + 3b^3a^2 \\
 \hline
 1^{\text{er}} \text{ reste } -3ba^4 - b^2a^3 + b^3a^2 - b^4a + 4b^5 \\
 \phantom{1^{\text{er}} \text{ reste }} + 3ba^4 - 3b^2a^3 + 3b^3a^2 - 3b^4a \\
 \hline
 2^{\text{e}} \text{ reste } -4b^2a^3 + 4b^3a^2 - 4b^4a + 4b^5 \\
 \phantom{2^{\text{e}} \text{ reste }} + 4b^2a^3 - 4b^3a^2 + 4b^4a - 4b^5 \\
 \hline
 3^{\text{e}} \text{ reste } 0
 \end{array} & \begin{array}{l}
 3a^5 - ba^4 + b^2a^3 - b^3 \\
 \hline
 3a^2 - 3ba - 4b^2
 \end{array}
 \end{array}$$

La division du 1^{er} terme $3a^5$ du dividende, par le 1^{er} terme a^3 du diviseur, fournit le 1^{er} terme $3a^2$ du quotient.

Pour soustraire du dividende, le produit du diviseur par le 1^{er} terme du quotient, on écrit les termes de ces produits en changeant les signes $+$ en $-$ et les signes $-$ en $+$. On effectue les réductions des termes semblables, ce qui fournit le 1^{er} reste.

La division du 1^{er} terme $-3ba^4$ de ce reste, par le 1^{er} terme a^3 du diviseur, donne le 2^e terme $-3ba$ du quotient.

On retranche du 1^{er} reste le produit du diviseur par $-3ba$, ce qui conduit au 2^e reste.

La division du 1^{er} terme $-4b^2a^3$ de ce reste, par le 1^{er} terme a^3 du diviseur, détermine le 3^e terme $-4b^2$ du quotient.

On retranche du 2^e reste le produit du diviseur par $-4b^2$, le reste zéro fait voir que le quotient obtenu $3a^2 - 3ba - 4b^2$ est exact.

REMARQUE. Quand les coefficients de la lettre par rapport à laquelle on ordonne, sont des polynômes, la recherche du coefficient d'un terme du quotient, peut conduire à diviser deux polynômes l'un par l'autre.

EXEMPLE. Soit proposé de trouver le quotient de

$$\begin{array}{l}
 (b^3 - 1)a^2 - (b^4 + b^2 - 2)a^2 + (4b^3 + 3b + 2)a - 3(b + 1), \\
 \text{par} \qquad \qquad \qquad (b - 1)a^2 - (b - 1)a + 3.
 \end{array}$$

Pour obtenir le 1^{er} terme du quotient, il faut diviser le 1^{er}

terme $(b^3 - 1)a^3$ du dividende, par le 1^{er} terme $(b - 1)a^3$ du diviseur; ce qui conduit à diviser $b^3 - 1$ par $b - 1$, le quotient étant $b^2 + b + 1$, le 1^{er} terme du quotient total demandé est $(b^2 + b + 1)a$, car a^3 divisé par a^3 donne a .

On retranche du dividende, le produit du diviseur par le 1^{er} terme du quotient, ce qui fournit le 1^{er} reste

$$-(b^3 - 1)a^3 + (b^3 - 1)a - 3(b + 1).$$

La division du 1^{er} terme $-(b^3 - 1)a^3$ de ce reste, par le 1^{er} terme $(b - 1)a^3$ du diviseur, fournit le 2^e terme $-(b + 1)$ du quotient. On retranche du 1^{er} reste, le produit du diviseur par le 2^e terme du quotient; le reste étant nul, le quotient obtenu $(b^2 + b + 1)a - (b + 1)$ est exact.

26. Suivant que les dividendes partiels et le diviseur sont ordonnés par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une lettre, le quotient est ordonné de la même manière.

Pour que les exposans d'une lettre diminuent dans les restes successifs, il faut ordonner le dividende, le diviseur et les restes, par rapport aux puissances décroissantes de cette lettre, et réunir en un seul terme tous les monomes affectés de la même puissance de cette lettre. On parvient alors nécessairement à un reste, dans lequel le plus fort exposant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné est moindre que dans le diviseur; et on dit que ce dernier reste est *moindre* que le diviseur (*page 9*).

Quand le dividende, le diviseur et le quotient, étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre x , on parvient à un terme du quotient tel que l'exposant de x , dans ce terme, est moindre que le plus petit exposant de x dans le dividende, diminué du plus petit exposant de x dans le diviseur, on est certain qu'on ne parviendra pas à un reste nul.

En effet; si le quotient étant exact, les derniers termes du dividende, du diviseur et du quotient, sont ax^p , Cx^q , et γx^r , on aura (*n° 19, page 25*)

$$\alpha x^p = \zeta x^i \times \gamma x^r = \zeta \gamma x^{i+r};$$

les coefficients α, ζ, γ , ne contenant pas x , il faut que $p = i + r$, d'où $r = p - i$. Le quotient, lorsqu'il est exact, ne peut donc pas contenir un exposant de x moindre que $p - q$. Ce qui démontre le principe énoncé.

27. *Lorsqu'un polynome a un diviseur indépendant de la lettre par rapport à laquelle il est ordonné, ce diviseur divise exactement chacun des coefficients de cette lettre. Cela résulte évidemment du principe du n° 20.*

On peut d'ailleurs le démontrer directement. En effet; si une quantité δ , indépendante de a , divise $A + Ba + Ca^2 + \text{etc.}$, le quotient q de cette division sera nécessairement de la forme $\alpha + \zeta a + \gamma a^2 + \text{etc.}$, car δ ne contenant pas a , il n'y a qu'un quotient de cette forme qui multiplié par δ puisse reproduire le dividende. On a donc

$$A + Ba + Ca^2 + \text{etc.} = (\alpha + \zeta a + \gamma a^2 + \text{etc.}) \times \delta = \alpha \delta + \zeta \delta a + \gamma \delta a^2 + \text{etc.}$$

Mais, les polynomes $A + Ba + Ca^2 + \text{etc.}$, $\alpha \delta + \zeta \delta a + \gamma \delta a^2 + \text{etc.}$ doivent être les mêmes; il faut donc que

$$A = \alpha \delta, \quad B = \zeta \delta, \quad C = \gamma \delta, \quad \text{etc.}$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

Par conséquent : *Pour diviser un polynome par une quantité indépendante de la lettre par rapport à laquelle ce polynome est ordonné, il suffit d'effectuer la division sur chacun des coefficients de cette lettre.*

EXEMPLE. Soit proposé de trouver le quotient de

$$(b^3 - c^3)a^3 + (b^4 - c^4)a^2 + 3(b + c)a \quad \text{par} \quad b + c.$$

On divise chacun des coefficients $b^3 - c^3$, $b^4 - c^4$, $3(b + c)$, par $b + c$; les quotiens étant $b - c$, $b^3 - cb^2 + c^2b - c^3$ et $+3$, le quotient total est $(b - c)a^3 + (b^3 - cb^2 + c^2b - c^3)a^2 + 3a$.

28. Quand le dividende étant exactement divisible par le diviseur, on n'ordonne pas les dividendes partiels et le diviseur, la division d'un terme quelconque de chaque dividende, par un terme du diviseur, peut ne pas fournir un terme du véritable

quotient. Mais si, parvenu à un reste quelconque, on ordonne ce reste et le diviseur, et si l'on continue ensuite la division, d'après la règle du n° 25, l'opération se terminera, et le quotient total, réduit à sa plus simple expression, fournira le véritable quotient.

En effet, soient A et B deux polynomes quelconques, divisibles l'un par l'autre; désignons par Q le quotient exact de A par B. Si l'on divise A par B, sans ordonner, on trouvera un quotient Q' et un reste R, on aura $A = BQ' + R$; d'où

$$R = A - BQ' = BQ - BQ' = B(Q - Q').$$

Ordonnant R et B, la division de R par B, effectuée d'après la règle du n° 25, conduira au quotient exact $Q - Q'$; le quotient total sera donc $Q' + Q - Q'$; il se réduit à Q. Ce qui démontre le principe énoncé.

On voit donc qu'on ordonne le dividende et le diviseur, afin de parvenir directement à la plus simple expression du quotient total.

29. Lorsqu'on divise les binomes $x^3 - a^3$, $x^3 - a^3$, $x^4 - a^4$, par $x - a$, on trouve

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2, \quad \frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2,$$

$$\frac{x^4 - a^4}{x - a} = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3.$$

On peut en conclure, par analogie, que m désignant un nombre entier positif quelconque, on a

$$(1) \dots \frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-2}x + a^{m-1} (*).$$

Il est d'ailleurs facile de vérifier l'exactitude de la formule (1),

(*) Le quotient $x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-2}x + a^{m-1}$, renferme m termes; les points tiennent la place des termes compris entre a^2x^{m-3} et $a^{m-2}x$; ces termes sont soumis à la même loi que les premiers, c'est-à-dire qu'en passant d'un terme au suivant, l'exposant de a augmente de l'unité, et celui de x diminue de l'unité; il en résulte que le quotient est un polynome homogène du m - 1^{er} degré.

car en multipliant le quotient

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1}$$

par le diviseur $x-a$, le produit se réduit au dividende $x^m - a^m$.

La relation (1) ayant lieu quel que soit a , on y peut changer a en $-a$; les puissances impaires de a changeront de signe, et les puissances paires ne changeront pas (n° 16).

Par conséquent, selon que m est un nombre pair ou impair, la formule (1) devient

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots - a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x - a^{m-1},$$

$$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

Pour démontrer directement que $x^m - a^m$ est divisible par $x - a$, on effectue le produit de $x^m - a^m$ par $x + a$, et l'on trouve que

$$(x^m - a^m) \times (x + a) = (x^{m+1} - a^{m+1}) + ax(x^{m-1} - a^{m-1});$$

$$\text{d'où (2) } (x^{m+1} - a^{m+1}) = (x^m - a^m)(x + a) - ax(x^{m-1} - a^{m-1}).$$

L'égalité (2) démontre que si $x^{m-1} - a^{m-1}$ et $x^m - a^m$ sont divisibles par $x - a$, le binôme $x^{m+1} - a^{m+1}$ sera également divisible par $x - a$.

Or, il est facile de s'assurer, en effectuant la division, que $x - a$ et $x^2 - a^2$ sont divisibles par $x - a$; donc $x^3 - a^3$ sera divisible par $x - a$. D'après le même principe, $x^2 - a^2$ et $x^3 - a^3$ étant divisibles par $x - a$, le binôme $x^4 - a^4$ sera divisible par $x - a$. Et ainsi de suite.

Le binôme $x^m - a^m$ est donc divisible par $x - a$.

On peut en conclure que selon que m est un nombre pair ou impair, $x + a$ divise exactement $x^m - a^m$ ou $x^m + a^m$; car $x^m - a^m$ étant divisible par $x - a$, quel que soit le signe de a , si l'on change a en $-a$, le binôme $x^m - (-a)^m$ sera divisible par $x + a$, et suivant que m est pair ou impair, $x^m - (-a)^m$ se réduit à $x^m - a^m$ ou à $x^m + a^m$.

REMARQUE. Lorsqu'on connaît les quotiens P, Q, de $x^m - a^m$ et $x^{m-1} - a^{m-1}$, par $x - a$, la relation (2) donne le moyen de

former le quotient R de $x^{m+1} - a^{m+1}$ par $x - a$; car en divisant tous les termes de (2) par $x - a$, on trouve

$$R = P \times (x + a) - Q \times ax.$$

Les preuves des quatre règles s'exécutent comme en Arithmétique.

§ III. DES FRACTIONS LITTÉRALES.

30. Lorsque le dividende ne contient pas tous les facteurs du diviseur, la division ne peut s'effectuer exactement. Le quotient total est composé d'un entier, et d'une fraction dont le numérateur est le dernier reste et dont le dénominateur est le diviseur.

On devra toujours considérer une fraction algébrique comme indiquant le quotient de la division du numérateur par le dénominateur.

Les propriétés qui ont été démontrées, en Arithmétique, sur les fractions, conviennent aux fractions littérales. Mais, comme les raisonnemens dont on a fait usage paraissent exiger que le numérateur et le dénominateur soient des nombres entiers, et comme d'ailleurs cette condition n'a pas lieu pour les fractions littérales, il est convenable de démontrer généralement ces propriétés.

Pour y parvenir, nous allons d'abord faire voir qu'une fraction ne change pas de valeur, quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par une même quantité.

En effet; soit $\frac{a}{b} = q$.

Le quotient de a par b étant q , le dividende a est égal au produit bq du diviseur b par le quotient q ; de sorte que $a = bq$. On en déduit,

$$a \times n = bq \times n = bn \times q, \quad q = \frac{an}{bn}.$$

Donc $\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$ et $\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$.

Ce qui démontre le principe énoncé.

Il est facile de déduire de ce principe les propriétés suivantes :

1°. Lorsqu'on aperçoit des facteurs communs aux deux termes d'une fraction, on la simplifie, sans changer sa valeur, en supprimant ces facteurs communs.

$$\text{Ainsi, } \frac{abcden}{bdmnp} = \frac{ace}{mp}, \quad \frac{12a^3b^5cd^3m}{15a^2b^5cdn} = \frac{4ad^3m}{5b^3n}.$$

2°. Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, sans changer leurs valeurs, il suffit de multiplier les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.

Par exemple, les fractions

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{e}{f}, \quad \frac{m}{n}, \quad \frac{p}{q}$$

réduites au même dénominateur, deviennent

$$\frac{adfnq}{bdfnq}, \quad \frac{cbfnq}{bdfnq}, \quad \frac{ebdnq}{bdfnq}, \quad \frac{mbdfq}{bdfnq}, \quad \frac{pbdfn}{bdfnq}.$$

3°. Le plus petit dénominateur commun à plusieurs fractions, est la plus petite quantité divisible par chacun des dénominateurs de ces fractions, (Arithm. , n° 54, page 52).

1^{er} EXEMPLE. Soient les fractions

$$\frac{a}{b^2c^3}, \quad \frac{f}{b^1c^2d}, \quad \frac{e}{bc^2}.$$

En les réduisant à leur plus petit dénominateur commun b^4c^3d , elles deviennent

$$\frac{ab^3d}{b^4c^3d}, \quad \frac{fcb}{b^4c^3d}, \quad \frac{eb^3cd}{b^4c^3d}.$$

2^e EXEMPLE. Soient les fractions

$$\frac{11a}{72b^2c^3}, \quad \frac{7f}{60b^1c^2d}, \quad \frac{3e}{175bc^2}.$$

Le plus petit nombre divisible par 72, 60 et 175 étant 12600 (Arithm. , n° 51), le plus petit dénominateur commun est $12600b^2c^3d$; et les fractions proposées, réduites à ce dénomi-

nateur commun, deviennent

$$\frac{1925 ab^2d}{12600 b^1c^1d}, \quad \frac{1470 cf}{12600 b^1c^1d}, \quad \frac{216 b^1cde}{12600 b^1c^1d}$$

4°. Pour transformer un entier en une fraction équivalente qui ait un dénominateur donné, on multiplie l'entier par le dénominateur donné; le produit exprime le numérateur de la fraction demandée; car

$$a = \frac{a \times b}{b}.$$

5°. Pour trouver les entiers contenus dans une expression fractionnaire, on effectue la division du numérateur par le dénominateur, et l'on continue l'opération jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste moindre que le diviseur.

EXEMPLE. Soit l'expression fractionnaire $\frac{a^3+3}{a+1}$.

On divise a^3+3 par $a+1$; ce qui fournit le quotient entier a^2-a+1 et le reste 2. De sorte que

$$\frac{a^3+3}{a+1} = a^2-a+1 + \frac{2}{a+1}.$$

31. L'ADDITION de plusieurs fractions de même dénominateur s'effectue en formant la somme des numérateurs, et en donnant pour dénominateur à cette somme celui des fractions proposées.

En effet; soient $\frac{b}{a} = m$, $\frac{c}{a} = n$, $\frac{d}{a} = p$, etc.

on aura, $b = am$, $c = an$, $d = ap$, etc.;

$b+c+d+\text{etc.} = am+an+ap+\text{etc.} = a(m+n+p+\text{etc.})$;

d'où $m+n+p+\text{etc.} = \frac{b+c+d+\text{etc.}}{a}$.

Ce qui démontre la propriété énoncée.

Lorsqu'une quantité est composée d'un entier et d'une fraction, pour la convertir en une seule expression fractionnaire équivalente, on ajoute au numérateur de la fraction, le produit du dénominateur par l'entier, et on affecte cette somme du dénominateur de la fraction. En effet, on a

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c} = \frac{b+c \times a}{c}.$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

On en déduit que

$$a^3 - a + 1 + \frac{2}{a+1} = \frac{2+(a+1)(a^3-a+1)}{a+1} = \frac{a^3+3}{a+1}.$$

La soustraction de deux fractions de même dénominateur s'effectue en prenant la différence entre les numérateurs et en l'affectant du dénominateur commun.

En effet, soient $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$. On aura

$$b = ap, c = aq, b - c = ap - aq = a(p - q), p - q = \frac{b-c}{a}.$$

Pour ajouter ou soustraire des fractions qui ont des dénominateurs différents, on les réduit d'abord au même dénominateur, et on opère ensuite comme on vient de l'indiquer.

On trouve ainsi que la somme des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, est $\frac{ad+bc}{bd}$, et que leur différence est $\frac{ad-bc}{bd}$.

Pour additionner les fractions

$$\frac{2a-5}{3(a-1)}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{5(4-3a)}{4(a-1)}, \quad \frac{4}{15},$$

on les réduit d'abord à leur plus petit dénominateur commun ; elles deviennent

$$\frac{20(2a-5)}{60(a-1)}, \quad \frac{150(a-1)}{60(a-1)}, \quad \frac{75(4-3a)}{60(a-1)}, \quad \frac{16(a-1)}{60(a-1)},$$

et en ajoutant les numérateurs, on trouve que la somme des fractions proposées se réduit à $\frac{34-19a}{60(a-1)}$.

Le produit de plusieurs fractions est exprimé par une fraction, dont le numérateur est le produit des numérateurs des fractions proposées, et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs des mêmes fractions.

En effet; soient

$$\frac{a}{b} = m, \quad \frac{c}{d} = n, \quad \frac{e}{f} = p;$$

on aura $a = bm, \quad c = dn, \quad e = fp,$

$$a \times c \times e = bm \times dn \times fp = mnp \times bdf; \text{ d'où } mnp = \frac{ace}{bdf}.$$

La démonstration serait la même pour un plus grand nombre de fractions.

On en déduit que *le produit d'une fraction par un entier, ou d'un entier par une fraction, s'obtient en multipliant le numérateur de la fraction par l'entier et en conservant le dénominateur*; car c étant la même chose que $\frac{c}{1}$, on a

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{a \times c}{b \times 1} = \frac{a \times c}{b},$$

$$c \times \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{c \times a}{1 \times b} = \frac{ac}{b}.$$

1^{re} REMARQUE. Quand le dénominateur de la fraction qu'il s'agit de multiplier par un entier est divisible par cet entier, on obtient une expression plus simple du produit demandé, en divisant le dénominateur par l'entier; car

$$\frac{a}{bc} \times c = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

2^e REMARQUE. Lorsqu'il s'agit de faire le produit d'entiers et de fractions, on applique la règle générale en considérant les entiers comme les numérateurs de fractions ayant pour dénominateurs l'unité.

$$\text{Ainsi,} \quad \frac{a}{b} \times c \times \frac{d}{e} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} \times \frac{d}{e} = \frac{acd}{be}.$$

La division d'une fraction par une fraction s'effectue en multipliant le dividende par la fraction diviseur renversée.

En effet, soit proposé de diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$; on réduira d'abord

ces fractions au même dénominateur, et la question sera ramenée à diviser $\frac{ad}{bd}$ par $\frac{bc}{bd}$. Or, le quotient de cette division ne changera pas en multipliant le dividende et le diviseur par bd , donc le quotient demandé est le même que celui de ad par bc ; c'est-à-dire $\frac{ad}{bc}$, ou $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$. Ce qui démontre la règle énoncée.

D'après cette règle : *Pour diviser une fraction par un entier, il suffit de multiplier le dénominateur de la fraction par l'entier, car*

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}.$$

Pour diviser l'une par l'autre deux fractions de même dénominateur, il suffit de diviser le numérateur de la première par celui de la seconde, car

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{bc} = \frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}.$$

Pour diviser deux fractions de même numérateur, il suffit de diviser le dénominateur de la seconde par celui de la première, car

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{a} = \frac{ad}{ba} = \frac{da}{ba} = \frac{d}{b}.$$

Enfin, le quotient de l'unité par une fraction est égal à cette fraction renversée, car

$$1 : \frac{c}{d} = \frac{1}{1} : \frac{c}{d} = \frac{1}{1} \times \frac{d}{c} = \frac{1 \times d}{1 \times c} = \frac{d}{c}.$$

REMARQUE. Lorsque dans la division d'une fraction par un entier, le numérateur est divisible par l'entier, on obtient une expression plus simple du quotient, en divisant le numérateur par l'entier, car

$$\frac{ab}{c} : b = \frac{ab}{c} : \frac{b}{1} = \frac{ab}{c} \times \frac{1}{b} = \frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}.$$

Lorsque les quantités qu'on veut multiplier ou diviser les unes par les autres, sont composées d'un entier et d'une fraction,

on transforme d'abord chacune de ces quantités en une seule fraction équivalente (n° 31), et on opère ensuite sur ces dernières fractions d'après les règles précédentes.

Ainsi, pour calculer le produit ou le quotient de $a + \frac{b}{c}$ par $m + \frac{n}{p}$, on transforme chacune de ces quantités en une seule fraction équivalente; ce qui conduit à opérer sur les fractions $\frac{ac+b}{c}$, $\frac{mp+n}{p}$. Le produit de ces fractions est

$$\frac{(ac+b)(mp+n)}{cp}, \quad \text{ou} \quad \frac{acmp + bmp + acn + bn}{cp},$$

et le quotient de la 1^{re} par la 2^e est

$$\frac{(ac+b)p}{(mp+n)c}, \quad \text{ou} \quad \frac{acp + bp}{mpc + nc}.$$

On parvient à une expression plus compliquée du produit de $a + \frac{b}{c}$ par $m + \frac{n}{p}$, en multipliant ces deux binômes l'un par l'autre. Le résultat est $am + \frac{bm}{c} + \frac{an}{p} + \frac{bn}{cp}$.

32. *Selon que les deux termes d'une fraction sont de même signe ou de signes contraires, cette fraction est positive ou négative (n° 21).* Par conséquent : une fraction conserve sa valeur et son signe, quand on change les signes de ses deux termes; et elle change de signe, sans changer de valeur absolue, quand on ne change le signe que du numérateur ou du dénominateur. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{+a}{+b} &= \frac{-a}{-b}, \quad \frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}, \quad \frac{a-b+c}{c-d+e} = \frac{-a+b-c}{-c+d-e}, \\ \frac{a-b+c}{c-d+e} &= -\left(\frac{-a+b-c}{c-d+e}\right) = -\left(\frac{a-b+c}{-c+d-e}\right). \end{aligned}$$

Si l'on combine cette propriété avec celle du n° 16, on verra que lorsque le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont décomposés en facteurs, cette fraction conserve sa valeur

quand on change les signes d'un nombre pair de facteurs, et que si le nombre total des facteurs qui changent de signes (tant dans le numérateur que dans le dénominateur) est impair, la valeur de la fraction ne fera que changer de signe. Ainsi,

$$\frac{(a-b)(c-d)(e-f)}{(m-n)(p-q)(r-s)} = \frac{(-a+b)(c-d)(e-f)}{(-m+n)(p-q)(r-s)}$$

$$\frac{(a-b)(c-d)(e-f)}{(m-n)(p-q)(r-s)} = -\frac{(-a+b)(-c+d)(e-f)}{(-m+n)(p-q)(r-s)}.$$

33. Les raisonnemens qui ont été employés pour faire voir que dans la division de deux puissances d'une même quantité, il faut retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende, supposent que l'exposant du diviseur est moindre que celui du dividende. Nous allons faire connaître les conventions à l'aide desquelles cette règle s'applique au cas où l'exposant du diviseur égale ou surpasse celui du dividende.

1°. Quand l'exposant du diviseur est égal à celui du dividende, la règle énoncée donne

$$\frac{b^p}{b^p} = b^{p-p} = b^0. \text{ Or, } \frac{b^p}{b^p} = 1.$$

Par conséquent, pour que cette règle convienne au cas actuel, il suffit de supposer que b^0 est égal à l'unité. Cette convention peut être considérée comme une conséquence de la définition que nous avons donnée de l'exposant; car d'après cette définition, la quantité b^m exprimant un produit composé du facteur 1 et de m facteurs égaux à b , ce produit se réduit à l'unité quand l'exposant de b devient zéro.

Ainsi, toute quantité élevée à la puissance zéro est égale à l'unité, car on peut la considérer comme le quotient d'une division, dans laquelle le diviseur est égal au dividende.

2°. Lorsque l'exposant du diviseur est plus grand que celui du dividende, la règle énoncée donne

$$\frac{b^p}{b^{p+q}} = b^{p-(p+q)} = b^{-q}.$$

Or,
$$\frac{b^p}{b^{p+q}} = \frac{b^p \times 1}{b^p \times b^q} = \frac{1}{b^q}.$$

Par conséquent, pour que cette règle convienne au cas actuel, il suffit de supposer que $b^{-q} = \frac{1}{b^q}$, c'est-à-dire que l'exposant négatif indique une division. Il est permis d'établir cette convention, car elle n'est contraire à aucune des précédentes.

Ainsi, dans l'expression b^m , l'exposant positif m , indiquant que l'unité est multipliée par la $m^{\text{ième}}$ puissance de b , dans l'expression b^{-m} l'exposant négatif $-m$ indique au contraire que l'unité est divisée par la $m^{\text{ième}}$ puissance de b .

34. *Les règles qui ont été données (n^{os} 15 et 21) pour effectuer la multiplication et la division de deux puissances d'une même quantité, conviennent aux exposans entiers négatifs.*

Pour le démontrer, il suffit de transformer les exposans négatifs en exposans positifs, au moyen de la convention précédente.

Par exemple,

$$a^{+m} \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$\frac{a^{-m}}{a^{+n}} = a^{-m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

REMARQUE. Toutes les règles précédentes conviennent au cas où l'on substituerait des polynomes aux monomes représentés par des lettres. On trouve de cette manière que

$$\frac{(a-b+c)^{-3}}{(a-b+c)^{-5}} = (a-b+c)^{-3+5} = (a-b+c)^2,$$

et que le produit de

$$\text{est } \frac{3a^{-5}b^3c^3d^4}{(a+b)^{-m} \times (c^2+x^2)} \text{ par } \frac{a^5b^{-3}c^{-2}d^{-4}}{(a+b)^{m-3} (c^2+x^2)^{4-n}}$$

$$\text{ou } \frac{3a^{-3}b^{-3}c}{(a+b)^{-3} (c^2+x^2)^{5-n}} \text{ ou } \frac{3c(a+b)^3 (c^2+x^2)^{n-5}}{a^3b^3}.$$

Si l'on veut mettre ce dernier résultat sous une forme entière, on écrira

$$3a^{-3}b^{-3}c(a+b)^3 (c^2+x^2)^{n-5}.$$

35. Nous allons faire voir actuellement comment on peut interpréter les différentes formes que prend une fraction $\frac{a}{c}$, lorsqu'on établit des relations particulières entre les quantités que renferment les deux termes de cette fraction.

1°. Si $a = 0$, la valeur de $\frac{a}{c}$ sera égale à zéro ; car le quotient zéro multiplié par le diviseur c , donne le dividende zéro.

2°. Quand a et c sont nuls, la fraction devient $\frac{0}{0}$, et a une valeur *indéterminée*, c'est-à-dire qu'on peut prendre un nombre quelconque pour le quotient de 0 par 0 ; car le diviseur 0, multiplié par un nombre quelconque, reproduit le dividende 0.

REMARQUE. On verra par la suite qu'une fraction peut prendre eu apparence la forme $\frac{0}{0}$, et avoir cependant une valeur déterminée.

Par exemple, la fraction $\frac{(a^2 - b^2)c}{(a - b)d}$ prend la forme $\frac{0}{0}$ quand on fait $a = b$, et cependant sa véritable valeur, dans cette hypothèse, est $\frac{2ac}{d}$, puisqu'on a $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$.

3°. Lorsque a désignant un nombre positif donné, c est une quantité positive qui diminue continuellement en approchant *indéfiniment* de zéro, la valeur de $\frac{a}{c}$ reste positive et augmente indéfiniment ; enfin quand c se réduit à zéro, c'est-à-dire quand c devient moindre que toute quantité assignable, la valeur de $\frac{a}{c}$ devient plus grande que toute quantité assignable ; cette *limite* de l'accroissement des quantités positives, est ce qu'on nomme l'*infiniment grand* positif ou l'*infini* ; on la représente par le signe ∞ .

Par exemple, si l'on conçoit que le dénominateur c de la fraction $\frac{a}{c}$ prend successivement les valeurs de dix en dix fois

plus petites ,

$$1, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \quad \text{etc.},$$

les valeurs correspondantes de $\frac{a}{c}$ seront

$$a, \quad 10a, \quad 100a, \quad 1000a, \quad 10000a, \quad \text{etc.}$$

Ces valeurs de $\frac{a}{c}$ devenant de dix en dix fois plus grandes , on conçoit qu'on parviendra toujours à une valeur de $\frac{a}{c}$ plus grande que toute quantité donnée.

REMARQUE. Lorsque le numérateur a de la fraction $\frac{a}{c}$ est donné , il est toujours possible de trouver la valeur du dénominateur c qui rend $\frac{a}{c}$ plus grand qu'une quantité donnée δ ; car l'inégalité $\frac{a}{c} > \delta$, donnant successivement

$$\frac{a}{c} \times c > \delta \times c, \quad a > \delta c, \quad \frac{a}{\delta} > \frac{\delta c}{\delta}, \quad \frac{a}{\delta} > c, \quad c < \frac{a}{\delta},$$

on voit que toute valeur arbitraire de c plus petite que la quantité connue $\frac{a}{\delta}$, jouira de la propriété demandée.

4°. Lorsque le numérateur a de la fraction $\frac{a}{c}$ ne changeant pas , le dénominateur c varie et augmente continuellement en s'approchant indéfiniment de ∞ , la valeur de $\frac{a}{c}$ diminue continuellement et s'approche indéfiniment de zéro. Enfin , lorsque $c = \infty$, la fraction $\frac{a}{c}$ se réduit à zéro.

Par exemple , si l'on conçoit que le dénominateur c de la fraction $\frac{a}{c}$ prend successivement les valeurs de dix en dix fois plus grandes

1, 10, 100, 1000, 10000, etc.,

les valeurs correspondantes de $\frac{a}{c}$ seront

$$a, \quad \frac{a}{10}, \quad \frac{a}{100}, \quad \frac{a}{1000}, \quad \frac{a}{10000}, \text{ etc.}$$

Ces valeurs de $\frac{a}{c}$ devenant de dix en dix fois plus petites, on conçoit qu'on parviendra toujours à une valeur de $\frac{a}{c}$ plus petite que toute quantité donnée.

On démontrera comme ci-dessus que pour rendre la fraction $\frac{a}{c}$ moindre qu'une quantité donnée δ , il suffit de prendre $c > \frac{a}{\delta}$.

Il résulte de cette discussion que a désignant une quantité finie quelconque, on a

$$\frac{a}{0} = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad 0 \times \infty = \infty \times 0 = a, \quad \frac{0}{0} = a, \quad \frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0} = a.$$

Ainsi : la division d'une quantité finie par zéro, donne un quotient infiniment grand ; le quotient d'une quantité finie par l'infini est zéro ; le produit de zéro par l'infini et de l'infini par zéro, le quotient de zéro par zéro et de l'infini par l'infini, sont des quantités indéterminées.

Par conséquent : Pour qu'un produit dont un des facteurs est zéro, soit nécessairement nul, il faut et il suffit que le produit des autres facteurs soit une quantité finie. Quand un facteur d'un produit étant zéro, un autre facteur est infini, la valeur du produit reste entièrement arbitraire.

Ces diverses propriétés trouveront des applications dans toutes les parties des Mathématiques.

CHAPITRE II.

*Des Équations et des Problèmes du premier degré.
Des Identités et des Inégalités.*

§ 1^{er}. Des Equations et des Identités.

36. Les égalités qui n'ont lieu que pour certaines valeurs particulières des lettres qu'elles renferment, sont des *équations*; les égalités qui subsistent quelles que soient les valeurs des lettres qu'elles contiennent, sont des *identités*. Ainsi :

L'égalité $3 + x = 7$ est une *équation*, car elle n'est vraie que lorsqu'on y fait $x = 4$;

L'égalité $2x - 1 = 2x - 1$ est une *identité*, car elle est vraie quelle que soit x .

Les deux quantités séparées par le *signe* $=$ sont les deux *membres* de l'équation ou de l'identité; la quantité placée à gauche du signe $=$ est le *premier membre*, et celle qui est à droite forme le *second membre*. Les quantités séparées par les signes $+$ et $-$ sont les *termes* de l'équation ou de l'identité.

Toute égalité dont l'un des membres n'est que le résultat des opérations indiquées dans l'autre membre, est une *identité*. Par exemple, le produit de $a + b$ par $a - b$ étant $a^2 - b^2$, quels que soient a et b , la relation $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$, est une *identité*; elle démontre que la somme de deux quantités multipliée par leur différence, donne la différence des carrés de ces deux quantités. On fait souvent usage de cette propriété.

On dit qu'une équation est *numérique*, lorsque les inconnues n'y sont combinées qu'avec des nombres donnés. L'équation est *littérale*, lorsque des quantités connues y sont représentées par des lettres.

Ainsi, l'équation $2x - \frac{4}{5} = y + 2$ est *numérique*,
et $2ax - 5 = 4y + 47b$ est une équation *littérale*.

Tout système de valeurs des inconnues qui rend une équation *identique*, est ce qu'on nomme une *solution* de cette équation.

Ainsi, le système $x = 5$, $y = 2$, forme une solution de l'équation $x + y = 7$; car il réduit cette équation à l'identité $5 + 2 = 7$.

Les équations $x + y = 7$, $x - y = 3$, devenant *identiques*, lorsqu'on remplace x et y par 5 et 2, le système $x = 5$, $y = 2$, forme une *solution* des équations proposées, et l'on dit que ces valeurs de x et y satisfont aux équations $x + y = 7$, $x - y = 3$.

Pour *déterminer le degré d'une équation* qui ne renferme pas d'inconnues dans les dénominateurs, on fait dans chaque terme la somme des exposans des inconnues; la plus grande de ces sommes est le *degré* de l'équation.

Ainsi, $2x - y = 5$ est une équation du premier degré, et l'équation $y^3 x^5 = 1 - x^6$ est du septième degré.

Quand les inconnues entrent dans des dénominateurs, on ramène ce cas au précédent, en faisant disparaître ces dénominateurs par la méthode qui sera donnée (pages 50 et 51).

La difficulté de résoudre les équations dépendant de leur degré et du nombre des inconnues, occupons-nous d'abord des *équations du premier degré*.

§ II. Des équations et des problèmes du premier degré à une seule inconnue.

37. Les transformations qu'il faut faire subir aux équations primitives pour parvenir aux valeurs des inconnues, sont fondées sur les propriétés suivantes :

1°. Lorsqu'à deux quantités égales, on ajoute une même quantité, les sommes sont égales ;

2°. Quand de deux quantités égales, on retranche une même quantité, les restes sont égaux ;

3°. En multipliant deux quantités égales, par une même quantité, les produits sont égaux ;

4°. Lorsqu'on divise deux quantités égales, par une même quantité, les quotiens sont égaux.

Les deux membres d'une équation étant égaux, ces principes s'y appliquent, et donnent le moyen de déduire de l'équation proposée, d'autres équations qui toutes sont satisfaites par la même valeur de l'inconnue.

L'inconnue ne pouvant être combinée avec les données que par voie d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, nous allons considérer successivement ces différens cas.

1°. Soit proposé de résoudre l'équation

$$x + 3 = 5.$$

Si des deux quantités égales $x + 3$ et 5, on ôte 3, les restes seront égaux ; donc

$$x + 3 - 3 = 5 - 3, \text{ ou } x = 5 - 3 = 2.$$

2°. Soit l'équation $x - 3 = 5.$

Pour la résoudre, on ajoutera 3 à chacun de ses deux membres, ce qui donnera

$$x - 3 + 3 = 5 + 3, \text{ ou } x = 5 + 3 = 8.$$

Il résulte de (1°) et (2°) que pour faire passer un terme d'un membre d'une équation dans un autre, il suffit d'effacer ce terme dans le membre où il se trouve, et de l'écrire dans l'autre membre avec un signe contraire ; c'est-à-dire avec le signe — s'il avait le signe +, et avec le signe + s'il avait le signe —.

3°. Pour résoudre l'équation $3x = 6,$
on divise ses deux membres par 3, ce qui donne

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}, \text{ ou } x = \frac{6}{3} = 2.$$

Ainsi : lorsque l'inconnue est seule dans le premier membre, pour la dégager du coefficient qui la multiplie, il faut supprimer ce coefficient dans le premier membre et diviser l'autre membre par le même coefficient.

4°. Soit l'équation $\frac{x}{3} = 4.$

On multiplie ses deux membres par 3; ce qui donne

$$x = 4 \times 3 = 12.$$

Par conséquent : *lorsque l'inconnue est seule dans le premier membre, pour la dégager de son diviseur, on le supprime dans le premier membre et on multiplie le second membre par ce diviseur.*

5°. Pour résoudre l'équation

$$(1) \dots \frac{4x}{5} - 7 = \frac{x}{3} - \frac{13}{2},$$

on fait d'abord disparaître les dénominateurs en multipliant tous les termes par le produit $2 \times 3 \times 5$ de ces dénominateurs; ce qui donne

$$\frac{4x \times 2 \times 3 \times 5}{5} - 7 \times 2 \times 3 \times 5 = \frac{x \times 2 \times 3 \times 5}{3} - \frac{13 \times 2 \times 3 \times 5}{2}.$$

Effectuant les divisions indiquées, il vient

$$(2) \dots 4x \times 2 \times 3 - 7 \times 2 \times 3 \times 5 = x \times 2 \times 5 - 13 \times 3 \times 5.$$

Cette dernière équation donne successivement

$$24x - 210 = 10x - 195, \quad 24x - 10x = 210 - 195, \quad 14x = 15, \quad x = \frac{15}{14}.$$

La comparaison des équations (1), (2), démontre que *pour faire disparaître les dénominateurs qui affectent les termes d'une équation, il suffit de multiplier chaque numérateur par le produit des dénominateurs des autres fractions, et chaque entier par le produit de tous les dénominateurs.*

REMARQUE. Lorsque les dénominateurs ont des facteurs communs, on simplifie le calcul en multipliant tous les termes par la plus petite quantité exactement divisible par chaque dénominateur.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation numérique

$$\frac{5x}{6} - \frac{2}{15} = \frac{7x}{9} + \frac{8}{15}.$$

Le plus petit nombre divisible par 6, 9 et 15, étant 90 (*Arith.* n° 51), on multiplie tous les termes par 90; ce qui

donne

$$\frac{5x \times 90}{6} - \frac{2 \times 90}{15} = \frac{7x \times 90}{9} + \frac{8 \times 90}{15}.$$

Or, $\frac{90}{6} = 15$, $\frac{90}{15} = 6$, $\frac{90}{9} = 10$. Donc

$$5x \times 15 - 2 \times 6 = 7x \times 10 + 8 \times 6.$$

On en déduit successivement,

$$75x - 12 = 70x + 48, \quad 75x - 70x = 48 + 12,$$

$$5x = 60, \quad x = 12.$$

On parvient plus simplement au même résultat, en observant que l'équation proposée donne

$$\frac{5x}{6} - \frac{7x}{9} = \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Le plus petit nombre divisible par 3, 6 et 9 étant 18, on multiplie tous les termes par 18; ce qui donne

$$\frac{5x \times 18}{6} - \frac{7x \times 18}{9} = \frac{2 \times 18}{3}.$$

Effectuant les divisions indiquées, on trouve

$$5x \times 3 - 7x \times 2 = 2 \times 6; \text{ d'où } 15x - 14x = 12, \quad x = 12.$$

2° EXEMPLE. Soit l'équation littérale,

$$\frac{p}{ab} - \frac{qx}{ac} = \frac{r}{bcd} - \frac{2mx}{abc}.$$

La plus petite quantité divisible par chacun des dénominateurs étant $abcd$, on multiplie tous les termes de l'équation proposée par $abcd$, et l'on effectue ensuite les divisions indiquées; ce qui donne

$$cdp - bdqx = ar - 2mdx.$$

On en déduit successivement

$$2mdx - bdqx = ar - cdp, \quad (2m - bq)dx = ar - cdp,$$

$$x = \frac{ar - cdp}{(2m - bq)d}.$$

En général : Pour résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue, faites passer tous les termes qui renferment l'inconnue dans le 1^{er} membre, et les termes tout connus dans le 2^e membre ; réduisez chaque nombre à sa plus simple expression, et chassez les dénominateurs ; l'inconnue sera égale au 2^e membre de cette dernière équation, divisé par la somme des quantités qui multiplient l'inconnue dans le 1^{er} membre.

Cette règle générale conduira toujours à la valeur de l'inconnue ; mais la forme particulière de l'équation proposée permet quelquefois d'abréger les calculs. Nous allons en donner quelques exemples.

Quand l'équation proposée renferme des entiers et des fractions de même dénominateur, on simplifie les calculs en réunissant d'abord tous les entiers en un seul, et en formant une seule fraction de toutes les fractions de même dénominateur. On fait ensuite disparaître les dénominateurs.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation

$$3x - \frac{2}{15} - 74 + \frac{5x}{6} = \frac{8}{15} - 4 - 2x - \frac{2}{3}.$$

On fait d'abord passer tous les termes en x dans le 1^{er} membre, et les termes tout connus dans le 2^e membre ; ce qui donne

$$3x + 2x + \frac{5x}{6} = 74 - 4 + \frac{8}{15} + \frac{2}{15} - \frac{2}{3}.$$

Réunissant les entiers entre eux, ainsi que les fractions de même dénominateur, il vient

$$(1) \dots 5x + \frac{5x}{6} = 70 + \frac{10}{15} - \frac{2}{3}.$$

Pour faire disparaître les dénominateurs, on multiplie tous les termes par 30 qui est le plus petit nombre divisible par 3, 6 et 15 ; cela donne

$$5x \times 30 + \frac{5x \times 30}{6} = 70 \times 30 + \frac{10 \times 30}{15} - \frac{2 \times 30}{3}.$$

Effectuant les divisions indiquées, il vient

$$5x \times 30 + 5x \times 5 = 70 \times 30 + 10 \times 2 - 2 \times 10; \text{ d'où } \\ 150x + 25x = 2100 + 20 - 20, \quad 175x = 2100,$$

$$x = \frac{2100}{175} = 12.$$

On peut simplifier les calculs, car $\frac{10}{15}$ se réduisant à $\frac{2}{3}$, l'équation (1) devient

$$5x + \frac{5x}{6} = 70.$$

On divise les deux membres par 5, ce qui donne

$$x + \frac{x}{6} = 14; \text{ d'où } 6x + x = 14 \times 6, \quad 7x = 14 \times 6,$$

$$x = \frac{14 \times 6}{7} = \frac{14}{7} \times 6 = 2 \times 6 = 12.$$

2^e EXEMPLE. Soit l'équation

$$5x + 58 - \frac{4x}{3} + 7(x - 10) = 18 + \frac{2x}{3} - 4(x - 10).$$

Elle donne successivement

$$5x - \frac{4x}{3} - \frac{2x}{3} + 7(x - 10) + 4(x - 10) = 18 - 58,$$

$$5x - \frac{6x}{3} + 11(x - 10) = 18 - 58,$$

$$5x - 2x + 11x - 110 = 18 - 58,$$

$$14x = 110 + 18 - 58 = 70, \quad x = 5.$$

On peut changer les signes de tous les termes d'une équation, sans troubler l'égalité; car soit l'équation

$$b - x = 2x - a,$$

si l'on fait passer les termes du 2^e membre dans le 1^{er} et ceux du 1^{er} membre dans le 2^e, on aura

$$-2x + a = -b + x,$$

ou, ce qui revient au même,

$$-b + x = -2x + a.$$

* Pour connaître si une valeur de l'inconnue satisfait à une équation, il faut voir si cette valeur mise à la place de l'inconnue, rend le premier membre identiquement égal au second. Lorsque cette condition est remplie, la valeur de l'inconnue satisfait à l'équation proposée; et elle ne peut y satisfaire que dans ce cas.

Cela est évident, car une équation étant l'expression algébrique de certaines conditions auxquelles le nombre représenté par x doit satisfaire, si ce nombre était connu, en effectuant sur lui toutes les opérations indiquées sur x , chaque membre devrait prendre la même valeur numérique; et si cette condition n'était pas remplie, le nombre mis pour x ne serait pas admissible.

Par exemple, pour vérifier si $x = 12$, satisfait à l'équation

$$(1) \dots \frac{5x}{6} - \frac{2}{15} = \frac{7x}{9} + \frac{8}{15},$$

on remplace x par 12; le 1^{er} membre devient

$$\frac{5 \times 12}{6} - \frac{2}{15}, \text{ ou } \frac{60}{6} - \frac{2}{15}, \text{ ou } 10 - \frac{2}{15}, \text{ ou } \frac{148}{15};$$

le 2^e membre devient

$$\frac{7 \times 12}{9} + \frac{8}{15}, \text{ ou } \frac{84}{9} + \frac{8}{15}, \text{ ou } \frac{28}{3} + \frac{8}{15}, \text{ ou } \frac{140}{15} + \frac{8}{15}, \text{ ou } \frac{148}{15}.$$

La valeur $x = 12$ rend donc l'équation (1) identique. Cette valeur satisfait donc à l'équation (1).

Toute équation algébrique peut être considérée comme l'expression des conditions d'un problème.

Pour trouver l'énoncé le plus simple de ce problème, il suffit de traduire l'équation proposée en langage ordinaire.

Par exemple, l'équation $3x - 4 = 2x + 7$, est la traduction algébrique de ce problème :

Trouver un nombre x , tel que son triple diminué de 4, soit égal à son double augmenté de 7.

L'équation proposée donnant $x = 11$, le nombre cherché est 11.

Problèmes du premier degré à une seule inconnue.

38. La résolution des équations du premier degré à une seule inconnue ne pouvant plus offrir de difficulté, nous allons traiter des questions qui conduiront à des équations de cette espèce; et pour faire apprécier les avantages de l'Algèbre, nous nous occuperons d'abord de plusieurs problèmes qui ont été résolus dans le quatrième chapitre de l'Arithmétique.

1^{er} PROBLÈME. *Trouver le nombre dont les $\frac{5}{8}$ valent 60. (Arith., 66^e problème, page 150.)*

Si x désigne le nombre demandé, on aura

$$\frac{5}{8}x = 60; \text{ d'où } 5x = 60 \times 8, \quad x = \frac{60 \times 8}{5} = 96.$$

Et en effet, les $\frac{5}{8}$ de 96 font 60.

2^e PROBLÈME. *Trouver un nombre x , tel que ses $\frac{2}{7}$ plus ses $\frac{19}{56}$ valent 60. (Arith., 67^e probl., page 150.)*

D'après cet énoncé, il faut que

$$\frac{2}{7}x + \frac{19}{56}x = 60.$$

Pour résoudre cette équation, on multiplie tous ses termes par 56, ou par 7×8 ; ce qui donne

$$\frac{2 \times 7 \times 8x}{7} + \frac{19 \times 56x}{56} = 60 \times 56; \text{ d'où } 16x + 19x = 3360, \quad 35x = 3360, \quad x = 96.$$

Le nombre 96 jouit de la propriété demandée, car ses $\frac{2}{7}$ plus ses $\frac{19}{56}$ valent 60.

3^e PROBLÈME. *Un joueur, interrogé sur ce qu'il a dans sa bourse, répond que l'excès du quintuple du nombre de ses louis sur 30, est égal à l'excès du double du nombre de ces*

mêmes louis sur 6. Combien le joueur a-t-il de louis? (*Arith.*, 62^e probl., page 147.)

Soit x le nombre de louis demandé; l'excès de son quintuple sur 30 est $5x - 30$, et l'excès de son double sur 6 est $2x - 6$. Il faut donc que

$$5x - 30 = 2x - 6, \text{ d'où } x = 8.$$

Le joueur avait donc 8 louis. Et en effet, l'excès du quintuple de 8 sur 30 est 10, et l'excès du double de 8 sur 6 est également 10, comme l'exige l'énoncé.

4^e PROBLÈME. Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : mon âge est le triple de celui de mon fils, et il y a dix ans qu'il en était le quintuple. On demande l'âge du fils. (*Arith.*, 63^e probl., page 148.)

Si l'âge actuel du fils est x ans, celui du père est $3x$ ans; il y a 10 ans, le père avait $3x - 10$ ans, et le fils $x - 10$ ans; mais à cette époque, l'âge du père était égal au quintuple de l'âge du fils. On a donc

$$3x - 10 = 5(x - 10); \text{ d'où } x = 20.$$

Le fils a donc 20 ans, et le père 60 ans; il y a dix ans, le fils avait 10 ans et le père 50 ans; l'âge du père était donc quintuple de celui du fils.

5^e PROBLÈME. Un bassin est alimenté par deux fontaines; la 1^{re} le remplirait en $\frac{3}{2}$ heures, et la 2^e en $\frac{3}{4}$ d'heure; la totalité de l'eau qu'il peut contenir sortirait en 3 heures par une ouverture pratiquée à ce bassin; en combien de temps le bassin, supposé vide, sera-t-il rempli, lorsque l'eau coulera par les trois ouvertures à la fois? (*Arith.*, 69^e probl., pag. 150 et 151.)

On désignera le nombre d'heures cherché par x , et la capacité du bassin par a litres.

Puisque la 1^{re} fontaine fournit en $\frac{3}{2}$ heures, a litres d'eau, en 3 heures elle fournit $2a$ litres, en 1 heure elle fournit $\frac{2a}{3}$ litres.

La quantité d'eau qui entre en x heures, par la 1^{re} fontaine, est donc $\frac{2ax}{3}$ litres.

On verra de même qu'en x heures, la 2^e fontaine introduit $\frac{4ax}{3}$ litres d'eau dans le bassin, et qu'il sort $\frac{ax}{3}$ litres d'eau par la 3^e ouverture.

Ainsi, quand l'eau coule pendant x heures, par les trois ouvertures à la fois, il entre $\frac{2ax}{3} + \frac{4ax}{3}$ litres d'eau dans le bassin, et il en sort $\frac{ax}{3}$ litres.

Or, le bassin devant être rempli en x heures, l'excès de la quantité d'eau qui entre en x heures dans le bassin, sur la quantité d'eau qui en sort, doit être égal à la capacité a litres du bassin. On a donc

$$\frac{2ax}{3} + \frac{4ax}{3} - \frac{ax}{3} = a; \text{ d'où } 5ax = 3a, x = \frac{3}{5}.$$

Le bassin sera donc rempli en $\frac{3}{5}$ d'heure.

Il est facile de s'en assurer; car on a vu que l'eau coulant par les trois ouvertures à la fois, la quantité d'eau qui entre pendant une heure dans le bassin est $\frac{2a}{3} + \frac{4a}{3}$ ou $\frac{6a}{3}$ litres, et qu'il en sort $\frac{1}{3} a$ litres. Par conséquent, pendant les $\frac{3}{5}$ d'une heure, il entre dans le bassin les $\frac{3}{5}$ de $\frac{6a}{3}$ litres ou $\frac{6a}{5}$ litres, et il en sort les $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3} a$ litres ou $\frac{1}{5} a$ litres; l'excès de la quantité d'eau qui entre dans le bassin pendant $\frac{3}{5}$ d'heure, sur l'eau qui en sort, étant $\frac{6a}{5} - \frac{1}{5} a$ ou a litres, le bassin dont la capacité est a litres, sera effectivement rempli en $\frac{3}{5}$ d'heure.

REMARQUE. La valeur de x étant indépendante de a , le temps cherché reste le même, quelle que soit la capacité du bassin.

6^e PROBLÈME. On suppose que a ouvriers qui travaillent ζ heures par jour, ont fait en γ jours, δ mètres d'ouvrage. Il s'agit de trouver combien a' ouvriers, travaillant ζ' heures par jour, feront de mètres du même ouvrage en γ' jours.

Soit δ' le nombre de mètres cherché.

On dira : puisque

a ouvriers travaillant ζ heures par jour font en γ jours, δ mètres,

1 ouvrier travaillant ζ heures par jour fait en γ jours, $\frac{\delta}{a}$ mètres,

1 ouvrier travaillant 1 heure par jour fait en γ jours, $\frac{\delta}{a\zeta}$ mètres,

1 ouvrier travaillant 1 heure par jour fait en 1 jour, $\frac{\delta}{a\zeta\gamma}$ mètres,

a' ouvriers travaillant 1 heure par jour font en 1 jour, $\frac{\delta a'}{a\zeta\gamma}$ mètres,

a' ouvriers travaillant ζ' heures par jour font en 1 jour, $\frac{\delta a'\zeta'}{a\zeta\gamma}$ mètres.

Les a' ouvriers travaillant ζ' heures par jour font donc en γ' jours, $\frac{\delta a'\zeta'\gamma'}{a\zeta\gamma}$ m.

Désignant donc par δ' le nombre de mètres demandé, on aura

$$(1) \dots \delta' = \frac{\delta a' \zeta' \gamma'}{a \zeta \gamma}.$$

Cette formule, qui résout le problème, fournit encore le moyen de calculer l'une quelconque des huit quantités $a, \zeta, \gamma, \delta, a', \zeta', \gamma', \delta'$, quand les sept autres sont données.

1^{er} EXEMPLE. Deux ouvriers qui travaillent 3 heures par jour, ont fait en 5 jours 90 mètres d'ouvrage; combien 3 ouvriers travaillant 7 heures par jour, feront-ils du même ouvrage en 2 jours? (*Arith.*, 7^e prob., pag. 112.)

On connaît $a=2$, $\zeta=3$, $\gamma=5$, $\delta=90$, $a'=3$, $\zeta'=7$, $\gamma'=2$.

La formule (1) donne

$$\delta' = \frac{90 \times 3 \times 7 \times 2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{90 \times 7}{5} = 126.$$

2^e EXEMPLE. Deux ouvriers, travaillant 3 heures par jour,

font en 5 jours 90 mètres d'ouvrage ; combien faudra-t-il de jours à 3 ouvriers qui travaillent 7 heures par jour, pour faire 126 mètres du même ouvrage ? (*Arith.*, 8^e prob., pag. 113.)

On connaît $\alpha=2$, $\zeta=3$, $\gamma=5$, $\delta=90$, $\alpha'=3$, $\zeta'=7$, $\delta'=126$.

Le nombre γ' de jours demandé se déduit de la relation (1) ; elle donne

$$\gamma' = \frac{\alpha \gamma \delta'}{\alpha' \zeta' \delta} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 126}{3 \times 7 \times 90} = 2.$$

7^e PROBLÈME. On demande combien le capital α francs vaudra dans n années, en n'ayant égard qu'aux intérêts simples. L'argent est à γ pour 100, c'est-à-dire que l'intérêt de 100 francs par an est γ francs.

L'intérêt de 100^f par an étant γ francs,
l'intérêt simple de 100^f en n années est γn francs ;
100^f comptant vaut donc après n années, $100 + \gamma n$ francs,
1^f comptant vaut donc après n années, $\frac{100 + \gamma n}{100}$ francs.

Par conséquent, dans n années, le capital α francs vaudra $\left(\frac{100 + \gamma n}{100}\right) \alpha$ francs.

Désignant par ζ francs la valeur cherchée du capital α francs, après n années, on aura

$$(1) \dots \zeta = \left(\frac{100 + \gamma n}{100}\right) \alpha.$$

Lorsque trois des quantités α , ζ , γ , n , seront données, on déduira de la relation (1) la valeur de la quantité inconnue.

1^{er} EXEMPLE. Combien 480000 francs, argent comptant, vaudront-ils dans trois ans ? L'argent est à 5 pour 100. (*Arith.*, 9^e prob., pag. 115.)

Les données sont $\alpha = 480000$, $n = 3$, $\gamma = 5$.

Substituant ces valeurs dans la formule (1), on trouve

$$\zeta = \left(\frac{100 + 5 \times 3}{100}\right) \times 480000 = \frac{115 \times 480000}{100} = 115 \times 4800 = 552000.$$

Ainsi, les 480000^f vaudront 552000^f dans 3 ans.

2^e EXEMPLE. Combien 480000 francs vaudront-ils dans 3 ans

4 mois? L'argent est à 5 pour 100? (*Arith.*, 10^e prob., pag. 116.)

Les 3 ans 4 mois, valant $\frac{10}{3}$ d'année, on a

$$a = 480000, n = \frac{10}{3}, \gamma = 5.$$

Substituant ces valeurs de a , n et γ , la formule (1) donne $C = 560000$. Les 480000 francs vaudront donc 560000 francs dans 3 ans 4 mois.

3^e EXEMPLE. Combien 560000 francs, payables dans 3 ans 4 mois, valent-ils comptant? L'argent est à 5 pour 100. (*Arith.*, 11^e prob., pag. 116.)

On connaît $C = 560000$, $n = \frac{10}{3}$, $\gamma = 5$.

La relation (1) conduit à la valeur de l'inconnue a . On trouve

$$a = \frac{100C}{100 + \gamma n}.$$

$$\text{Or, } 100C = 56000000, 100 + \gamma n = 100 + \frac{50}{3} = \frac{350}{3}.$$

$$\text{Donc } a = 56000000 : \frac{350}{3} = 56000000 \times \frac{3}{350} = 480000.$$

Ainsi, les 560000^f, payables dans 3 ans 4 mois, valent 480000^f comptant.

4^e EXEMPLE. Trouver dans combien d'années le capital 480000 francs, vaudra 560000 francs; l'argent est à 5 pour 100. (*Arith.*, 12^e prob., pag. 117.)

On connaît $a = 480000$, $C = 560000$, $\gamma = 5$.

L'inconnue est le nombre n des années. La relation (1) donne

$$n = \frac{100(C - a)}{a\gamma} = \frac{100(560000 - 480000)}{480000 \times 5} = \frac{10}{3}.$$

Le temps cherché est donc $\frac{10}{3}$ d'année, ou 3 ans 4 mois.

5^e EXEMPLE. Le capital 480000 francs, vaut 560000 francs

dans 3 ans 4 mois. Trouver à quel taux ce capital a été placé. (*Arith.*, 13^e prob., pag. 117.)

On connaît $a = 480000$, $c = 560000$, $n = \frac{10}{3}$.

L'inconnue est le taux γ de l'argent. La relation (1) donne

$$\gamma = \frac{100(c-a)}{an}.$$

Substituant les valeurs de a , c , n , on trouve $\gamma = 5$. De sorte que l'argent était à 5 pour 100.

8^e PROBLÈME. Deux courriers vont dans le même sens et avec des vitesses constantes. Le 1^{er} a une avance de a lieues et part h heures avant le 2^e. En une heure, le 1^{er} courrier parcourt γ' lieues et le 2^e parcourt γ'' lieues. On demande pendant combien d'heures le 2^e courrier doit marcher, pour n'être plus en arrière du 1^{er} que de c lieues.

Désignons par x le nombre d'heures cherché.

Le 1^{er} courrier a fait $\gamma'h$ lieues en h heures. Par conséquent, lorsque le 2^e courrier se met en route, le 1^{er} a une avance de $a + \gamma'h$ lieues. Pendant les x heures de marche du 2^e courrier, ce courrier fait $\gamma''x$ et le 1^{er} fait $\gamma'x$ lieues.

Soit $\gamma'' > \gamma'$. Le 2^e courrier se rapprochera du 1^{er} courrier de $\gamma''x - \gamma'x$ lieues, pendant x heures. Or, il était de $a + \gamma'h$ lieues en arrière du 1^{er}, et après les x heures de marche le 2^e courrier doit être en arrière de c lieues. On voit donc que pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que c soit moindre que $a + \gamma'h$. Mais, pendant les x heures de marche du 2^e courrier, il se rapproche de $\gamma''x - \gamma'x$ lieues du 1^{er}, et ce rapprochement doit être de $a + \gamma'h - c$ lieues; donc

$$\gamma''x - \gamma'x = a + \gamma'h - c. \text{ D'où (1)... } x = \frac{a + \gamma'h - c}{\gamma'' - \gamma'}.$$

La formule (1) détermine le nombre x d'heures cherché.

Les espaces parcourus pendant ce temps par le 1^{er} et le 2^e courrier sont $\gamma'x$ et $\gamma''x$ lieues.

1^{er} EXEMPLE. Deux courriers vont dans le même sens; le 1^{er}

a une avance de 200 lieues, fait 3 lieues en 4 heures, et part 40 heures avant le 2^e qui fait 6 lieues en 7 heures. Après combien d'heures de marche, le 2^e courrier ne sera-t-il plus en arrière du 1^{er} que de 62 lieues? (Arith., 71^e prob., page 152.)

On déduit de cet énoncé que les espaces parcourus en une heure par le 1^{er} et le 2^e courrier, sont $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{7}$ de lieue. Donc

$$v' = \frac{3}{4}, v'' = \frac{6}{7}, a = 200, h = 40, c = 62.$$

Substituant ces valeurs dans la formule (1), on trouve $x = 1568$. Et en effet, pendant 1568 heures, le 2^e courrier fait 1568 fois $\frac{6}{7}$ de lieue, ou 1344 lieues; le 1^{er} courrier, qui est parti 40 heures avant le 2^e, a marché pendant 1608 heures et a parcouru 1608 fois $\frac{3}{4}$ de lieue, ou 1206 lieues; le 2^e courrier s'est donc rapproché du 1^{er} de 1344—1206 ou 138 lieues; il n'est donc plus en arrière du 1^{er} que de 200—138 lieues ou de 62 lieues, comme l'exige l'énoncé.

2^e EXEMPLE. Deux courriers vont dans le même sens; le premier a une avance de 138 lieues, fait 3 lieues en 4 heures, et part 40 heures avant le second qui parcourt 6 lieues en 7 heures. On demande dans combien de temps les courriers se joindront, et quelles seront les distances des points de départ au point de rencontre. (Arith., 70^e prob., page 151.)

$$\text{On a } v' = \frac{3}{4}, v'' = \frac{6}{7}, a = 138, h = 40, c = 0.$$

La formule (1) donne $x = 1568$.

Le 2^e courrier rencontrera donc le 1^{er} après 1568 heures de marche. Pendant ce temps, le 2^e courrier aura parcouru 1568 fois $\frac{6}{7}$ de lieue, ou 1344 lieues; le 1^{er} courrier, qui part 40^h avant le 2^e, aura marché pendant 1608^h et aura parcouru 1608 fois $\frac{3}{4}$ de lieue, ou 1206 lieues; la différence, 138 lieues, entre ces

espaces, est effectivement égale à la distance des points de départ des courriers.

La formule (1) fournit le moyen de trouver l'une quelconque des six quantités $\alpha, \zeta, h, \gamma', \gamma'', x$, quand les cinq autres sont données.

EXEMPLE. Deux courriers marchent dans le même sens; le 1^{er}, qui est en avant du 2^e, fait 3 lieues en 4 heures, et part 40 heures avant le 2^e qui fait 6 lieues en 7 heures. Après 1568 heures de marche, le 2^e courrier est de 62 lieues en arrière du 1^{er}. Il s'agit de trouver l'avance primitive α lieues du 1^{er} courrier sur le 2^e.

On connaît $\gamma' = \frac{3}{4}$, $\gamma'' = \frac{6}{7}$, $h = 40$, $x = 1568$, $\zeta = 62$.

Substituant ces valeurs dans la formule (1), on en déduit $\alpha = 200$.

Ces exemples font voir que la résolution d'un problème du premier degré à une seule inconnue est composée de trois parties :

1°. On met le problème en équation, en traduisant les conditions qu'il exprime en langage algébrique; ce qui se réduit à indiquer, au moyen des signes algébriques, sur les quantités connues et inconnues, les mêmes opérations qu'il faudrait effectuer sur les valeurs des inconnues, si l'on voulait s'assurer qu'elles satisfont aux conditions du problème. De sorte que pour mettre un problème en équation, il suffit d'indiquer la preuve.

2°. On résout l'équation, en dégageant l'inconnue des quantités avec lesquelles elle est combinée.

3°. Enfin, on fait la preuve, en vérifiant si la valeur de l'inconnue satisfait aux conditions du problème.

§ III. Des Équations et des Problèmes du premier degré à plusieurs inconnues.

39. Une équation à deux inconnues admet une infinité de solutions, car pour chaque valeur arbitraire de l'une des inconnues, l'équation détermine la valeur correspondante de l'autre inconnue.

Par exemple, dans l'équation $y = x + 3$, chaque valeur arbitraire de x , augmentée de 3, donne la valeur correspondante de y .

La valeur de y dépendant de celle de x , on dit que y est fonction de x .

Si l'on résout cette équation par rapport à x , on aura $x = y - 3$; chaque valeur arbitraire de y diminuée de 3 fournira la valeur correspondante de x , et sous ce point de vue, la valeur de x dépendant de celle de y , on dit que x est fonction de y .

En général, lorsque des quantités dépendent d'autres quantités, les premières sont fonction des secondes.

40. Pour résoudre deux équations du premier degré entre deux inconnues x, y , on tire de l'une quelconque des équations la valeur d'une des inconnues en fonction de l'autre, par exemple, la valeur de y en fonction de x ; la substitution de cette valeur de y dans l'autre équation, donne une équation qui ne renferme que la seule inconnue x ; cette équation fournit la valeur de x . Connaissant x , on substitue sa valeur dans l'expression précédente de y en fonction de x , ce qui fait connaître y .

1^{er} EXEMPLE. Soient les deux équations

$$y - x = 6, \quad y + x = 12.$$

La 1^{re} donne $y = x + 6$.

La substitution de la valeur $x + 6$ de y , dans la 2^e équation, conduit à $x + 6 + x = 12$; cette dernière n'admet que la valeur $x = 3$, et comme y est égal à $x + 6$, la seule valeur de y est $3 + 6$ ou 9.

Ainsi, quoique chacune des équations proposées admette une infinité de solutions, le système de ces équations n'admet que la seule solution commune $x = 3, y = 9$.

En général, lorsqu'on propose de résoudre plusieurs équations à plusieurs inconnues, on entend toujours qu'il s'agit de trouver les valeurs des inconnues qui satisfont en même temps à toutes ces équations.

On parvient aux mêmes résultats en tirant d'abord de chaque

équation la valeur de y en fonction de x , et en égalant ensuite ces deux valeurs. Car, en effectuant ce calcul, il vient

$$y = x + 6, \quad y = 12 - x, \quad x + 6 = 12 - x.$$

La dernière équation donne $x = 3$, et la substitution de cette valeur de x dans l'une quelconque des valeurs de y , conduit à $y = 9$.

Il est bien évident que la substitution de $x = 3$ dans $y = x + 6$ ou dans $y = 12 - x$, doit fournir la même valeur de y ; car on a tiré la valeur 3 de x , de l'égalité de ces deux valeurs de y .

Enfin, la forme particulière des équations,

$$y - x = 6, \quad y + x = 12,$$

permet de simplifier les calculs; car en ajoutant ces équations membre à membre, il vient $2y = 18$, d'où $y = 9$; et en retranchant la 1^{re} de la 2^e, on trouve $2x = 6$, d'où $x = 3$.

Si l'on compare les trois méthodes dont nous venons de faire usage, on verra qu'elles reviennent toujours à *exprimer que les inconnues ont les mêmes valeurs dans les équations proposées*. Ces méthodes devaient donc conduire aux mêmes résultats.

Lorsqu'en combinant des équations, on fait disparaître une inconnue, on dit qu'on *élimine* cette inconnue.

Les trois méthodes que nous venons d'employer pour éliminer y ou x , ont reçu des noms qui rappellent les procédés dont on a fait usage. La 1^{re} est dite *méthode d'élimination par substitution*, la 2^e *par comparaison*, la 3^e *par addition ou par soustraction*.

2^e EXEMPLE. Soient (1)... $y + 2x = 8$, $3y + 7x = 27$.

La première équation donne $y = 8 - 2x$.

La substitution de la valeur $8 - 2x$ de y , dans la seconde équation, conduit à

$$(2)... 3(8 - 2x) + 7x = 27;$$

on en déduit $x = 3$.

Substituant cette valeur de x dans la relation $y = 8 - 2x$, on trouve $y = 2$.

On parvient à la même solution, $x = 3$, $y = 2$, en égalant

les valeurs de y tirées des équations (1); car il vient

$$y = 8 - 2x, y = \frac{27-7x}{3}, 8 - 2x = \frac{27-7x}{3}.$$

La dernière équation donne $x = 3$; et la substitution de cette valeur de x dans l'une quelconque des deux valeurs de y , conduit à $y = 2$.

Les valeurs $x = 3, y = 2$, satisfont aux équations proposées, car elles donnent

$$y + 2x = 2 + 2 \times 3 = 8, 3y + 7x = 3 \times 2 + 7 \times 3 = 27.$$

41. *Le système de trois équations à trois inconnues, x, y, z , détermine les valeurs de ces inconnues.*

En effet, si l'on prend dans l'une quelconque de ces équations, la valeur de l'une des inconnues x, y, z , en fonction des deux autres, par exemple, z en fonction de x et y , la substitution de cette valeur de z dans les deux autres équations, fournira deux équations entre x et y , qui détermineront les valeurs de ces deux inconnues; et en substituant ces valeurs dans l'expression qu'on avait déjà trouvée de z en fonction de x et y , on obtiendra la valeur de z .

EXEMPLE. Soient les équations

$$(1) \dots 3x + 2y + z = 16, 2x + 2y + z = 18, 2x + 2y + z = 14.$$

On tire de la première, $z = 16 - 3x - 2y$.

La substitution de cette valeur de z dans les deux autres équations, conduit à

$$2x + 2y + 2(16 - 3x - 2y) = 18, 2x + 2y + (16 - 3x - 2y) = 14.$$

On déduit de ces deux dernières, $x = 2, y = 3$; et ensuite la relation $z = 16 - 3x - 2y$, donne $z = 4$.

On parvient également à la solution $x = 2, y = 3, z = 4$, en égalant entre elles les valeurs de z tirées des équations (1), car ces valeurs sont

$$(2) \dots z = 16 - 3x - 2y, z = 9 - x - y, z = 14 - 2x - 2y.$$

Égalant successivement la 1^{re} valeur de z à la 2^e et à la 3^e,

on exprime que ces deux dernières sont égales entre elles, et il vient

$$16 - 3x - 2y = 9 - x - y, \quad 16 - 3x - 2y = 14 - 2x - 2y.$$

Ces deux équations en x et y , donnent $x = 2$, $y = 3$.

On a obtenu les valeurs de x et y , en exprimant que les valeurs (2) de z sont égales entre elles. La substitution de ces valeurs de x et y , dans l'une quelconque des relations (2), devra donc conduire à la même valeur de z ; et en effet, cette substitution donne $z = 4$.

REMARQUE. La forme particulière des équations (1) permet de simplifier les calculs précédents; car en retranchant successivement la 3^e équation, de la 1^{re} et de la 2^e, on trouve

$$(3x + 2y + z) - (2x + 2y + z) = 16 - 14, \text{ d'où } x = 2,$$

$$(2x + 2y + 2z) - (2x + 2y + z) = 18 - 14, \text{ d'où } z = 4,$$

et la substitution de ces valeurs des inconnues x , z , dans l'une quelconque des équations proposées, conduit à $y = 3$.

42. En général : Pour résoudre n équations du premier degré entre n inconnues, on prend dans l'une quelconque des équations la valeur d'une inconnue, comme si tout le reste était connu; la substitution de cette valeur dans les autres équations conduit à $n - 1$ équations entre $n - 1$ inconnues. Opérant sur ces nouvelles équations comme sur les proposées, on obtient $n - 2$ équations, entre $n - 2$ inconnues. Continuant ces calculs, on parvient à 2 équations entre 2 inconnues, et enfin à une équation à une seule inconnue; cette dernière équation détermine l'inconnue qu'elle renferme; et en remontant successivement aux équations précédentes, on en déduit les valeurs des autres inconnues.

EXEMPLE. Soient les quatre équations,

$$x + y + z + t = 14, \quad x + y + z - t = 4,$$

$$x + y - z + 2t = 11, \quad x - y + z + 3t = 18.$$

La première donne $t = 14 - x - y - z$.

Substituant cette valeur de t dans les trois autres équations,

on trouve, toutes réductions faites,

$$x + y + z = 9, \quad x + y + 3z = 17, \quad x + 2y + z = 12.$$

Pour résoudre ces trois équations entre x, y, z , on tire de la première,

$$z = 9 - x - y,$$

et la substitution de cette valeur de z dans les deux autres équations en x, y, z , conduit à

$$x + y = 5, \quad y = 3.$$

Ces deux équations entre x et y donnent

$$y = 3, \quad x = 5 - y = 5 - 3 = 2.$$

La substitution de ces valeurs de x et y dans $z = 9 - x - y$, donne $z = 4$; et en faisant $x = 2, y = 3, z = 4$, dans $t = 14 - x - y - z$, il vient $t = 5$.

Le système $x = 2, y = 3, z = 4, t = 5$, rend les équations proposées identiques.

REMARQUE. On peut simplifier les calculs précédens; car en retranchant la 2^e des équations proposées de la 1^{re}, il vient

$$(x + y + z + t) - (x + y + z - t) = 14 - 4; \text{ d'où } t = 5.$$

Si l'on retranche de même la 3^e et la 4^e équation de la 1^{re}, on parvient à

$$2z = 3 + t, \quad y = t - 2.$$

Substituant la valeur 5 de t , dans les deux dernières équations, on trouve $z = 4, y = 3$.

Enfin, si l'on fait $y = 3, z = 4, t = 5$, dans l'une quelconque des équations proposées, on trouvera $x = 2$.

Lorsque toutes les inconnues n'entrent pas à la fois dans chacune des équations proposées, l'application de la règle générale exige que l'on examine avec soin, de quelle manière les inconnues sont liées entre elles, afin de pouvoir les déduire les unes des autres. En voici des exemples :

1^{er} EXEMPLE. Soient les quatre équations

$$x - z = 2, \quad x - y - z = 0, \quad x + y = 5, \quad 2z + t = 4.$$

Les trois premières, ne renfermant que les trois inconnues x, y, z , détermineront ces inconnues; et en effet, ces trois équations donnent

$$x = 2 + z, \quad x = y + z, \quad x = 5 - y.$$

Égalant les deux premières valeurs de x , on trouve $y = 2$.

La relation $x = 5 - y$ donne $x = 5 - 2 = 3$;

et ensuite l'équation

$$x = 2 + z \text{ donne } z = x - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Substituant la valeur 1 de z , dans la relation $2z + t = 4$, on trouve $t = 2$.

Il est facile de s'assurer que les valeurs $x = 3, y = 2, z = 1, t = 2$, satisfont aux équations proposées.

2^e EXEMPLE. Soient les quatre équations

$$2z - t = 3, \quad 3x - z = 2, \quad y + t = 8, \quad 2x + 3y = 13.$$

Pour éliminer t , on tire de la 1^{re} équation $t = 2z - 3$; on substitue cette valeur de t dans $y + t = 8$, et l'on trouve $y + 2z = 11$.

De sorte que les inconnues x, y, z , dépendent des équations

$$3x - z = 2, \quad y + 2z = 11, \quad 2x + 3y = 13.$$

La 1^{re} équation donne $z = 3x - 2$.

Substituant cette valeur de z dans $y + 2z = 11$, il vient

$$y + 6x = 15. \text{ Or, } 2x + 3y = 13.$$

Ces deux équations entre x, y donnent $x = 2, y = 3$.

La relation $z = 3x - 2$, conduit à $z = 6 - 2 = 4$;

et ensuite, l'équation $t = 2z - 3$, donne $t = 5$.

On peut s'assurer que les valeurs

$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 4, \quad t = 5,$$

satisfont aux équations proposées.

43. Lorsqu'on a m équations entre $m + n$ inconnues, on peut assigner des valeurs arbitraires à n inconnues; car les m équations

tions fournissent ensuite les valeurs correspondantes des m autres inconnues.

EXEMPLE. Soient, $3x + 2y + z = 16$, $2x + 2y + z = 14$.

On peut donner des valeurs arbitraires à l'une des inconnues x, y, z ; les deux équations proposées fourniront les valeurs correspondantes des deux autres inconnues.

Si l'on fait $z = 4$, les équations données se réduiront à

$$3x + 2y = 12, \quad 2x + 2y = 10; \quad \text{d'où } x = 2, \quad y = 3.$$

44. Lorsqu'on a $m + n$ équations entre n inconnues, les valeurs des n inconnues se déduisent de n quelconques des équations proposées, et pour que le système des $m + n$ équations admette une solution, il suffit et il faut que les valeurs de ces inconnues satisfassent aux m autres équations.

1^{re} EXEMPLE. Soient $x + y = 8$, $x - y = 2$, $2x - 3y = 1$.

Les deux premières équations donnent $x = 5$, $y = 3$. Ces valeurs satisfaisant à la 3^e équation $2x - 3y = 1$, le système proposé admet la solution $x = 5$, $y = 3$.

2^e EXEMPLE. Soient $x + y = 8$, $x - y = 2$, $2x - 3y = 5$.

Les deux premières équations donnent $x = 5$, $y = 3$; et ces valeurs de x, y ne satisfont pas à la 3^e équation $2x - 3y = 5$. Le système des équations proposées n'admet donc aucune solution.

Problèmes qui conduisent à un nombre d'équations du premier degré égal à celui des inconnues.

45. 1^{er} PROBLÈME. On a des pièces de 2 francs et de 5 francs; il s'agit de payer 26 francs avec dix de ces pièces. (Arithm., 60^e prob., pag. 146.)

1^{re} SOLUTION. Si l'on donne x pièces de 2 francs et y pièces de 5 francs, la valeur de ces $x + y$ pièces sera x fois 2^f + y fois 5^f ou $2x + 5y$ francs. Or, le nombre total de ces pièces doit être 10, et elles doivent valoir 26 francs. Donc,

$$x + y = 10 \quad \text{et} \quad 2x + 5y = 26.$$

La 1^{re} équation donne $y = 10 - x$; substituant cette valeur

de y dans la 2^e équation, il vient

$$2x + 5(10 - x) = 26.$$

On en déduit

$$2x + 50 - 5x = 26, \quad 2x - 5x = 26 - 50, \quad -3x = -24, \quad 3x = 24, \quad x = 8.$$

On parvient plus simplement à $x = 8$, en changeant d'abord les signes de tous les termes de l'équation $2x + 50 - 5x = 26$; car il en résulte,

$$-2x - 50 + 5x = -26, \quad 5x - 2x = 50 - 26, \quad 3x = 24, \quad x = 8.$$

La relation $y = 10 - x$, donne $y = 10 - 8 = 2$.

On doit donc prendre 8 pièces de 2 francs et 2 pièces de 5 francs. Et en effet, ces 10 pièces valent

$$8 \text{ fois } 2^f + 2 \text{ fois } 5^f, \text{ ou } 16^f + 10^f, \text{ ou } 26^f.$$

2^e SOLUTION. Soit x le nombre des pièces de 2 francs, celui des pièces de 5 francs sera $10 - x$. Ces dix pièces vaudront

$$x \text{ fois } 2^f + (10 - x) \text{ fois } 5^f, \text{ ou } 2x + (10 - x) 5 \text{ francs.}$$

Mais, elles doivent valoir 26 francs. On a donc

$$2x + (10 - x) 5 = 26; \text{ d'où } x = 8 \text{ et } 10 - x = 2.$$

On doit donc donner 8 pièces de 2 francs et 2 pièces de 5 francs.

REMARQUE. Si l'on compare ces deux solutions, avec celle qui a été donnée en Arithmétique, on verra que l'avantage de l'Algèbre est de conduire plus directement au résultat.

Cette observation s'applique aux questions suivantes.

2^e PROBLÈME. Former la longueur du mètre, en plaçant des pièces d'or de 20 francs et de 40 francs les unes à la suite des autres. Le nombre total de ces pièces est 45; leurs diamètres respectifs sont 21 et 26 millimètres. (Arith., 61^e prob., page 147.)

1^{re} SOLUTION. Si l'on prend x pièces de 20 francs et y pièces de 40 francs, la somme des diamètres de ces $x + y$ pièces sera $x \text{ fois } 21 \text{ millimètres} + y \text{ fois } 26 \text{ millimètres}$, ou $21x + 26y \text{ millim.}$

Or, le nombre total de ces pièces doit être 45, et la somme de leurs diamètres doit être égale à un mètre, c'est-à-dire à

1000 millimètres. Il faut donc que

$$x + y = 45, \quad 21x + 26y = 1000.$$

Ces équations donnent $x = 34$, $y = 11$.

Et en effet; si l'on place les unes à la suite des autres, 34 pièces de 20 francs et 11 pièces de 40 francs, la somme des diamètres de ces 45 pièces sera

34 fois 21 millim. + 11 fois 26 millim., ou $(714 + 286)$ millim.,
ou 1000 millimètres, ou un mètre.

2° SOLUTION. Soit x le nombre des pièces de 20 francs; celui des pièces de 40 francs sera $45 - x$. La somme des diamètres de ces 45 pièces sera

$$x \text{ fois 21 millimètres} + (45 - x) \text{ fois 26 millimètres,}$$

ou $21x + (45 - x) 26 \text{ millimètres.}$

Cette somme devant être égale à un mètre, ou à 1000 millimètres, on a

$$21x + (45 - x) 26 = 1000; \quad \text{d'où } x = 34.$$

On formera donc la longueur du mètre en plaçant les unes à la suite des autres, 34 pièces de 20 francs, et $45 - 34$ ou 11 pièces de 40 francs.

3° PROBLÈME. *Un maître voulant distribuer des oranges à ses élèves, leur dit: Si j'en donne 6 à chacun de vous, il m'en restera 7; et si je n'en donne que 4 à chacun, il m'en restera 17. Trouver combien il y a d'élèves, et quel est le nombre des oranges. (Arith., 64^e prob., page 149).*

1^{re} SOLUTION. Soient, x le nombre des élèves, et y celui des oranges. Si l'on donne 6 oranges à chacun des x élèves, on aura distribué x fois 6 oranges, ou $6x$ oranges; or il en restera 7; le nombre total y des oranges est donc $6x + 7$. Par conséquent,

$$y = 6x + 7.$$

Si l'on ne donne que 4 oranges à chacun des x élèves, on aura distribué $4x$ oranges; et comme il en restera 17, le nombre

total y des oranges est $4x + 17$. Donc

$$y = 4x + 17.$$

Égalant ces deux valeurs de y , il vient

$$6x + 7 = 4x + 17; \text{ d'où } x = 5.$$

La substitution de cette valeur de x dans l'une quelconque des valeurs de y , donne $y = 37$.

On voit donc, qu'il y avait 5 élèves, et que le nombre des oranges était 37.

En voici la *preuve*. Si le maître donne 6 oranges à chacun des 5 élèves, il en distribuera 5 fois 6 ou 30, et il en restera $37 - 30$ ou 7; s'il n'en donne que 4 à chaque élève, c'est-à-dire 5 fois 4 ou 20, il lui restera $37 - 20$ ou 17 oranges.

2^e SOLUTION. On peut ne faire usage que d'une seule inconnue. Car en désignant par x le nombre des élèves, on trouve que le nombre total des oranges est exprimé par $6x + 7$ et par $4x + 17$. Égalant ces deux valeurs du nombre total des oranges, on a

$$6x + 7 = 4x + 17; \text{ d'où } x = 5 \text{ et } 6x + 7 = 37.$$

Par conséquent, il y avait 5 élèves, et le nombre des oranges était 37.

4^e PROBLÈME. *Trouver une fraction telle qu'en ajoutant b à son numérateur, elle se réduise à $\frac{a}{c}$, et qu'en ajoutant c à son dénominateur, elle se réduise à $\frac{a}{d}$.*

1^{re} SOLUTION. Soient, x le numérateur et y le dénominateur de la fraction demandée; les inconnues x , y dépendront des équations,

$$\frac{x+b}{y} = \frac{a}{c}, \quad \frac{x}{y+c} = \frac{a}{d}; \text{ d'où (1)... } x = \frac{c(a+b)}{ad-cy}, \quad y = \frac{c(cy+bd)}{ad-cy}.$$

Les conditions du problème déterminant le numérateur et le dénominateur de la fraction cherchée, on ne doit pas réduire la valeur de $\frac{x}{y}$ à sa plus simple expression.

Par exemple, soient $b=1$, $a=1$, $c=2$, $c=2$, $\gamma=1$, $\delta=4$, les formules (1) donnent $x=2$, $y=6$; la fraction demandée est donc $\frac{2}{6}$. Cette fraction jouit des propriétés demandées; car si l'on ajoute 1 à son numérateur, elle devient $\frac{3}{6}$ et se réduit à $\frac{1}{2}$; si l'on ajoute 2 à son dénominateur, elle devient $\frac{2}{8}$ et se réduit à $\frac{1}{4}$.

La fraction $\frac{1}{3}$, équivalente à $\frac{2}{6}$, ne satisferait pas à la question.

2^e SOLUTION. La fraction demandée devant se réduire à $\frac{a}{c}$, quand on ajoute b à son numérateur, cette fraction est de la forme $\frac{ax-b}{cx}$.

Or, en ajoutant c à son dénominateur, elle doit se réduire à $\frac{\gamma}{\delta}$; donc $\frac{ax-b}{cx+c} = \frac{\gamma}{\delta}$. On en déduit

$$x = \frac{c\gamma + b\delta}{a\delta - c\gamma}, \quad ax - b = \frac{\gamma(ca + b\delta)}{a\delta - c\gamma}, \quad cx = \frac{c(c\gamma + b\delta)}{a\delta - c\gamma}.$$

5^e PROBLÈME. *Un père laisse par testament, la moitié de son bien à son fils, le tiers à sa fille, et les 10000 francs qui restent à sa veuve; il faut trouver le bien du défunt et la part de chaque enfant. (Arith., 68^e probl., page 150.)*

1^{re} SOLUTION. Soient, x francs l'héritage, et y , z francs les parts du fils et de la fille. D'après l'énoncé du problème, la part y francs du fils est $\frac{1}{2}x$ francs, la part z francs de la fille est $\frac{1}{3}x$ francs, et il doit rester 10000^f à la mère; de sorte que la somme $(y+z+10000)$ francs de ces trois parts doit former le bien x francs du défunt. On doit donc avoir,

$$y = \frac{1}{2}x, \quad z = \frac{1}{3}x, \quad y + z + 10000 = x.$$

Pour résoudre ces trois équations, on substitue les valeurs $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, de y et z , dans la dernière équation, ce qui conduit à

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 10000 = x; \text{ d'où } x = 60000.$$

Les relations $y = \frac{1}{2}x$, $z = \frac{1}{3}x$, donnent

$$y = 30000, z = 20000.$$

Ainsi, l'héritage est 60000 francs. Le fils en prend la moitié ou 30000 francs, la fille le tiers ou 20000 francs; il reste effectivement 10000 francs à la veuve.

2^e SOLUTION. Si l'on représente par x francs le bien du défunt, les parts respectives du fils et de la fille seront $\frac{1}{2}x$ et $\frac{1}{3}x$ francs; ajoutant la part 10000^f de la veuve, la somme devra composer l'héritage x francs. Donc

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 10000 = x.$$

On en déduit, $x = 60000$, $\frac{1}{2}x = 30000$, $\frac{1}{3}x = 20000$.

3^e SOLUTION. Pour prendre plus facilement la moitié et le tiers de l'héritage, on le désignera par $6x$ francs; les parts respectives du fils, de la fille et de la veuve, seront $3x$, $2x$ et 10000 francs; leur somme devant composer l'héritage $6x$ francs, on a

$$3x + 2x + 10000 = 6x; \text{ d'où } x = 10000, 6x = 60000, \\ 3x = 30000, 2x = 20000.$$

6^e PROBLÈME. Les mises de trois associés sont ϵ , γ et δ francs; ces mises sont restées le même temps dans la société; le gain total est α francs. Il s'agit de trouver les gains des associés.

La mise totale $\epsilon + \gamma + \delta$ francs, a rapporté α ^f de bénéfice.

La mise 1^f rapporte donc $\frac{\alpha}{\epsilon + \gamma + \delta}$ francs de bénéfice.

On obtiendra donc les gains x, y, z francs relatifs aux mises $\mathcal{C}, \gamma, \delta$ francs, en formant les trois produits de $\frac{a}{\mathcal{C} + \gamma + \delta}$ francs, par $\mathcal{C}, \gamma$ et δ . Ainsi,

$$(1) \dots x = \frac{a}{\mathcal{C} + \gamma + \delta} \times \mathcal{C}, y = \frac{a}{\mathcal{C} + \gamma + \delta} \times \gamma, z = \frac{a}{\mathcal{C} + \gamma + \delta} \times \delta.$$

Ces formules démontrent que pour obtenir les gains demandés, il suffit de diviser le gain total par la somme des mises, et de multiplier le quotient par les nombres de francs de chaque mise. Les produits expriment les nombres de francs des gains relatifs aux mises proposées.

1^{er} EXEMPLE. Soient $\mathcal{C} = 300, \gamma = 500, \delta = 700, a = 4500$.

On trouve $\frac{a}{\mathcal{C} + \gamma + \delta} = 3, x = 900, y = 1500, z = 2100$.

L'Arithmétique a conduit au même résultat. (*Arith.*, 19^e probl., page 122.)

2^e EXEMPLE. Soient $\mathcal{C} = 345,67, \gamma = 468,84, \delta = 4527,95, a = 427,3968$. On trouve

$$\frac{a}{\mathcal{C} + \gamma + \delta} = 0,08, x = 27,6536, y = 37,5072, z = 362,2360.$$

L'Arithmétique a conduit au même résultat. (*Arith.*, 20^e probl., page 122.)

7^e PROBLÈME. Les mises de trois associés sont $\mathcal{C}, \gamma$ et δ francs. La première mise est restée b mois dans la société, la seconde c mois, et la troisième d mois. Le gain total est a francs. Trouver le gain relatif à chaque mise.

La mise $\mathcal{C}$ francs, qui est restée b mois dans la société, rapporte autant que b fois $\mathcal{C}$ francs pendant un mois. Par une raison semblable, γ francs placés pendant c mois, et δ francs placés pendant d mois, rapportent autant que c fois γ francs et d fois δ francs pendant un mois.

Par conséquent, pour trouver les gains cherchés, il suffit de résoudre cette autre question :

Les mises de trois associés sont $b\mathcal{C}, c\gamma$ et $d\delta$ francs ; ces

misés sont restées pendant un mois dans la société ; le gain total est a francs. Trouver les gains des associés.

On obtiendra donc les gains x, y, z francs demandés, en remplaçant dans les formules (1), les misés c, γ, d , par $bc, c\gamma, dd$. De sorte que,

$$x = \frac{a}{bc + c\gamma + dd} \times bc, \quad y = \frac{a}{bc + c\gamma + dd} \times c\gamma, \\ z = \frac{a}{bc + c\gamma + dd} \times dd.$$

EXEMPLE. Soient $c = 100$, $\gamma = 250$, $d = 50$,

$$b = 3, \quad c = 2, \quad d = 14, \quad a = 4500.$$

On trouve $x = 900$, $y = 1500$, $z = 2100$.

L'Arithmétique a fourni le même résultat. (*Arith.*, 21^e probl., pages 122 et 123.)

8^e PROBLÈME. *Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres. Chaque joueur ayant perdu une partie, dans l'ordre indiqué par le rang des joueurs, il reste 24^l au 1^{er} joueur, 28^l au 2^e, et 14^l au 3^e joueur. Combien chaque joueur avait-il d'argent en se mettant au jeu ? (*Arith.*, 73^e probl., page 153.)*

On supposera que les joueurs entrent au jeu avec x, y et z francs.

Le 1^{er} joueur ayant perdu la 1^{re} partie, donne y francs au 2^e joueur et z francs au 3^e; il ne lui reste donc que $x - y - z$ francs. Ainsi, à la fin de la 1^{re} partie, le premier joueur a $x - y - z$ francs; le 2^e a $2y$ francs, et le 3^e a $2z$ francs.

On trouvera de même, qu'à la fin de la 2^e partie, le 1^{er} joueur a $2(x - y - z)$ francs, le 2^e a $3y - x - z$ francs, le 3^e a $4z$ francs; et qu'après la 3^e partie, le 1^{er} joueur a $4(x - y - z)$ francs, le 2^e a $2(3y - x - z)$ francs, et le 3^e a $7z - x - y$ francs.

Les équations du problème sont donc

$$4(x - y - z) = 24, \quad 2(3y - x - z) = 28, \quad 7z - x - y = 14;$$

elles se réduisent à

$$(1) \dots x - (y + z) = 6, \quad 3y - (x + z) = 14, \quad 7z - (x + y) = 14.$$

On déduit de ces trois dernières, $x = 36$, $y = 20$, $z = 10$.

REMARQUE. On simplifie les calculs en observant que l'argent total des joueurs devant rester constamment le même, on a,

$$x + y + z = 24 + 28 + 14 = 66; \text{ d'où}$$

$$y + z = 66 - x, \quad x + z = 66 - y, \quad x + y = 66 - z.$$

Ces trois dernières relations réduisent les équations (1) à

$$x - (66 - x) = 6, \quad 3y - (66 - y) = 14, \quad 7z - (66 - z) = 14.$$

Ces trois dernières donnent $x = 36$, $y = 20$, $z = 10$.

9^e PROBLÈME. *Un père dit à son fils : Il y a 90^f dans ces quatre bourses; si je mettais 5^f dans la 1^{re}, si j'étais 4^f de la 2^e, si je triplais l'argent de la 3^e, et si j'étais la moitié de l'argent de la 4^e, chaque bourse contiendrait alors la même somme. Combien y avait-il d'argent dans chaque bourse?*

1^{re} SOLUTION. Soient x, y, z et t francs, les sommes d'argent contenues dans les quatre bourses. Si l'on effectue les opérations indiquées, les bourses renfermeront alors

$$x + 5, \quad y - 4, \quad 3z, \text{ et } t - \frac{1}{2}t \text{ ou } \frac{1}{2}t, \text{ francs.}$$

Ces quatre sommes devront être égales entre elles; et comme les quatre bourses devaient d'abord contenir 90^f, toutes les conditions du problème sont exprimées par les équations

$$x + 5 = y - 4, \quad x + 5 = 3z, \quad x + 5 = \frac{1}{2}t, \quad x + y + z + t = 90.$$

Pour résoudre ces équations, on tirera des trois premières,

$$(1) \dots y = x + 9, \quad z = \frac{1}{3}(x + 5), \quad t = 2(x + 5).$$

Substituant ces valeurs de y, z, t , en fonction de x , dans la 4^e équation, on obtiendra une équation en x seul qui donnera $x = 16$. Mettant cette valeur de x dans les relations (1), on trouvera $y = 25$, $z = 7$, $t = 42$.

De sorte que les quatre bourses contenaient 16^f, 25^f, 7^f et 42^f.

Il est facile de s'assurer que ces nombres satisfont à toutes les conditions du problème.

2^e SOLUTION. On peut résoudre la question proposée, en ne faisant usage que d'une seule inconnue. En effet : Supposons qu'après avoir effectué les opérations indiquées, chaque bourse contienne $3x$ francs; alors, $3x$ francs exprimera l'argent de la 1^{re} bourse augmenté de 5 francs; la 1^{re} bourse contenait donc $3x - 5$ francs.

On verra de même qu'il y avait $3x + 4$ francs dans la 2^e bourse, x francs dans la 3^e, et $6x$ francs dans la 4^e bourse. Or, ces quatre bourses devaient renfermer 90 francs. Donc,

$$(3x - 5) + (3x + 4) + x + 6x = 90; \text{ d'où } x = 7.$$

On en déduit que les bourses contenaient 16^f, 25^f, 7^f et 42 francs.

10^e PROBLÈME. On a formé trois tas de 15 points chacun, avec des cartes d'un jeu de piquet de 32 cartes. La première carte de chaque tas a été comptée pour sa valeur (l'as vaut 11 points, les figures valent 10, et les autres cartes valent le nombre de points qu'elles indiquent). Les autres cartes de chaque tas n'ont été comptées chacune que pour un point. On connaît le nombre des cartes qui n'ont pas été employées pour former les trois tas. Il s'agit d'en déduire le nombre total des points formés par les trois premières cartes des trois tas, c'est-à-dire par les trois cartes qui ont été comptées pour leurs valeurs.

Si l'on désigne par x le nombre total des points formés par les trois premières cartes des trois tas, par y le nombre des points de la 1^{re} carte du 1^{er} tas, par z celui des points de la 1^{re} carte du 2^e tas, et par t le nombre des points de la 1^{re} carte du 3^e tas; le 1^{er} tas contiendra $15 - y$ cartes qui ne compteront chacune que pour un point; de sorte que le 1^{er} tas sera composé de $15 - y + 1$ ou de $16 - y$ cartes. De même, le 2^e tas contiendra $16 - z$ cartes, et le 3^e sera formé de $16 - t$ cartes. Le nombre total des cartes des trois tas sera donc

$$(16 - y) + (16 - z) + (16 - t), \text{ ou } 48 - (y + z + t), \text{ ou } 48 - x.$$

Le nombre des cartes qui ne font pas partie des trois tas,

c'est-à-dire le nombre des cartes qui restent, est donc

$$32 - (48 - x), \text{ ou } x - 16.$$

Par conséquent, *Pour obtenir le nombre x de points demandé, il suffit d'ajouter 16 au nombre des cartes qui n'ont pas été employées à former les trois tas.*

Par exemple, supposons que la 1^{re} carte du 1^{er} tas soit un *as*, que la 1^{re} du 2^e tas soit un *roi*, et que la 1^{re} carte du 3^e tas soit un *huit*; la somme des points de ces trois cartes sera $11 + 10 + 8$, ou 29. Pour compléter 15 dans chaque tas, on ajoutera 4 cartes à l'*as*, 5 cartes au *roi*, et 7 cartes au *huit*. Le 1^{er} tas sera de 5 cartes, le 2^e de 6 cartes, et le 3^e de 8 cartes; ce qui fera 19 cartes en tout; il restera $32 - 19$ ou 13 cartes. Connaissant le nombre 13 des cartes qui restent, si l'on y ajoute 16, la somme 29 exprimera effectivement le nombre des points formés par les trois premières cartes des trois tas.

11^e PROBLÈME. *On a mêlé a litres de vin à c sous le litre, et a' litres à c' sous le litre. Déterminer le prix c'' sous du litre de ce mélange. On suppose que le volume total du mélange est égal à la somme des volumes des quantités mélangées.*

Les $a + a'$ litres du mélange valant $ac + a'c'$ sous, un litre de ce mélange revient à $\frac{ac + a'c'}{a + a'}$ sous. On a donc

$$(1) \dots c'' = \frac{ac + a'c'}{a + a'}.$$

Cette formule résout le problème proposé. Elle nous apprend que *pour obtenir le prix d'une unité de mesure d'un mélange quelconque, il suffit de multiplier le prix d'une mesure de chaque espèce par le nombre de ces mesures, et de diviser la somme de ces produits par le nombre total des mesures du mélange.* (Arith., page 130.)

Nous allons faire voir que la formule (1) fournit la solution des problèmes que nous avons résolus en Arithmétique sur les mélanges de deux liquides; elle donne le moyen de calculer

l'une quelconque des cinq quantités a, c, a', c', c'' , quand les quatre autres sont données. En voici des exemples.

1^{er} EXEMPLE. On a mêlé 7 litres de vin à 14^s le litre, et 3 litres à 24^s. Déterminer le prix- c'' sous du litre de ce mélange. (*Arith.*, 34^e probl., page 130.)

On connaît $a = 7, c = 14, a' = 3, c' = 24$.

Substituant ces valeurs dans la formule (1), on trouve $c'' = 17$. De sorte que le mélange revient à 17^s le litre.

2^e EXEMPLE. Dans quelle proportion doit-on mêler du vin à 14^s et à 24^s le litre, pour que le mélange revienne à 17^s le litre? (*Arith.*, 36^e probl., page 131.)

On a $c = 14, c' = 24, c'' = 17$.

Il s'agit de trouver le rapport des inconnues a, a' .

La formule (1) donne

$$(2) \dots \frac{a'}{a} = \frac{c'' - c}{c' - c''},$$

ce qui détermine le rapport demandé.

Pour que la question soit possible, il faut et il suffit que la valeur de ce rapport soit positive; ce qui exige que c'' soit compris entre c et c' .

Substituant les valeurs de c, c' et c'' , la formule (2) donne

$$\frac{a'}{a} = \frac{3}{7}.$$

Si l'on prend arbitrairement $a = 7$, on trouvera $a' = 3$.

3^e EXEMPLE. Un marchand a des vins à 14^s et à 24^s le litre. Combien doit-il prendre de litres de chaque espèce pour former un mélange de 100 litres qui revienne à 17^s le litre? (*Arith.*, 37^e probl., page 131.)

On connaît $c = 14, c' = 24, c'' = 17$.

Les inconnues a, a' , doivent satisfaire aux conditions,

$$a + a' = 100, (a + a')c'' = ac'' + a'c''.$$

On déduit de ces deux équations,

$$a = \frac{100(\zeta'' - \zeta''')}{\zeta' - \zeta}, \quad a' = \frac{100(\zeta'' - \zeta)}{\zeta' - \zeta''}.$$

Substituant les valeurs de ζ , ζ' , ζ'' , on trouve $a=70$, $a'=30$.

4^e EXEMPLE. Composer du vin à 17^s le litre, en mêlant du vin à 24^s avec 84 litres à 14^s. (*Arith.*, 38^e probl., page 132.)

Soit a' le nombre de litres cherché.

On connaît $a=84$, $\zeta=14$, $\zeta'=24$, $\zeta''=17$.

La formule (2), (page 81), donne

$$(3) \dots a' = \frac{(\zeta'' - \zeta)a}{\zeta' - \zeta''}.$$

Substituant les valeurs de a , ζ , ζ' , ζ'' , on trouve $a'=36$. Il faut donc ajouter 36 litres à 24^s, aux 84 litres à 14^s.

5^e EXEMPLE. Combien faut-il ajouter d'eau à 12 litres de vin à 15^s le litre, pour que le mélange revienne à 9^s le litre? L'eau ne coûte rien. (*Arith.*, 39^e probl., page 133.)

Pour déduire la solution de ce problème, de la formule (3), il suffit de considérer les a' litres d'eau demandés, comme des litres de vin à 0^s le litre. De sorte qu'on connaît

$$a=12, \quad \zeta=15, \quad \zeta'=0, \quad \zeta''=9.$$

La formule (3) donne $a'=8$. On doit donc ajouter 8 litres d'eau, aux 12 litres de vin à 15^s.

Les formules précédentes conduiront aux solutions des questions qui ont été traitées en Arithmétique. (*Voyez* les problèmes 42^e... 45^e, pages 135 et 136 de l'Arithmétique.)

12^e PROBLÈME. On fait fondre ensemble, a grammes d'or au titre t , et a' grammes au titre t' . Trouver le titre t'' de l'alliage qui en résultera.

Les a grammes au titre t contiennent at grammes d'or (*Arith.*, page 137); les a' grammes au titre t' , contiennent $a't'$ grammes d'or; les $a+a'$ grammes de l'alliage qui en résultera, renfermeront donc $at+a't'$ grammes d'or. Mais d'ailleurs, ces $a+a'$ grammes d'alliage, étant au titre t'' , renferment $(a+a')t''$ grammes d'or. Il faut donc que

$$(a + a')t'' = at + a't'; \text{ d'où (1)... } t'' = \frac{at + a't'}{a + a'}.$$

La formule (1) résout le problème proposé; elle démontre que pour trouver le titre de l'alliage qui résulte de la fonte de plusieurs lingots, il suffit de multiplier le poids de chaque lingot par son titre, et de diviser la somme de ces produits par le poids total de l'alliage. (Arith., page 138.)

Nous allons faire voir que la relation (1) conduit aux solutions des problèmes que nous avons résolus en Arithmétique, sur les alliages de deux métaux; elle fournit le moyen de déterminer l'une quelconque des cinq quantités a , a' , t , t' , t'' , quand les quatre autres sont données.

Lorsqu'on voudra exprimer que l'or est parfaitement pur, on supposera que son titre est égal à l'unité; et quand un lingot ne contiendra pas d'or, son titre par rapport à l'or sera égal à zéro.

1^{er} EXEMPLE. On fait fondre ensemble, 70 grammes d'or au titre 0,90, avec 30 grammes d'or au titre 0,80; trouver le titre t'' de l'alliage qui en résultera. (Arith., 48^e probl., page 138.)

On connaît $a = 70$, $t = 0,90$, $a' = 30$, $t' = 0,80$.

Substituant ces valeurs dans la formule (1), on en déduit $t'' = 0,87$.

2^e EXEMPLE. Dans quelle proportion doit-on allier de l'or à 0,90 de fin, avec de l'or à 0,80, pour composer un alliage au titre 0,87? (Arith., 50^e probl., page 139.)

On connaît $t = 0,90$, $t' = 0,80$, $t'' = 0,87$.

Il s'agit de trouver le rapport des inconnues a , a' .

La formule (1) donne

$$(2)... \frac{a'}{a} = \frac{t - t''}{t'' - t'};$$

ce qui détermine le rapport demandé.

Pour que la question soit possible, il faut et il suffit que la valeur (2) du rapport demandé soit positive; ce qui exige que t'' soit compris entre t et t' .

Substituant les valeurs de t, t', t'' , la formule (2) donne

$$\frac{a'}{a} = \frac{3}{7};$$

ce qui détermine le rapport demandé de a' à a .

Si l'on prend arbitrairement $a=70$, on trouvera $a'=\frac{3}{7}a=30$.

3^e EXEMPLE. Un orfèvre a deux lingots d'or, dont les titres sont 0,90 et 0,80. Combien doit-il prendre de grammes de chaque lingot pour composer 100 grammes d'or au titre 0,87? (*Arith.*, 51^e prob., pages 139 et 140.)

On connaît $t=0,90$, $t'=0,80$, $t''=0,87$.

Les inconnues a, a' doivent satisfaire aux conditions

$$a + a' = 100, \quad (a + a')t'' = at + a't'.$$

On déduit de ces deux équations

$$a = \frac{100(t'' - t')}{t - t'}, \quad a' = \frac{100(t - t'')}{t - t'}.$$

Substituant les valeurs de t, t', t'' , on trouve $a=70$, $a'=30$.

4^e EXEMPLE. Un orfèvre a deux lingots; le premier est composé de 270 grammes d'or et de 30 grammes de cuivre; le deuxième est formé de 40 grammes d'or et de 10 grammes de cuivre. Combien doit-il prendre de chaque lingot pour composer un troisième lingot, du poids de 60 grammes, qui contienne 52^{gr},2 d'or et 7^{gr},8 de cuivre? (*Arith.*, 52^e prob., page 140.)

On déduit de la règle générale qui a été donnée en Arithmétique (pag. 137), que les titres respectifs t, t', t'' , des trois lingots par rapport à l'or, sont

$$t=0,90, \quad t'=0,80, \quad t''=0,87.$$

Les inconnues a, a' , dépendent des équations

$$a + a' = 60, \quad (a + a')t'' = at + a't'.$$

On en déduit

$$a = \frac{60(t'' - t')}{t - t'}, \quad a' = \frac{60(t - t'')}{t - t'}.$$

Substituant les valeurs de t, t', t'' , on trouve $a = 42, a' = 18$.

5^e EXEMPLE. Un orfèvre a 70 grammes d'or à 0,90 de fin ; combien doit-il y ajouter d'or à 0,80 pour abaisser à 0,87, le titre de l'alliage qui en résultera ? (*Arith.*, 53^e prob., page 141.)

Soit a'' le nombre de grammes d'or cherché.

On connaît $a' = 70, t = 0,90, t' = 0,80, t'' = 0,87$.

La formule (2) (page 83), donne

$$(3) \dots a'' = \frac{(t - t') a}{(t'' - t')}.$$

Substituant les valeurs de a, t, t' et t'' , on trouve $a' = 30$. De sorte qu'on doit ajouter 30 grammes d'or à 0,80.

6^e EXEMPLE. Combien faut-il ajouter d'or fin, à 33 grammes d'or à $\frac{5}{11}$, pour élever le titre à $\frac{4}{7}$? (*Arith.*, 54^e prob., p. 141.)

Le titre t' de l'or fin étant égal à l'unité, si a' désigne le nombre de grammes cherché, on connaîtra

$$a = 33, \quad t = \frac{5}{11}, \quad t' = 1, \quad t'' = \frac{4}{7}.$$

La formule (3) donnera $a' = 9$. On doit donc ajouter 9 grammes d'or fin.

7^e EXEMPLE. Combien faut-il ajouter de cuivre, à 108 grammes d'or au titre de $\frac{11}{12}$, pour abaisser le titre à $\frac{9}{10}$? (*Arith.*, 55^e prob., page 142.)

Le titre t' d'un lingot de cuivre pur, pouvant être considéré comme égal à zéro, par rapport à l'or, si a' désigne le nombre de grammes cherché, on connaîtra $a = 108, t = \frac{11}{12}, t' = \frac{9}{10}$.

La formule (3) donnera $a' = 2$.

On doit donc ajouter 2 grammes de cuivre.

13^e PROBLÈME. Un orfèvre a deux lingots ; le 1^{er} est composé de a grammes d'or fin et de b grammes de cuivre ; le 2^e est formé de a' grammes d'or et de b' grammes de cuivre. Combien doit-il prendre de grammes de chaque lingot pour composer un 3^e lingot qui contienne a'' grammes d'or et b'' grammes de cuivre ?

1^{re} SOLUTION Le 1^{er} lingot pèse $a + b$ grammes; il contient a grammes d'or et b grammes de cuivre; donc

1^{er} du 1^{er} lingot renferme $\frac{a^2}{a+b}$ d'or et $\frac{b^2}{a+b}$ de cuivre.

On verra de même que

1^{er} du 2^e lingot renferme $\frac{a'^2}{a'+b'}$ d'or, et $\frac{b'^2}{a'+b'}$ de cuivre.

Par conséquent, si l'on prend x grammes du 1^{er} lingot et x' grammes du 2^e, le 3^e lingot qui en résultera contiendra

$\frac{ax}{a+b} + \frac{a'x'}{a'+b'}$ gram. d'or et $\frac{bx}{a+b} + \frac{b'x'}{a'+b'}$ gram. de cuivre.

On doit donc avoir

$$\frac{ax}{a+b} + \frac{a'x'}{a'+b'} = a'', \quad \frac{bx}{a+b} + \frac{b'x'}{a'+b'} = b''.$$

Si l'on tire de ces deux équations les valeurs des inconnues x, x' , on trouvera,

$$(1) \dots x = \frac{(a''b' - a'b'')(a+b)}{ab' - a'b}, \quad x' = \frac{(ab'' - a''b)(a'+b')}{ab' - a'b}.$$

EXEMPLE. (*Arith.*, 52^e prob., page 140.) Soient

$a = 270, b = 30, a' = 40, b' = 10, a'' = 52,2, b'' = 7,8.$

On trouvera $x = 42, x' = 18.$

2^e SOLUTION. On déduit de la règle qui a été donnée en Arithmétique (page 137), que les *titres* respectifs t, t', t'' , des trois lingots, par rapport à l'or, sont

$$(2) \dots t = \frac{a}{a+b}, \quad t' = \frac{a'}{a'+b'}, \quad t'' = \frac{a''}{a''+b''}.$$

Ces relations feront connaître les *titres* t, t', t'' .

Désignant par x et x' les nombres de grammes demandés, et par c le poids total du 3^e lingot, on aura

$$x + x' = c.$$

Or, les x grammes du 1^{er} lingot au titre t , renferment

at grammes d'or pur, et les a' grammes du 2^e lingot au titre t' , contiennent $a't'$ grammes d'or pur; le 3^e lingot composé de ces $a + a'$ grammes, renferme donc $at + a't'$ grammes d'or pur. Or, ces $a + a'$ grammes d'alliage doivent être au titre t'' ; ils renferment donc $(a + a')t''$ grammes d'or pur. On a donc

$$at + a't' = (a + a')t''. \quad \text{D'ailleurs, } a + a' = \zeta.$$

On déduit de ces deux équations

$$(3) \dots a = \frac{(t'' - t')\zeta}{t - t'}, \quad a' = \frac{(t - t'')\zeta}{t - t'}.$$

Les relations (2) détermineront les titres t, t', t'' , des trois lingots par rapport à l'or; et ensuite les formules (3) donneront les valeurs des inconnues a, a' .

Si l'on veut exprimer a et a' en fonction des données primitives a, b, a', b', a'', b'' , on remplacera t, t' et t'' par leurs valeurs (2), et les relations (3) conduiront aux formules (1).

14^e PROBLÈME. *Composer un alliage d'or et d'argent qui pèse a grammes, de manière que le prix d'un gramme d'alliage soit ζ francs. Les prix respectifs d'un gramme d'or et d'argent sont γ et δ francs. Combien faut-il prendre de grammes de chaque métal, pour former l'alliage demandé?*

Si l'on prend x grammes d'or et y grammes d'argent, on aura

$$x + y = a, \quad \gamma x + \delta y = a\zeta; \quad \text{d'où}$$

$$(1) \dots x = \frac{(\zeta - \delta)a}{\gamma - \delta}, \quad y = \frac{(\gamma - \zeta)a}{\gamma - \delta}.$$

Or, $\gamma > \delta$; et pour que la question soit possible, il faut que ζ soit compris entre γ et δ ; donc

$$\gamma > \delta, \quad \zeta > \delta, \quad \zeta < \gamma.$$

Et en effet, quand ces trois inégalités ont lieu, les formules (1) conduisent à des valeurs positives et finies des inconnues x, y .

Si ζ n'était pas compris entre γ et δ , les formules (1) indiqueraient l'impossibilité du problème en donnant des valeurs négatives de x et y .

15^e PROBLÈME. Un père ordonne, par son testament, que sa fortune sera partagée entre ses trois enfans et sa veuve, de la manière suivante : le 1^{er} prendra le tiers de l'héritage plus 4000^f; le 2^e prendra le quart de la part du 1^{er}, moins 2000^f; le 3^e prendra la moitié de la somme des deux premières parts; et le reste de l'héritage appartiendra à la veuve; elle reçoit 31500 francs. Il s'agit de trouver la valeur de l'héritage, ainsi que les parts des enfans. (*Arith.*, 74^e prob., page 154.)

1^{re} SOLUTION. Soit x francs la valeur de l'héritage, et représentons les parts des trois enfans par y , z et t francs. L'énoncé de la question conduit aux équations

$$(1) \dots y = \frac{1}{3}x + 4000, \quad (2) \dots z = \frac{1}{4}y - 2000,$$

$$(3) \dots t = \frac{1}{2}(y + z), \quad (4) \dots x - (y + z + t) = 31500.$$

Pour en déduire x , y , z et t , on tire d'abord des trois premières équations les valeurs de y , z et t en fonction de x . La valeur (1) de y substituée dans (2), donne

$$(5) \dots z = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + 4000\right) - 2000 = \frac{1}{12}x - 1000.$$

Mettant dans (3), les valeurs (1), (5), de y et z , on trouve

$$(6) \dots t = \frac{5}{24}x + 1500.$$

Si l'on substitue dans (4) les valeurs (1), (5), (6), de y , z , t , on obtiendra une équation en x qui donnera

$$x = 96000.$$

Connaissant x , les relations (1), (5), (6), conduiront à

$$y = 36000, \quad z = 7000, \quad t = 21500.$$

2^e SOLUTION. Il est facile de voir qu'on peut résoudre la question proposée, en ne faisant usage que d'une seule inconnue. En effet, si la valeur de l'héritage était connue, il serait facile d'en déduire les parts des trois enfans, en effectuant les opé-

rations indiquées par le testament. Nous allons donc chercher d'abord la valeur x francs de cet héritage.

D'après les conditions énoncées dans le testament,

Le 1^{er} enfant prend $\frac{1}{3}x + 4000$ francs.

Le 2^e prend $\frac{1}{4}$ de $\left(\frac{1}{3}x + 4000\right) - 2000$, ou $\frac{1}{12}x - 1000$ fr.

La somme de ces deux parts se réduit à $\frac{5}{12}x + 3000$ francs.

Le 3^e enfant prend $\frac{1}{2}$ de $\left(\frac{5}{12}x + 3000\right)$, ou $\frac{5}{24}x + 1500$ fr.

La veuve reçoit 31500 francs.

La somme de ces quatre parts, devant composer l'héritage x francs, il faut que

$$\left(\frac{1}{3}x + 4000\right) + \left(\frac{1}{12}x - 1000\right) + \left(\frac{5}{24}x + 1500\right) + 31500 = x.$$

Cette équation donne

$$x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}x - \frac{5}{24}x = 4000 - 1000 + 1500 + 31500 = 36000.$$

Le plus petit nombre divisible par les dénominateurs 3, 12, 24, étant 24, on multiplie tous les termes par 24; ce qui conduit à

$$24x - \frac{24}{3}x - \frac{24}{12}x - \frac{5 \times 24}{24}x = 36000 \times 24.$$

Effectuant les divisions indiquées, il vient

$$24x - 8x - 2x - 5x = 36000 \times 24.$$

Réduisant, on trouve

$$9x = 36000 \times 24; \text{ d'où } x = \frac{36000 \times 24}{9} = 4000 \times 24 = 96000.$$

Si l'on substitue cette valeur de x , dans les expressions

$$\frac{1}{3}x + 4000, \quad \frac{1}{12}x - 1000, \quad \frac{5}{24}x + 1500,$$

des parts des trois enfans, on trouvera que ces parts sont 36000^f, 7000^f et 21500 francs.

§ IV. *Examen des circonstances particulières que présente la solution des problèmes.*

46. Dans les questions précédentes, les valeurs des inconnues, tirées des équations du problème, ont toujours satisfait à ce problème. Mais *les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations d'un problème, ne conviennent pas toujours à la question proposée* : cela tient à ce qu'il existe des problèmes dans lesquels les inconnues doivent satisfaire à certaines *conditions particulières* qui ne sont pas susceptibles d'être exprimées dans des équations ; alors, les valeurs des inconnues n'étant assujetties qu'aux conditions exprimées par les équations, peuvent ne pas satisfaire aux autres conditions du problème. En voici des exemples :

1^{re} PROBLÈME. *Quel nombre doit-on ajouter à 7, pour obtenir 5?*

Si x désigne l'inconnue, on aura

$$7 + x = 5; \text{ d'où } x = -2.$$

Sous le rapport de l'Algèbre, cette *valeur négative* de x satisfait à la question; car en ajoutant -2 à 7, la somme algébrique est 5.

Mais quand il s'agit d'une addition arithmétique, le problème est absurde.

La valeur négative de x indique comment il faut modifier l'énoncé pour rendre la question arithmétiquement possible; car en changeant le signe de x dans $7 + x = 5$, l'équation $7 - x = 5$ qui en résulte, donne $x = 2$, et l'équation $7 - x = 5$ correspond à cet énoncé : *quel nombre x doit-on soustraire de 7 pour obtenir 5?*

La *solution arithmétique* de ce dernier problème est $x = 2$.

Les valeurs négatives des inconnues indiquent toujours que la question proposée n'est pas ARITHMÉTIQUEMENT possible; c'est-à-dire qu'elle ne peut être résolue dans le sens exact de son énoncé.

2^e PROBLÈME. *Deux courriers partent au même instant et marchent dans le même sens, sur une ligne droite; le 1^{er} courrier a d lieues d'avance sur le 2^e et parcourt v' lieues par heure; le 2^e courrier fait v'' lieues par heure. Il s'agit de trouver dans combien d'heures les courriers se rencontreront, et quels seront les espaces qu'ils auront parcourus.*

On suppose que les vitesses v' , v'' , des courriers sont constantes, c'est-à-dire que les espaces qu'ils parcourent sont proportionnels aux temps employés à les parcourir. Dans ce cas, le mouvement est uniforme, et l'espace parcouru pendant chaque unité de temps mesure la vitesse du mobile.

Pour que les courriers puissent se rencontrer, il faut que celui qui est en arrière marche le plus vite. Donc $v'' > v'$.

Cela posé : soit x heures le temps pendant lequel les courriers doivent marcher pour se rencontrer, et désignons par d' et d'' lieues les distances des points de départ du 1^{er} et du 2^e courrier au point de rencontre; les espaces parcourus en x heures par ces courriers seront $v'x$ et $v''x$ lieues; de sorte qu'on aura

$$d' = v'x, \quad d'' = v''x.$$

Mais, quand le 2^e courrier joint le 1^{er}, l'espace qu'il a parcouru doit être égal à l'espace parcouru par le 1^{er} courrier, augmenté de la distance dont il était en arrière. On a donc

$$d'' = d' + d, \quad \text{ou} \quad v''x = v'x + d.$$

On en déduit

$$(1) \dots x = \frac{d}{v'' - v'}, \quad d' = \frac{v'd}{v'' - v'}, \quad d'' = \frac{v''d}{v'' - v'}.$$

Les formules (1) résolvent le problème proposé; car elles déterminent les valeurs des inconnues x , d' , d'' , en fonction des données v' , v'' , d .

Les raisonnemens employés dans l'Arithmétique (page 152), conduisent aux mêmes résultats. En effet; puisqu'en une heure le 1^{er} courrier fait v' lieues, tandis que le 2^e courrier fait v'' lieues, le 2^e courrier se rapproche du 1^{er} de $v'' - v'$ lieues par

heure; il se rapproche donc d'une lieue en $\frac{1^h}{v'' - v'}$. Mais pour joindre le 1^{er} courrier, il doit s'en rapprocher des d lieues dont il était en arrière; ce rapprochement aura donc lieu en $\frac{d}{v'' - v'}$ heures. Les espaces parcourus pendant ce temps par le 1^{er} et le 2^e courrier seront $\frac{d}{v'' - v'}$ fois v' lieues, et $\frac{d}{v'' - v'}$ fois v'' lieues. Ce qui conduit aux formules (1).

Nous allons discuter les formules (1) en établissant des relations particulières entre les données, et les conséquences que nous en tirerons seront toujours d'accord avec celles qui se déduisent immédiatement de l'énoncé du problème.

Supposons que d et v'' ne changeant pas, v' varie.

1°. Quand v' augmente et s'approche indéfiniment de v'' , sans dépasser v'' , la valeur $\frac{d}{v'' - v'}$ de x reste positive et augmente indéfiniment; ce qui exprime que plus le 1^{er} courrier marche vite, plus il faut de temps au 2^e courrier pour l'atteindre. Cette conclusion est celle qu'on déduirait de l'énoncé du problème.

2°. Lorsque $v'' = v'$, la valeur de x devient infinie; ce qui exprime que les vitesses des courriers étant égales, ces courriers ne pourraient se rencontrer qu'après avoir marché pendant un temps infiniment grand; ce temps ne pouvant jamais finir, l'Algèbre indique ainsi que les courriers ne se rencontreront jamais.

3°. Lorsque $v'' - v'$ et d sont nuls, la valeur de x , qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, est *indéterminée*: car elle dépend de l'équation $(v'' - v')x = d$, qui est vraie quel que soit x .

L'Algèbre indique donc que si les courriers marchent également vite et partent en même temps d'un même point pour suivre la même route, le nombre d'heures après lequel ils se rencontrent reste arbitraire; c'est-à-dire qu'après un temps quelconque, les courriers sont ensemble. Ce qui est d'ailleurs évident.

Il résulte de l'énoncé du problème proposé, que le 2^e courrier ne peut atteindre le 1^{er}, que lorsque v'' surpasse v' . Lorsqu'on suppose au contraire que v'' est moindre que v' , la valeur de x devient négative; ce qui fait voir que les courriers ne peuvent pas se rencontrer en marchant dans le sens indiqué.

Les valeurs de d' et d'' devenant négatives, il faut en conclure que les courriers ne pourraient se rencontrer que s'ils marchaient dans un sens contraire à celui qu'on avait supposé; car alors le 2^e courrier serait en avant du 1^{er}, ces deux courriers marcheraient dans le même sens, et le courrier qui est en arrière, marchant le plus vite, atteindrait nécessairement l'autre courrier.

Si l'on résout le problème dans cette nouvelle hypothèse, on trouvera

$$(2) \dots x = \frac{d}{v' - v''}, \quad d' = \frac{v' d}{v' - v''}, \quad d'' = \frac{v'' d}{v' - v''};$$

et comme $v'' < v'$, ces valeurs de x, d', d'' , sont positives.

1^{re} REMARQUE. La seule différence qui existe entre les deux problèmes qui ont conduit aux formules (1) et (2), est que les espaces v', v'', d', d'' , sont parcourus dans des sens directement opposés; et il est facile de voir que pour déduire les formules (2) des formules

$$(1) \dots x = \frac{d}{v'' - v'}, \quad d' = \frac{v' d}{v'' - v'}, \quad d'' = \frac{v'' d}{v'' - v'},$$

il suffit de changer les signes des quantités v', v'', d', d'' , qui prennent des acceptions directement opposées; car en effectuant ce changement de signes dans (1), on trouve

$$x = \frac{d}{-v'' + v'}, \quad -d' = \frac{-v' d}{-v'' + v'}, \quad d - = \frac{-v'' d}{-v'' + v'};$$

ce qui conduit aux formules (2).

2^e REMARQUE. Lorsqu'on suppose, dans le 2^e problème (page 91), que le 1^{er} courrier, au lieu de marcher dans le sens du 2^e, marche en sens contraire, les courriers viennent l'un vers l'autre; les quantités v', d' , qui exprimaient des espaces parcourus par le 1^{er} courrier marchant dans le sens du 2^e,

prennent des acceptions opposées, car elles désignent des espaces parcourus par le 1^{er} courrier marchant en sens contraire du second. Si l'on résout le problème, dans cette nouvelle hypothèse, on trouvera

$$(3) \dots x = \frac{d}{v'' + v'}, \quad d' = \frac{v' d}{v'' + v'}, \quad d'' = \frac{v'' d}{v'' + v'}.$$

Il est facile de voir que pour déduire ces dernières formules, des formules (1), il n'y a qu'à changer dans (1) les signes des quantités d' , v' , qui prennent des acceptions opposées.

En général : Lorsque les quantités connues sont représentées par des lettres, les formules qui expriment les valeurs des inconnues jouissent de cette propriété, que pour en déduire les solutions des questions qui ne diffèrent du problème primitif qu'en ce que certaines données recevraient des acceptions directement opposées à celles qu'elles avaient d'abord, il suffit de changer les signes de ces données dans les formules primitives.

Pour s'en convaincre, on peut résoudre directement la question proposée, et l'on voit que les quantités qui prennent des acceptions opposées, changent de signes dans les formules.

3^e PROBLÈME. Deux courriers viennent à la rencontre l'un de l'autre et partent en même temps de deux endroits dont la distance est δ lieues; pendant chaque heure, ils se rapprochent de la moitié de la distance qui leur reste à parcourir pour se rencontrer. Déterminer la distance x lieues qui les séparera lorsqu'ils auront marché pendant n heures.

On trouve,
$$x = \frac{\delta}{2^n}.$$

Lorsque δ ne changeant pas, n augmente, $2n$ augmente et x diminue. Quand n devient très grand, x devient très petit; et enfin, lorsque n est plus grand que toute quantité assignable, x est moindre que toute quantité donnée.

Par conséquent, si l'on demande dans combien d'heures les courriers se rencontreront, on trouvera que ce nombre d'heures est infini; ce qui exprime que les courriers ne se rencontreront jamais.

La distance qui sépare les courriers ne saurait devenir nulle, mais elle diminue continuellement à mesure que n augmente, et peut devenir moindre que toute quantité donnée.

Dans le 2^e problème (2^e, page 92), la valeur infinie qu'on obtient pour x , lorsque $v'' = v'$, indique également que les courriers ne se rencontreront pas, mais avec cette différence, que la distance qui les sépare reste invariable.

Les valeurs infinies des inconnues n'indiquent donc pas toujours le même genre d'impossibilité.

4^e PROBLÈME. Un père ordonne par son testament que l'aîné de ses fils prendra 100^f sur la totalité de l'héritage, plus le dixième de ce qui restera; que le second enfant prendra 200^f et le dixième de ce qui restera lorsqu'on aura diminué l'héritage de 200^f et de la 1^{re} part; que le troisième prendra 300^f, plus le dixième de ce qui restera; et ainsi de suite. Toutes les parts se trouvent égales. Il faut trouver la valeur de l'héritage, la part de chaque enfant, et le nombre des enfans.

Si l'on désigne par x francs la valeur de l'héritage, on trouvera que les deux premières parts sont $\frac{1}{10}(x + 900)$ et $\frac{1}{10}(9x + 17100)$ francs.

Ces deux parts devant être égales, on a

$$\frac{1}{10}(x + 900) = \frac{1}{10}(9x + 17000); \text{ d'où } x = 8100.$$

Si l'on distribue l'héritage 8100 francs selon les volontés du testateur, on verra que chaque enfant reçoit 900 francs, et qu'il y a neuf enfans.

REMARQUE. Pour déterminer l'inconnue x , on a seulement exprimé que la part du fils aîné était égale à celle du second enfant, et cependant la valeur de x a satisfait à toutes les autres conditions du problème. Si l'on veut découvrir à quoi tient cette circonstance particulière, on calculera successivement les différences entre les parts des enfans; on trouvera que ces différences contiennent le facteur commun $x - 8100$; la valeur $x = 8100$ réduisant ces différences à zéro, toutes les parts deviennent égales, comme l'exige l'énoncé.

Les problèmes de cette espèce n'étant possibles que lorsque

les données satisfont à des conditions particulières, nous allons chercher ces conditions, en résolvant la question suivante :

5^e PROBLÈME. On partage une somme inconnue x francs entre plusieurs personnes. La 1^{re} reçoit a francs, plus la $n^{\text{ième}}$ partie de ce qui reste après avoir prélevé ces a francs sur les x francs. La 2^e personne reçoit $2a$ francs, plus la $n^{\text{ième}}$ partie de ce qui reste lorsqu'on a prélevé sur les x francs, les $2a$ francs et la 1^{re} part. La 3^e reçoit $3a$ francs, plus la $n^{\text{ième}}$ partie de ce qui reste lorsqu'on a prélevé sur les x francs, les $3a$ francs et la somme des deux premières parts ; et ainsi de suite. Il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que la question soit possible, et de déterminer la valeur x francs de chaque part, le nombre m des parts, et la somme x francs qui a été partagée. On connaît a et n .

Nous exprimerons d'abord que toutes les parts sont égales entre elles. Nous en déduirons la valeur de la somme x francs de ces parts, et le nombre m des parts.

Soient, $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$, les m parts. D'après la loi donnée pour la formation de ces parts, on a

$$y_1 = a + \frac{x - a}{n},$$

$$y_2 = 2a + \frac{x - 2a - y_1}{n},$$

$$y_3 = 3a + \frac{x - 3a - y_1 - y_2}{n},$$

$$\vdots$$

$$y_p = pa + \frac{x - pa - y_1 - y_2 - \dots - y_{p-1}}{n},$$

$$y_{p+1} = (p+1)a + \frac{x - (p+1)a - y_1 - y_2 - \dots - y_{p-1} - y_p}{n}.$$

$$\text{D'où,} \quad y_{p+1} - y_p = a - \frac{1}{n}(a + y_p).$$

Pour que toutes les parts soient égales entre elles, il faut et il suffit que la différence $y_{p+1} - y_p$ soit nulle quel que soit p . Ce

qui donne

$$\alpha - \frac{1}{n}(\alpha + y_p) = 0; \text{ d'où } y_p = (n-1)\alpha.$$

La seule condition nécessaire et suffisante pour l'égalité de toutes les parts est donc qu'elles aient chacune pour valeur $(n-1)\alpha$. De sorte que

$$z = (n-1)\alpha.$$

On trouvera la somme x qui satisfait à cette condition, en égalant la 1^{re} part à $(n-1)\alpha$; ce qui donnera

$$\alpha + \frac{x-\alpha}{n} = (n-1)\alpha; \text{ d'où } x = (n-1)^2\alpha.$$

Cette valeur de x exprime que toutes les parts sont égales à $(n-1)\alpha$, et que leur somme est $(n-1)^2\alpha$.

Les nombres n, α , étant donnés, on en déduira les valeurs d'une part quelconque $(n-1)\alpha$, et de la somme $(n-1)^2\alpha$ de toutes les parts; et comme on a exprimé que toutes ces parts sont égales entre elles, on obtiendra leur nombre en divisant $(n-1)^2\alpha$ par $(n-1)\alpha$. Le quotient $n-1$ sera donc égal au nombre m des parts. De sorte que $m = n-1$.

Il est facile de s'assurer que si l'on partage la somme $(n-1)^2\alpha$ d'après la loi énoncée, chaque part sera égale à $(n-1)\alpha$.

EXEMPLE. Soient $\alpha = 100$, $n = 10$. On en déduira $x = 8100$. Chaque part sera $(n-1)\alpha$ francs, ou 900 francs, et le nombre des parts sera $n-1$ ou 9. Ce qui fournit la solution du 4^e problème. (Page 95.)

REMARQUE. Après avoir démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les parts formées suivant la loi indiquée soient égales, est que chacune d'elles soit $z = (n-1)\alpha$, on peut trouver m et x en exprimant que la somme des m parts compose la somme x à partager. En effet; la $m^{\text{ième}}$ part étant formée de $m\alpha$ et de la $n^{\text{ième}}$ partie de ce qui restera quand on aura diminué x de $m\alpha$ et de la somme des $m-1$ autres parts précédentes, il en résulte que si l'on exprime que la $m^{\text{ième}}$ part est mx , on sera certain que x diminué des m parts est égal à zéro;

de sorte que la valeur de x , déduite de cette hypothèse, sera égale à la somme de ces m parts. Mais d'ailleurs, chaque part doit être égale à $(n-1)\alpha$. On a donc

$$m\alpha = (n-1)\alpha; \text{ d'où } m = n-1.$$

Les relations $x = (n-1)\alpha$, $m = n-1$,

exprimant que chaque part, formée suivant la loi indiquée, est égale à $(n-1)\alpha$, et que le nombre des parts est $n-1$, la somme x de ces $n-1$ parts est $n-1$ fois $(n-1)\alpha$ ou $(n-1)^2\alpha$.

§ V. *Formules générales pour la résolution des Equations du premier degré.*

47. Pour obtenir des formules générales, qui déterminent les valeurs des inconnues, dans tous les systèmes d'équations qui ne diffèrent que par les coefficients des inconnues, on représente ces coefficients par des lettres, et on rend les résultats symétriques en désignant les coefficients d'une même inconnue par la même lettre affectée de plusieurs *accens*, selon le nombre des équations. On verra (*remarque* de la page 104), que cette notation a aussi l'avantage de réduire le calcul de toutes les inconnues à celui d'une seule inconnue.

Deux équations du premier degré entre deux inconnues, peuvent toujours se ramener à la forme

$$(1) \dots ax + by = c, \quad (2) \dots a'x + b'y = c',$$

a, b, c, a', b' et c' , désignant des quantités connues, positives ou négatives.

Nous allons résoudre ces équations par différentes méthodes.

1^{re} MÉTHODE. On tire de l'équation (1)

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

La substitution de cette valeur de y , dans l'équation (2), donne

$$a'x + \frac{b'}{b}(c - ax) = c'; \text{ d'où } (3) \dots x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Pour trouver y , on met la valeur (3) de x dans (1); il vient

$$a \left(\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \right) + by = c; \text{ d'où (4) } \dots y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

La substitution de la valeur (3) de x , dans l'équation (2), conduirait au même résultat.

2^e MÉTHODE. On tire des équations (1) et (2),

$$(5) \dots y = \frac{c - ax}{b}, \quad (6) \dots y = \frac{c' - a'x}{b'}.$$

Ces deux valeurs de x devant être égales, on a

$$(7) \dots \frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'}.$$

L'équation (7) conduit à l'expression (3) de x .

La valeur (3) de x , substituée dans (5) donne la valeur (4) de y .

On parviendrait nécessairement au même résultat en substituant la valeur (3) de x dans l'expression (6) de y ; car on a déduit x de l'équation (7) qui indique que les valeurs (5), (6) de y sont égales entre elles.

3^e MÉTHODE. Lorsque les coefficients b, b' , de y , sont égaux, on peut éliminer y , en retranchant les équations (1), (2), l'une de l'autre; l'équation $(a' - a)x = c' - c$, qui en résulte, détermine x .

Quand les coefficients de y ne sont pas égaux, on ramène ce cas au précédent, en multipliant les deux membres de l'équation (1) par b' , et ceux de l'équation (2) par b ; ce qui donne

$$ab'x + bb'y = cb', \quad ba'x + bb'y = bc'.$$

Retranchant la 2^e équation de la 1^{re}, on sera conduit à la formule (3).

Pour obtenir la formule (4), on multiplie les deux membres de l'équation (1) par a' , ceux de l'équation (2) par a , et on retranche ensuite les nouvelles équations l'une de l'autre.

4^e MÉTHODE. On multiplie l'équation (1) $\dots ax + by = c$, par une indéterminée m ; on retranche du résultat l'équation,

$$(2) \dots a'x + b'y = c', \text{ ce qui donne} \\ (am - a')x + (bm - b')y = cm - c'.$$

Les valeurs de x et y se déduisent de cette dernière équation, en disposant de l'indéterminée m de manière que le coefficient de l'inconnue qu'on veut éliminer se réduise à zéro.

Ainsi, pour trouver x , on fait disparaître y en posant

$$bm - b' = 0; \text{ d'où } m = \frac{b'}{b} \text{ et } (am - a')x = cm - c'.$$

Remplaçant m par $\frac{b'}{b}$, cette dernière équation conduit à

$$(3) \dots x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Pour trouver y , on ferait

$$am - a' = 0; \text{ d'où } m = \frac{a'}{a} \text{ et } (bm - b')y = cm - c'.$$

Substituant dans cette dernière équation la valeur $\frac{a'}{a}$ de m , on parvient à

$$(4) \dots y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Il est facile de s'assurer que les valeurs (3), (4), de x et y , satisfont aux équations (1), (2).

Par exemple, la substitution de ces valeurs dans l'équation $ax + by = c$, donne l'identité

$$a \left(\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \right) + b \left(\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \right) = \frac{c(ab' - ba')}{ab' - ba'} = c.$$

Trois équations du premier degré à trois inconnues, peuvent toujours se ramener à la forme

$$(1) \dots ax + by + cz = d, \quad (2) \dots a'x + b'y + c'z = d',$$

$$(3) \dots a''x + b''y + c''z = d''.$$

On détermine les valeurs des inconnues x, y, z , par des méthodes analogues aux précédentes.

1^{re} MÉTHODE. L'équation (1) résolue par rapport à z donne

$$z = \frac{d - ax - by}{c}.$$

La substitution de cette valeur de z , dans les équations (2), (3), conduit à

$$(a'c - ac')x + (b'c - bc')y = (cd' - c'd),$$

$$(a''c - ac'')x + (b''c - bc'')y = (cd'' - c''d).$$

Ces deux équations entre x et y , résolues par l'une des quatre méthodes précédentes, donnent

$$(4) \dots x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

$$(5) \dots y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

La substitution de ces valeurs de x et y , dans la valeur $\frac{d - ax - by}{c}$ de z , ou dans l'une quelconque des équations proposées, conduit à

$$(6) \dots z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

REMARQUE. Les équations $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$, ayant donné $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$, $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$,

on voit que pour déduire de ces formules les valeurs de x et y , qui conviennent aux équations.

$$(a'c - ac')x + (b'c - bc')y = cd' - c'd,$$

$$(a''c - ac'')x + (b''c - bc'')y = cd'' - c''d,$$

il suffit de remplacer

$$a, \quad b, \quad c, \quad a', \quad b', \quad c',$$

par $a'c - ac'$, $b'c - bc'$, $cd' - c'd$, $a''c - ac''$, $b''c - bc''$, $cd'' - c''d$;

ce qui conduit à,

$$x = \frac{(cd' - c'd)(b''c - bc'') - (b'c - bc')(cd'' - c''d)}{(a'c - ac')(b''c - bc'') - (b'c - bc')(a''c - ac'')},$$

$$y = \frac{(a'c - ac')(cd'' - c''d) - (cd' - c'd)(a''c - ac'')}{(a'c - ac')(b''c - bc'') - (b'c - bc')(a''c - ac'')}.$$

Effectuant les multiplications indiquées, et réduisant les termes semblables, on obtiendra les formules (4) et (5).

2^e MÉTHODE. On résout les équations proposées par rapport à z , ce qui donne

$$(7) \dots z = \frac{d - ax - by}{c}, \quad z = \frac{d' - a'x - b'y}{c'}, \quad z = \frac{d'' - a''x - b''y}{c''}.$$

On égale successivement la 1^{re} valeur de z aux deux autres; cela fournit deux équations entre x et y , qui conduisent aux formules (4), (5). La substitution des valeurs (4), (5) de x , y , dans l'une quelconque des expressions (7) de z , conduit à la valeur (6) de z .

3^e MÉTHODE. Pour éliminer z entre les équations

$$(1) \dots ax + by + cz = d, \quad (2) \dots a'x + b'y + c'z = d',$$

on multiplie tous les termes de la 1^{re} par c' et ceux de la 2^e par c ; ce qui donne

$$ac'x + bc'y + cc'z = c'd$$

$$a'cx + b'cy + cc'z = cd'.$$

Retranchant ces deux dernières équations l'une de l'autre, il vient

$$(8) \dots (a'c - ac')x + (b'c - bc')y = cd' - c'd.$$

L'équation (3) $\dots a''x + b''y + c''z = d''$, se déduisant de l'équation (2) en changeant a' , b' , c' , d' , en a'' , b'' , c'' , d'' , on obtiendra l'équation résultante de l'élimination de z entre (1) et (3), en effectuant ce changement dans (8); ce qui donnera

$$(9) \dots (a''c - ac'')x + (b''c - bc'')y = cd'' - c'd.$$

La résolution des équations (8), (9), conduira aux valeurs (4), (5) de x , y ; et ces valeurs mises dans l'une quelconque des équations proposées, fourniront une équation en z qui déterminera cette inconnue.

4^e MÉTHODE. On multiplie les équations (1), (2), par des indéterminées m, n , ce qui donne

$$amx + bmy + cmz = dm, \quad a'nx + b'ny + c'nz = d'n.$$

On ajoute ces deux équations, et on en retranche l'équation $a''x + b''y + c''z = d''$; il en résulte

$$(am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y + (cm + c'n - c'')z = dm + d'n - d''.$$

Les valeurs de x, y, z , se déduisent successivement de cette dernière équation en disposant des deux indéterminées m, n , de manière que les coefficients des deux inconnues qu'on veut éliminer se réduisent à zéro.

Ainsi, pour trouver x , on pose

$$bm + b'n = b'', \quad cm + c'n = c''.$$

Ces deux équations fourniront les valeurs de m et n , qui réduisent les coefficients de y et z à zéro, et la substitution de ces valeurs de m et n dans la relation

$$(am + a'n - a'')x = dm + d'n - d'',$$

conduira à la valeur (4) de x (page 101).

REMARQUE. Les équations

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c',$$

$$\text{ayant donné} \quad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

on voit que pour déduire de ces formules les valeurs de m et n , qui satisfont aux équations

$$bm + b'n = b'', \quad cm + c'n = c'',$$

il suffit d'y changer

$$\begin{array}{l} a, b, c, a', b', c', x, y, \\ \text{en} \quad b, b', b'', c, c', c'', m, n; \end{array}$$

ce qui conduit à

$$m = \frac{b''c' - b'c''}{bc' - b'c}, \quad n = \frac{bc'' - b''c}{bc' - b'c}.$$

Substituant ces valeurs de m et n dans la relation

$$(am + a'n - a'')x = dm + d'n - d'',$$

on parviendra à la valeur (4) de x . (Page 101.)

Des calculs analogues conduiront aux valeurs (5), (6), de y et de z .

5^e MÉTHODE. Les équations

$$(1) \dots ax + by + cz = d, \quad (2) \dots a'x + b'y + c'z = d',$$

donnent $ax + by = d - cz$, $a'x + b'y = d' - c'z$.

On pose $d - cz = \gamma$, $d' - c'z = \gamma'$; d'où

$$ax + by = \gamma, \quad a'x + b'y = \gamma'.$$

Les valeurs de x et y , qui satisfont à ces deux dernières équations, se déduisent des formules (3), (4), (pages 98, 99), en y changeant c et c' en γ et γ' ; ce qui conduit à

$$(10) \dots x = \frac{\gamma b' - b \gamma'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{a \gamma' - \gamma a'}{ab' - ba'}.$$

On substitue ces valeurs de x et y dans l'équation

$$(3) \dots a''x + b''y + c''z = d'',$$

on chasse le dénominateur $ab' - ba'$, et on remplace ensuite les lettres γ, γ' , par leurs valeurs $d - cz$, $d' - c'z$; on obtient ainsi une équation en z , qui conduit à la valeur (6) de z . (Page 101.)

Connaissant z , on en déduit les valeurs $d - cz$, $d' - c'z$, de γ et γ' , et ensuite les formules (10) déterminent x et y .

Des calculs analogues aux précédents, conduiront aux expressions générales des inconnues dans quatre équations entre quatre inconnues; et ainsi de suite.

REMARQUE. La notation symétrique que nous avons adoptée, offre cet avantage, que lorsqu'on est parvenu à l'expression générale de l'une des inconnues, on peut toujours en déduire immédiatement les valeurs des autres inconnues.

Par exemple, pour déduire la valeur (5) de y , de la valeur (4) de x (page 101), on observe que les équations proposées $ax + by + cz = d$, $a'x + b'y + c'z = d'$, $a''x + b''y + c''z = d''$,

restant les mêmes quand on change

$$\begin{array}{l} a, a', a'', x, b, b', b'', y, \\ \text{en} \quad b, b', b'', y, a, a', a'', x, \end{array}$$

toutes les formules qu'on en déduit doivent jouir de la même propriété; effectuant ce changement dans (4) (page 101), on obtient la valeur (5) de y . (Page 101.)

48. Pour faire servir les formules générales que nous venons d'obtenir, à la résolution des équations numériques, on chasse d'abord tous les dénominateurs, afin qu'après avoir ramené ces équations aux formes

$$ax + by = c, \quad ax + by + cz = d, \text{ etc.},$$

les lettres a, b, c, d , etc., représentent des nombres entiers positifs ou négatifs. On substitue, dans les formules indiquées, les valeurs numériques de a, b, c, d , etc., qui conviennent aux équations proposées; cela fournit les valeurs numériques des inconnues x, y, z , etc.

1^{er} EXEMPLE. Soient, $2x + 3y = 8, \quad 4x - y = 2$.

Comparant ces équations avec les équations littérales

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c',$$

on a, $a = 2, \quad b = 3, \quad c = 8, \quad a' = 4, \quad b' = -1, \quad c' = 2$.

La substitution de ces valeurs de a, b, c, a', b', c' , dans les formules générales (3), (4), (pages 98 et 99), conduit à $x = 1, \quad y = 2$.

2^e EXEMPLE. Soient les trois équations numériques

$$3x + 2y + z = 16, \quad 2x + 2y + 2z = 18, \quad 2x + 2y + z = 14;$$

en les comparant aux équations littérales

$$(1) \dots ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d', \quad a''x + b''y + c''z = d'',$$

on a

$$\begin{array}{l} a = 3, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = 16, \quad a' = b' = c' = 2, \quad d' = 18, \\ \quad \quad \quad a'' = b'' = 2, \quad c'' = 1, \quad d'' = 14. \end{array}$$

Substituant ces valeurs dans les formules (4), (5), (6),

(pag. 101), on trouve $x = 2, y = 3, z = 4$. Ce qui s'accorde avec l'exemple du n° 41.

REMARQUE. Tous les termes de l'équation $2x + 2y + 2z = 18$, étant divisibles par 2, on simplifie le calcul en effectuant d'abord cette division; ce qui donne $x + y + z = 9$. Il suffisait donc de faire

$$a = 3, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = 16, \quad a' = b' = c' = 1, \quad d' = 9, \\ a'' = b'' = 2, \quad c'' = 1, \quad d'' = 14,$$

dans les formules générales, (4), (5), (6). (Page 101.)

$$3^{\circ} \text{ EXEMPLE. Soient, } \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y + z = -4,$$

$$\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y = 7, \quad \frac{5}{6}y + \frac{2}{3}z = -1.$$

On fait d'abord disparaître les dénominateurs, ce qui donne $9x - 8y + 12z = -48, \quad 5x - 3y = 42, \quad 5y + 4z = -6$.

Comparant avec les équations (1), (page 105), il vient

$$a = 9, \quad b = -8, \quad c = 12, \quad d = -48, \quad a' = 5, \quad b' = -3, \\ c' = 0, \quad d' = 42, \quad a'' = 0, \quad b'' = 5, \quad c'' = 4, \quad d'' = -6.$$

La substitution de ces valeurs dans les formules (4), (5), (6) (page 101), conduit à

$$x = 12, \quad y = 6, \quad z = -9.$$

49. En comparant les valeurs générales des inconnues, aux équations qui les ont fournies, on découvre une règle pour former ces valeurs. En effet :

1°. Si l'on compare dans le n° 47, les formules (3), (4), avec les équations (1), (2), on verra que le dénominateur commun $ab' - ba'$ des valeurs de x et de y , est composé des coefficients des inconnues; pour l'obtenir, il suffit de former les *permutations* (*), ab, ba , du produit ab , d'affecter la 1^{re} du signe

(*) Les *permutations* d'un produit sont les diverses formes que prend ce produit quand ses facteurs ne font que changer de place.

+, la 2^e du signe —, et de mettre un *accent* à la 2^e lettre de chaque permutation; les numérateurs $cb' - bc'$, $ac' - ca'$ des valeurs de x et y , se déduisent du dénominateur $ab' - ba'$, en remplaçant le coefficient de l'inconnue qu'on veut trouver par le terme tout connu.

Ainsi, le numérateur $cb' - bc'$ de x se déduit du dénominateur $ab' - ba'$, en changeant les coefficients a, a' de x , en c et c' .

2°. La comparaison des formules (4), (5), (6), (page 101), avec les équations

$$ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d', \quad a''x + b''y + c''z = d'',$$

fait voir que le dénominateur commun des valeurs de x, y, z , est composé des coefficients des inconnues. Pour obtenir ce dénominateur, on prend les *permutations* $+ab, -ba$, dans chacune desquelles on introduit successivement la lettre c , à la 3^e place, à la 2^e et à la 1^{re}, en ayant soin de donner à chaque première permutation de trois lettres, le signe de la permutation de deux lettres qui l'a fournie, et de changer alternativement les signes des autres permutations; on réunit ces permutations du produit abc , on met un *accent* à la 2^e lettre de chaque permutation et deux accens à la 3^e lettre; le résultat

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'',$$

est le dénominateur commun demandé.

Les numérateurs des valeurs de x, y, z se déduisent de ce dénominateur, en remplaçant le coefficient de l'inconnue qu'on veut trouver, par le terme tout connu et en conservant les accens.

Par exemple, pour former le numérateur de la valeur de x , on remplacera dans le dénominateur les coefficients a, a', a'' , de x , par les termes tout connus d, d', d'' ; ce qui donnera le numérateur demandé

$$db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''.$$

REMARQUE. Pour que cette manière de former les expressions générales des valeurs des inconnues convienne à n équations entre n inconnues, il est indispensable de former les permu-

tations des coefficients des n inconnues, dans l'ordre que nous avons indiqué.

On trouve, de cette manière, que dans quatre équations de la forme $ax + by + cz + dt = e$, le dénominateur commun des valeurs des inconnues x, y, z, t , est la somme des 24 termes,

$$\begin{aligned} &+ ab'c'd'', - ab'd''c'', + ad'b''c'', - da'b''c'', - ac'b''d'', + ac'd''b'', \\ &- ad'c''b'', + da'c''b'', + ca'b''d'', - ca'd''b'', + cd'a''b'', - dc'a''b'', \\ &- ba'c''d'', + ba'd''c'', - bd'a''c'', + db'a''c'', + bc'a''d'', - bc'd''a'', \\ &+ bd'c''a'', - db'c''a'', - cb'a''d'', + cb'd''a'', - cd'b''a'', + dc'b''a''. \end{aligned}$$

Pour en déduire le numérateur de x , il suffit de changer les a en e , et de conserver les accens. On obtiendra le numérateur de y , en changeant les b en e ; et ainsi de suite.

50. Lorsqu'on a n équations littérales entre $n + m$ inconnues, il existe une infinité de manières de satisfaire à ces équations; car en assignant des valeurs arbitraires à m inconnues, il reste n équations qui servent à déterminer les n autres inconnues.

On peut aussi déduire de ces équations, les valeurs de n inconnues, en fonction des m autres inconnues.

1°. Soit le système

$$ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d'.$$

Pour déterminer x et y en fonction de z , on peut faire

$$d - cz = C, \quad d' - c'z = C';$$

les équations données deviennent

$$ax + by = C, \quad a'x + b'y = C'; \quad \text{d'où}$$

$$(1) \dots x = \frac{Cb' - bC'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{aC' - Ca'}{ab' - ba'}.$$

Remplaçant C et C' par $d - cz$ et $d' - c'z$, on a

$$x = \frac{(d - cz)b' - b(d' - c'z)}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{a(d' - c'z) - (d - cz)a'}{ab' - ba'},$$

ce qui revient à

$$x = \frac{(db' - bd') + (bc' - b'c)z}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{(ad' - da') + (a'c - ac')z}{ab' - ba'}.$$

Ces valeurs de x et y , en fonction de z , satisfont aux équations proposées, quel que soit z ; car en les substituant dans ces équations, on parvient à des identités.

2°. Soient,

$$ax + by + cz + dt = e, \quad a'x + b'y + c'z + d't = e'.$$

Pour exprimer x et y en fonction de z et t , on peut poser

$$e - cz - dt = C, \quad e' - c'z - d't = C';$$

les équations données reviennent à

$$ax + by = C, \quad a'x + b'y = C'.$$

Ces dernières conduisent aux formules (1), et pour en déduire x et y en fonction de z et t , il suffit de remplacer C et C' par $e - cz - dt$ et $e' - c'z - d't$. Les valeurs de x et y en fonction de z et t satisferont aux équations données quels que soient z et t ; car en les substituant dans ces équations, on parviendra à des identités.

51. Enfin, lorsqu'on a $n + m$ équations entre n inconnues, on tire les valeurs des n inconnues, de n quelconques de ces équations, et la substitution de ces valeurs dans les m autres équations, conduit à m équations de condition entre les coefficients des inconnues et les termes tout connus; la possibilité du système des équations proposées dépend de l'existence de ces équations de condition.

1°. Soit le système

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c', \quad a''x + b''y = c'';$$

il fournit une équation de condition, car les deux premières équations donnent

$$(1) \dots x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

et la substitution de ces valeurs de x et y dans $a''x + b''y = c''$,

conduit à l'équation de condition

$$(2) \dots (cb' - bc') a'' + (ac' - ca') b'' = (ab' - ba') c''.$$

Quand la condition (2) est satisfaite, les formules (1) déterminent les valeurs de x et y qui satisfont aux équations proposées.

Par exemple, soit le système

$$2x - y = 1, \quad 5x - 2y = 4, \quad 3x + y = 9,$$

on a

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad a' = 5, \quad b' = -2, \quad c' = 4, \\ a'' = 3, \quad b'' = 1, \quad c'' = 9.$$

Ces valeurs réduisant chaque membre de la relation (2) à $+9$, le système proposé est possible. Et en effet, les formules (1) donnent $x = 2$, $y = 3$, et ces valeurs de x , y , satisfont à la 3^e équation $3x + y = 9$.

On verra de même que le système

$$2x - y = 1, \quad 5x - 2y = 4, \quad 3x + y = 10,$$

n'admet aucune solution.

2°. Soient

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c', \quad a''x + b''y = c'', \quad a'''x + b'''y = c'''. \quad \text{c.}$$

Ce système fournira deux équations de condition; car les deux premières équations conduisent aux formules (1), et la substitution des valeurs (1) de x et y , dans les deux autres équations données, fournit ces deux équations de condition,

$$(cb' - bc') a'' + (ac' - ca') b'' = (ab' - ba') c'', \\ (cb'' - bc'') a''' + (ac'' - ca'') b''' = (ab'' - ba'') c''.$$

On trouvera de cette manière que le système

$$2x - y = 1, \quad 5x - 2y = 4, \quad 3x + y = 9, \quad 3x - y = 3,$$

admet la solution $x = 2$, $y = 3$; et que le système

$$2x - y = 1, \quad 5x - 2y = 4, \quad 3x + y = 9, \quad 3x - y = 2,$$

n'admet aucune solution commune.

§ VI. *Examen des circonstances particulières que présente la résolution des équations du premier degré.*

52. Nous avons supposé dans les n^{os} 47 et 48, que toutes les équations proposées étaient *distinctes*, c'est-à-dire qu'elles ne pouvaient pas se déduire les unes des autres, et que d'ailleurs elles n'exprimaient pas des conditions contradictoires; mais comme il n'en est pas toujours ainsi, nous allons discuter successivement les différens cas qui peuvent se présenter.

On dit que des équations sont *possibles*, quand il existe des valeurs finies des inconnues qui rendent toutes ces équations identiques. Selon que des équations admettent un nombre fini ou infini de solutions, ces équations sont *déterminées* ou *indéterminées*. Enfin, nous dirons que des équations sont *impossibles*, ou *incompatibles*, ou *contradictaires*, quand elles ne pourront être satisfaites par aucunes valeurs finies des inconnues.

Nous allons d'abord traiter les équations numériques; nous verrons ensuite comment on peut interpréter les formes particulières que prennent les expressions générales des inconnues dans les équations littérales.

53. Lorsqu'en combinant des *équations numériques* pour en déduire les valeurs des inconnues, on parvient à une équation qui ne renferme plus d'inconnue, cette équation peut toujours se ramener à l'une des formes $0 = 0$, $a = 0$ (a désignant un nombre); dans le 1^{er} cas, les équations proposées sont *indéterminées*, et dans le 2^e cas elles sont *impossibles*. En voici des exemples :

1°. L'équation $3(4x + 12) = 4(3x + 9)$.

admet une infinité de solutions; car elle se réduit à l'identité $0 = 0$, qui est vraie quel que soit x .

2°. L'équation $3(4x + 12) = 4(3x + 2)$

ne peut être satisfaite par aucune valeur finie de x ; car elle conduit à l'absurdité $36 = 8$, qui revient à $28 = 0$.

3°. Les équations $6x + 3y = 3$, $4x + 2y = 2$,
sont *indéterminées*, car l'élimination de x conduit à $0 = 0$.

La multiplication des deux membres de la 1^{re} équation par $\frac{3}{2}$ donnant la 2^e équation, celle-ci n'est qu'une conséquence immédiate de la 1^{re}; de sorte qu'on peut effectivement assigner des valeurs arbitraires à x ou à y : l'une quelconque des équations proposées fournit les valeurs correspondantes de l'autre inconnue.

4°. Les équations $x + 2y = 5$, $3x + 6y = 2$,
sont *contradictoires*; car l'élimination de x conduit à l'absurdité $13 = 0$.

La multiplication des deux membres de la 1^{re} équation par 3, rend cette absurdité évidente; car le résultat $3x + 6y = 15$ ne peut s'accorder avec la 2^e équation, $3x + 6y = 2$.

Chacune des équations proposées admet une infinité de solutions, mais aucune des solutions de $x + 2y = 5$ ne convient à $3x + 6y = 2$.

5°. Soient $x + y + z = 3$, $2x + 2y + 2z = 1$, $x - y - z = 1$.

Aucunes valeurs finies de x, y, z ne peuvent satisfaire au système de ces trois équations; car l'élimination de z entre les deux premières, conduit à $5 = 0$.

Et en effet, la multiplication des deux membres de la 1^{re} équation par 2, donne $2x + 2y + 2z = 6$; ce qui ne peut s'accorder avec la 2^e équation, $2x + 2y + 2z = 1$.

Occupons-nous des *équations littérales*.

54. Toute équation du premier degré à une seule inconnue peut se ramener à la forme (1)... $ax = b$. Suivant que cette équation est *indéterminée* ou *impossible*, l'expression générale $\frac{b}{a}$ de x , prend la forme *indéterminée* $\frac{0}{0}$, ou la valeur infinie $\frac{b}{0}$; la réciproque est vraie. En effet :

1°. Quand l'équation (1) est *indéterminée*, il existe une infinité de valeurs arbitraires de x qui y satisfont; si α et β sont

deux de ces valeurs, on aura

$$ax = b, a\beta = b; \text{ d'où } a(\alpha - \beta) = 0;$$

et comme $\alpha - \beta$ n'est pas nul, il faut que $a = 0$; mais $b = a\alpha$;

donc $b = 0$, et par suite $x = \frac{0}{0}$.

REMARQUE. Toutes les fois que deux valeurs différentes de x satisfont à l'équation (1), a et b sont nécessairement nuls; de sorte que cette équation est *identique*; on peut donc assigner des valeurs arbitraires à x .

RÉCIPROQUEMENT, lorsque la valeur $\frac{b}{a}$ de x se réduit à $\frac{0}{0}$, l'équation (1) est indéterminée; car a et b étant nuls, des valeurs arbitraires de x satisfont à cette équation.

2°. Quand l'équation (1) est *impossible*, aucune valeur finie de x , ne peut rendre le produit ax égal à b ; il faut donc que $a = 0$ et que b ne soit pas nul; car autrement une valeur finie $\frac{b}{a}$ de x rendrait ax identiquement égal à b ; la valeur $\frac{b}{a}$ de x est donc une expression infinie de la forme $\frac{b}{0}$.

RÉCIPROQUEMENT, lorsque la valeur $\frac{b}{a}$ de x est infinie, le coefficient a de x est nul, et b n'est pas zéro. L'équation (1) est *impossible*; car elle se réduit à $0 \times x = b$, et aucune valeur finie de x ne peut rendre le produit $0 \times x$ égal à la quantité finie b .

REMARQUE. Lorsque a étant nul, b n'est pas zéro, la valeur infinie que l'on obtient pour x , exprime qu'il n'existe aucun nombre qui, mis à la place de x , puisse rendre ax égal à b , mais que l'erreur sera d'autant moindre que x sera plus grand.

En effet, l'équation (1)... $ax = b$, revient à $\frac{b}{x} = a$; il s'agit

donc de satisfaire à la condition $\frac{b}{x} = 0$. Tant que x est fini,

$\frac{b}{x}$ n'est pas nul, l'erreur est $\frac{b}{x}$; mais cette erreur devient

d'autant moindre que x est plus grand; de sorte qu'on peut toujours assigner à x une valeur assez grande pour que l'erreur soit aussi petite qu'on voudra : c'est dans ce sens que la valeur $x = \infty$ satisfait à l'équation (1). L'équation (1) résulte d'une équation de la forme $ax + c = ax + \gamma$, et l'hypothèse $x = \infty$ rend les deux membres égaux à l'infini.

Nous n'admettrons désormais que les valeurs finies des inconnues. Ainsi, quand nous dirons qu'une équation est impossible, nous entendrons qu'elle ne peut être satisfaite pour aucunes valeurs finies des inconnues. Nous verrons, dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, que les valeurs infinies des inconnues fournissent quelquefois des solutions du problème proposé.

La résolution de n équations du premier degré entre n inconnues, conduisant généralement à une équation qui ne contient plus qu'une seule inconnue, les propriétés précédentes doivent convenir à ces équations.

55. Lorsque deux équations du premier degré à deux inconnues,

$$(1) \dots ax + by = c, \quad (2) \dots a'x + b'y = c',$$

sont déterminées ou contradictoires, les formules générales

$$(3) \dots x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad (4) \dots y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

qui expriment x et y , donnent pour ces inconnues des valeurs indéterminées ou infinies; la réciproque est vraie. En effet :

1°. Quand les équations (1), (2), sont indéterminées, x et y ont une infinité de valeurs; or, x dépend de l'équation

$$(5) \dots (ab' - ba')x = cb' - bc'.$$

Par conséquent, d'après ce qui a été démontré (n° 54, 1°), $ab' - ba'$ et $cb' - bc'$ sont nuls; on en déduit

$$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}; \quad \text{d'où} \quad ac' - ca' = 0.$$

Les valeurs (3), (4) de x et y se réduisent donc à $\frac{0}{0}$.

RÉCIPROQUEMENT. Lorsque l'une des valeurs (3), (4), de x ou y ,

se réduit à $\frac{0}{0}$, les équations (1), (2) sont indéterminées. En effet, on a

$$\begin{aligned} ab' - ba' &= 0 \text{ et } cb' - bc' = 0, \text{ ou} \\ ab' - ba' &= 0 \text{ et } ac' - ca' = 0. \end{aligned}$$

On en tire $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

Ces dernières relations ayant lieu, l'équation (2) résulte de la multiplication des deux membres de l'équation (1) par un même nombre; car, en désignant par q le quotient de a' par a , les relations

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = q, \text{ donnent } a' = aq, \quad b' = bq, \quad c' = cq,$$

et l'équation (2) devient

$$aqx + bqy = cq, \text{ ou } (ax + by) \times q = c \times q.$$

L'équation (2) n'étant qu'une conséquence immédiate de l'équation (1), les valeurs de x et y ne sont assujetties qu'à la relation (1); on peut donc assigner une infinité de valeurs arbitraires à l'une des inconnues x, y ; l'équation (1) détermine les valeurs correspondantes de l'autre inconnue.

EXEMPLE. Soient $6x + 3y = 3$, $4x + 2y = 2$.

On a, $a = 6$, $b = 3$, $c = 3$, $a' = 4$, $b' = 2$, $c' = 2$.

Les formules (3), (4), conduisent à $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$.

Ces valeurs indéterminées de x et y indiquent que les équations proposées admettent une infinité de solutions.

Quand le système des équations (1), (2), admet deux solutions, il existe une infinité d'autres solutions communes à ces équations; car les valeurs de x dépendent de l'équation

$$(5) \dots (ab' - ba')x = cb' - bc';$$

et cette dernière devant admettre deux valeurs de x , on a vu (n° 54, 1°), qu'il faut que

$$ab' - ba' = 0, \quad cb' - bc' = 0, \quad \text{d'où } ac' - ca' = 0.$$

8..

Ces trois dernières relations ayant lieu, on vient de prouver (1°) que l'équation (2) n'est qu'une conséquence immédiate de l'équation (1). De sorte qu'on n'a réellement qu'une seule équation entre x et y . Ces inconnues ont donc une infinité de valeurs.

2°. Quand les équations (1)... $ax+by=c$, (2)... $a'x+b'y=c'$, sont *contradictoires*, aucunes valeurs finies de x et y ne peuvent y satisfaire en même temps. Or, ces équations donnent

$$(6) \dots (ab' - ba')x = cb' - bc', \quad (ab' - ba')y = ac' - ca'.$$

Par conséquent, d'après ce qui a été démontré (n° 54, 2°), on doit avoir $ab' - ba' = 0$, et aucune des quantités $cb' - bc'$, $ac' - ca'$, n'est zéro.

Les formules (3), (4), (page 114), déterminent donc des valeurs infinies de x et y .

RÉCIPROQUEMENT. Lorsque les valeurs (3), (4), de x et y , sont infinies, les équations (1), (2) sont incompatibles. En effet, aucun des numérateurs $cb' - bc'$, $ac' - ca'$, n'étant zéro, et le dénominateur commun $ab' - ba'$ étant nul, l'équation..... (2)... $a'x + b'y = c'$ résulte de la multiplication des deux membres de l'équation (1)... $ax + by = c$, par deux quantités différentes; car la relation $ab' - ba' = 0$, donne $b' = \frac{ba'}{a}$.

La substitution de cette valeur de b' , dans l'équation (2), conduit à $(ax + by)a' = ac'$.

Or, par hypothèse, ac' n'est pas égal à ca' ; on a donc... .. $ac' = c \times (a' + \delta)$. L'équation (2) revient donc à

$$(ax + by) \times a' = c \times (a' + \delta);$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Dans ce cas, aucune des solutions finies de l'équation (1) ne convient à l'équation (2).

Pour apercevoir comment les valeurs infinies de x et y satisfont aux équations (1), (2), on observe que ces équations conduisent aux relations (6), et ces dernières reviennent à

$$(7) \dots \frac{cb' - bc'}{x} = ab' - ba', \quad \frac{ac' - ca'}{y} = ab' - ba'.$$

Or, $ab' - ba' = 0$, et aucun des numérateurs $cb' - bc'$, $ac' - ca'$, n'est égal à zéro; des valeurs finies de x et y ne peuvent donc pas satisfaire aux équations (7), mais les erreurs sont d'autant moindres que x et y sont plus grands; de sorte qu'on peut toujours prendre x et y assez grands, pour que les erreurs soient aussi petites qu'on voudra.

EXEMPLE. Soient $x + 2y = 5$, $3x + 6y = 2$.

On a $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$, $a' = 3$, $b' = 6$, $c' = 2$.

Les formules (3), (4), (page 114), donnent

$$x = \frac{26}{0} = +\infty, \quad y = -\frac{13}{0} = -\infty.$$

Ces valeurs infinies de x et y indiquent qu'il n'existe aucuns nombres qui, substitués pour x et y , puissent satisfaire à la fois aux deux équations proposées, mais que les erreurs deviennent d'autant moindres que x et y approchent plus de $+\infty$ et de $-\infty$.

Enfin, les valeurs $x = +\infty$, $y = -\infty$, satisfont aux équations données, car ces équations deviennent

$$\infty - \infty = 5, \quad \infty - \infty = 2,$$

ce qui revient à $\infty = \infty + 5$, $\infty = \infty + 2$,

et il résulte de la définition de l'infini, que l'infini augmenté d'un nombre quelconque reste égal à l'infini.

56. Nous allons discuter les formules générales qui déterminent les valeurs des inconnues, dans le système de trois équations du premier degré entre trois inconnues. Nous serons conduits à cette remarque importante, que *les équations peuvent être incompatibles, quoique les expressions des inconnues se présentent sous la forme indéterminée* $\frac{0}{0}$.

Soient les trois équations

$$(1) \dots ax + by + cz = d, (2) \dots a'x + b'y + c'z = d', (3) \dots a''x + b''y + c''z = d''.$$

Les formules du n° 47 (page 101), déterminent les valeurs de x, y, z , qui satisfont à ces équations. Soit pour abréger

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = \delta,$$

$$db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd'' = X,$$

$$ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a'' = Y,$$

$$ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a'' = Z;$$

on aura (4) ... $x = \frac{X}{\delta}, \quad y = \frac{Y}{\delta}, \quad z = \frac{Z}{\delta}.$

Discutons ces formules.

1°. Lorsque δ n'est pas nul, chaque inconnue a une valeur finie et déterminée; les équations proposées n'admettent que la seule solution fournie par les formules (4).

2°. Lorsque δ étant nul, aucun des numérateurs X, Y, Z , n'est zéro, les valeurs (4) de x, y, z sont infinies; et les équations proposées sont contradictoires, car d'après (4) elles conduisent à

$$X = \delta x, \quad Y = \delta y, \quad Z = \delta z,$$

et des valeurs finies de x, y, z , ne sauraient satisfaire à ces trois dernières équations.

3°. Quand δ, X, Y et Z se réduisent à zéro, les expressions générales (4) de x, y, z , prenant la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, il paraît naturel de penser que les équations proposées admettent une infinité de solutions; cela arrive assez ordinairement; mais quelquefois ces équations sont contradictoires. En effet, soient

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d}.$$

Ces relations réduisent δ, X, Y , et Z à zéro, quelles que soient a'', b'', c'' et d'' ; car elles donnent

$$ab' = ba', \quad ac' = ca', \quad bc' = cb', \quad cd' = dc', \quad db' = bd', \quad ad' = da',$$

et on peut mettre les valeurs de δ, X, Y, Z , sous la forme

$$\delta = (bc' - cb')a'' + (ca' - ac')b'' + (ab' - ba')c'',$$

$$X = (cd' - dc')b'' + (db' - bd')c'' + (bc' - cb')d'',$$

$$Y = (dc' - cd')a'' + (ad' - da')c'' + (ca' - ac')d'',$$

$$Z = (bd' - db')a'' + (da' - ad')b'' + (ab' - ba')d'',$$

Les valeurs (4) de x, y, z , se réduisent donc à $\frac{0}{0}$.

Pour interpréter ce résultat, on observe que les relations

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d}, \text{ donnant}$$

$$a' = \frac{ad'}{d}, \quad b' = \frac{bd'}{d}, \quad c' = \frac{cd'}{d},$$

l'équation (2)... $a'x + b'y + c'z = d'$, revient à

$$\frac{ad'}{d}x + \frac{bd'}{d}y + \frac{cd'}{d}z = d', \text{ ou à } (ax + by + cz) \times \frac{d'}{d} = d' \times \frac{d'}{d}.$$

L'équation (2) n'est donc qu'une conséquence immédiate de l'équation (1)... $ax + by + cz = d$. Il suffit donc que les trois inconnues x, y, z satisfassent aux deux équations.

$$(1)... ax + by + cz = d, \quad (3)... a''x + b''y + c''z = d'';$$

et par conséquent, on pourra donner des valeurs arbitraires à l'une quelconque des inconnues x, y, z ; les équations (1), (3) fourniront les valeurs correspondantes des deux autres inconnues. De sorte que les équations (1), (2), (3) admettront une infinité de solutions.

Si outre les relations

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d}, \text{ on a } \frac{a''}{a} = \frac{b''}{b} = \frac{c''}{c},$$

$$\text{il en résultera} \quad a'' = \frac{ac''}{c}, \quad b'' = \frac{bc''}{c};$$

l'équation (3)... $a''x + b''y + c''z = d''$, deviendra

$$\frac{ac''}{c}x + \frac{bc''}{c}y + c''z = d''; \text{ d'où } ax + by + cz = \frac{cd''}{c''}.$$

Pour que cette dernière équation puisse subsister en même temps que l'équation (1), il faut et il suffit que

$$\frac{cd''}{c''} = d; \text{ d'où } \frac{d''}{d} = \frac{c''}{c};$$

$$\text{on a d'ailleurs} \quad \frac{a''}{a} = \frac{b''}{b} = \frac{c''}{c} = \frac{d''}{d}.$$

L'équation (3) devient une conséquence immédiate de l'équation (1), les inconnues x, y, z ne sont assujetties qu'à la condition (1); de sorte qu'on peut assigner des valeurs arbitraires à deux quelconques de ces inconnues; l'équation (1) fournit les valeurs correspondantes de l'autre inconnue.

Enfin, si les relations

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d}, \quad \frac{a''}{a} = \frac{b''}{b} = \frac{c''}{c},$$

ayant toujours lieu, $\frac{cd''}{c''}$ n'est pas égal à d , l'équation (3) qui devient

$$ax + by + cz = \frac{cd''}{c''},$$

sera incompatible avec

$$(1) \dots ax + by + cz = d.$$

Dans ce cas, les expressions générales (4) de x, y, z , se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, et cependant il n'existe aucunes valeurs finies des inconnues qui puissent satisfaire au système des équations (1), (2), (3) proposées (*).

57. Lorsque les termes tout connus d, d', d'' , sont égaux à zéro, les valeurs de X, Y, Z , se réduisent à zéro. On satisfait aux équations

$$(1) \dots ax + by + cz = 0, \quad (2) \dots a'x + b'y + c'z = 0, \\ (3) \dots a''x + b''y + c''z = 0,$$

en faisant $x=0, y=0, z=0$.

Mais, il arrive quelquefois que les équations proposées admettent d'autres solutions. Pour s'en convaincre, on tire les

(*) Il n'en est pas de même de deux équations entre deux inconnues; car toutes les fois que les expressions générales des inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, il existe une infinité de valeurs finies des deux inconnues qui satisfont aux équations proposées (n° 55, 1°).

valeurs de x, y , des deux premières équations, comme si z était connu; ce qui donne

$$(5) \dots x = \left(\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \right) z, \quad (6) \dots y = \left(\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} \right) z, \quad (*)$$

Ces valeurs de x, y , satisfont aux équations (1), (2), quel que soit z . En les substituant dans l'équation (3), on parvient à la relation

$$(7) \dots \delta z = 0.$$

Les solutions des équations (1), (2), (3), sont les mêmes que celles des équations (5), (6), (7).

1^{er} Cas. Quand le dénominateur commun δ n'est pas nul, on ne peut satisfaire aux équations (1), (2), (3), qu'en posant $x=0, y=0, z=0$.

En effet, la relation (7) exige que $z=0$; les équations (1), (2), (3), se réduisent à

$$(8) \dots ax + by = 0, \quad (9) \dots a'x + b'y = 0, \quad (10) \dots a''x + b''y = 0.$$

Pour trouver la valeur de y correspondante à $z=0$, on élimine successivement x entre (8), (9), et (8), (10), ce qui conduit à

$$(ab' - ba')y = 0, \quad (a''b - b''a)y = 0.$$

La seule manière de satisfaire à ces deux dernières équations est de poser $y=0$; car si y n'était pas nul, il faudrait qu'on eût

$$ab' - ba' = 0, \quad a''b - b''a = 0; \text{ d'où}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}, \text{ et } a'b'' - b'a'' = 0.$$

Or, δ n'étant pas nul, les trois relations

$$ab' - ba' = 0, \quad a''b - b''a = 0, \quad a'b'' - b'a'' = 0,$$

ne sauraient avoir lieu en même temps, puisque la valeur

$$\delta = ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'',$$

peut se mettre sous la forme

$$\delta = (ab' - ba')c'' + (a''b - b''a)c' + (a'b'' - b'a'')c.$$

(*) On peut déduire ces valeurs, des formules (3), (4), (page 114), en remplaçant c et c' , par $-cz$ et $-c'z$.

Il faut donc que $y = 0$, et par suite les équations (8), (9), (10), s'accordent à donner $x = 0$.

On voit donc que x , y et z sont nécessairement nuls.

2^e CAS. Quand le dénominateur commun d se réduit à zéro, des valeurs arbitraires de z satisfont à la relation $dz = 0$; et comme les valeurs (5), (6), de x , y , satisfont aux équations (1), (2), (3), quel que soit z , on obtient toutes les solutions des équations proposées, en donnant des valeurs arbitraires à z ; les formules (5), (6), déterminent les valeurs correspondantes des inconnues x , y ; de sorte que les équations proposées admettent une infinité de solutions.

REMARQUE. Lorsque d étant nul, aucun des binômes $ab' - ba'$, $bc' - cb'$, $ac' - ca'$, n'est égal à zéro, les rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{y}$, sont finis et déterminés, quoique les équations proposées admettent une infinité de valeurs de x , y , z ; car les relations (5) et (6) donnent

$$\frac{x}{z} = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad \frac{y}{z} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}, \quad \frac{x}{y} = \frac{bc' - cb'}{ca' - ac'}.$$

Ces exemples suffisent pour mettre en état de discuter tous les cas qui peuvent se présenter.

En général, quel que soit le nombre des équations et des inconnues, certaines inconnues peuvent être finies, d'autres infinies et d'autres indéterminées.

REMARQUE. Quand les équations proposées sont numériques, on évite toutes les difficultés relatives à l'interprétation des formules générales qui déterminent les valeurs des inconnues, en opérant directement sur les équations proposées comme il a été indiqué dans le n^o 42.

§ VII. Composer des équations qui admettent des solutions données.

58. Lorsqu'une équation entre plusieurs inconnues renferme des coefficients arbitraires, on peut déterminer ces coefficients de manière que l'équation admette des solutions données; car chaque solution, substituée dans l'équation proposée, fournit

une équation du premier degré entre les coefficients inconnus.

1^{er} EXEMPLE. Soit une équation du premier degré entre deux inconnues x, y .

Pour simplifier les calculs, on supposera que cette équation a été ramenée à la forme

$$(1) \dots y = ax + b;$$

ce qui est toujours possible en divisant tous les termes par le coefficient de y .

Il s'agit de déterminer a et b de manière que l'équation (1) admette des solutions données. On ne pourra donc pas se donner plus de deux solutions arbitraires.

Cela posé : si $x = a, y = c$, et $x = a', y = c'$,

sont les deux solutions données, chacune d'elles devant satisfaire à l'équation

$$(1) \dots y = ax + b, \text{ on aura } (2) \dots c = aa + b, (3) \dots c' = aa' + b.$$

Les relations (2), (3), conduisent à

$$a = \frac{c' - c}{a' - a}, \quad b = \frac{ca' - ac'}{a' - a}.$$

Substituant ces valeurs des inconnues a, b , dans (1), l'équation

$$(4) \dots y = \left(\frac{c' - c}{a' - a} \right) x + \frac{ca' - ac'}{a' - a},$$

que l'on obtient, admet nécessairement les deux solutions données.

Le calcul précédent se réduisant à éliminer a et b entre (1), (2), (3), on parvient plus simplement à l'équation qui admet les deux solutions données, en retranchant d'abord (2) de (1), afin de faire disparaître b ; le résultat

$$(5) \dots y - c = a(x - a)$$

admet la solution $x = a, y = c$, quel que soit a .

Pour déterminer a de manière que l'équation (5) admette l'autre solution donnée $x = a', y = c'$, on retranche (2) de

(3), ce qui conduit à

$$\zeta' - \zeta = a(a' - a); \text{ d'où } a = \frac{\zeta' - \zeta}{a' - a}.$$

La substitution de cette valeur de a dans (5) fournit l'équation demandée

$$(6) \dots y - \zeta = \left(\frac{\zeta' - \zeta}{a' - a} \right) (x - a).$$

Il est facile de s'assurer que les équations (4), (6), ne diffèrent que par la forme; car chacune d'elles se réduit à

$$(a' - a) y = (\zeta' - \zeta)x + (\zeta a' - \zeta' a).$$

On peut aussi parvenir à l'équation (6) en exprimant d'abord que l'équation (1) admet la solution $x = a$, $y = \zeta$. En effet, ces valeurs de x et y devant satisfaire à l'équation

$$(1) \dots y = ax + b, \text{ il faut que } (2) \dots \zeta = aa + b.$$

Pour introduire la condition (2) dans (1), on remplace b par sa valeur $\zeta - aa$ tirée de (2); ce qui donne

$$y = ax + \zeta - aa, \text{ ou } (5) \dots y - \zeta = a(x - a).$$

Le système $x = a$, $y = \zeta$, satisfait à l'équation (5), quel que soit a .

Le calcul qui a conduit à l'équation (5), se réduisant à éliminer b entre (1) et (2), on parvient plus simplement à la relation (5) en retranchant (2) de (1).

La seconde solution donnée $x = a'$, $y = \zeta'$, devant convenir à l'équation (5), il faut que cette équation soit satisfaite quand on y remplace x et y par a' et ζ' ; ce qui donne

$$\zeta' - \zeta = a(a' - a); \text{ d'où } a = \frac{\zeta' - \zeta}{a' - a}.$$

Substituant cette valeur de a dans (5), on exprime que l'équation (5) admet la 2^e solution $x = a'$, $y = \zeta'$; et comme l'équation (5) admettait déjà la 1^{re} solution $x = a$, $y = \zeta$, quel que soit a , l'équation

$$(6) \dots y - \zeta = \frac{\zeta' - \zeta}{a' - a} (x - a),$$

qui résulte de cette substitution, admet nécessairement les deux solutions données.

Il est d'ailleurs facile de le vérifier; car en faisant $x = a$, l'équation (6) donne $y = c$, et en supposant $x = a'$, la même équation conduit à

$$(y - c)(a' - a) = (c' - c)(a' - a), \text{ d'où } y - c = c' - c, \text{ et } y = c'.$$

On est conduit plus longuement au même résultat quand on ne prépare pas l'équation proposée de manière que le coefficient de l'un de ses termes soit l'unité; car l'équation du 1^{er} degré entre deux inconnues étant alors de la forme $ax + by = c$, les équations qui expriment qu'elle admet les deux solutions

$$x = a, y = c \parallel x = a', y = c',$$

$$\text{sont} \quad a\alpha + b\epsilon = c, \quad a\alpha' + b\epsilon' = c.$$

Ces deux dernières équations résolues par rapport aux inconnues a, b , donnent

$$a = \frac{(\epsilon' - \epsilon)c}{\alpha\epsilon' - \epsilon\alpha'}, \quad b = \frac{(\alpha - \alpha')c}{\alpha\epsilon' - \epsilon\alpha'}.$$

Substituant ces valeurs de a et b dans $ax + by = c$, on parvient à une équation qui admet les deux solutions données; et en divisant tous ses termes par leur facteur commun c , l'équation

$$\frac{(\epsilon' - \epsilon)x}{\alpha\epsilon' - \epsilon\alpha'} + \frac{(\alpha - \alpha')y}{\alpha\epsilon' - \epsilon\alpha'} = 1,$$

que l'on obtient ne renfermant plus de coefficient arbitraire, on ne saurait se donner une troisième solution.

Il est facile de voir que cette dernière équation conduit à l'équation (4), (page 123).

Nous supposons donc désormais que l'équation proposée a été préparée de manière que le coefficient de l'un de ses termes soit l'unité; et, dans ce cas, on ne pourra généralement se donner qu'autant de solutions au plus, qu'il restera de coefficients arbitraires dans l'équation ainsi préparée, car chaque solution donnée fournit une équation entre les coefficients inconnus.

2^e EXEMPLE. Soit l'équation (1)... $z = ax + by + c$.

Cette équation (1) renfermant trois quantités arbitraires, on peut disposer de ces quantités de manière qu'elle admette trois solutions données

$$x = \alpha, y = \zeta, z = \gamma \parallel x = \alpha', y = \zeta', z = \gamma' \parallel x = \alpha'', y = \zeta'', z = \gamma''.$$

Chacune de ces solutions devant convenir à l'équation (1), il faut que

$$(2) \dots \gamma = a\alpha + b\zeta + c, \gamma' = a\alpha' + b\zeta' + c, \gamma'' = a\alpha'' + b\zeta'' + c.$$

L'élimination de a, b, c , entre (1) et (2), fournira l'équation en x, y, z , qui admet les trois solutions données.

On peut effectuer cette élimination par l'une quelconque des méthodes indiquées dans le 1^{er} exemple.

Si les trois solutions données sont

$$x = 1, y = 2, z = 0 \parallel x = 0, y = 2, z = 1 \parallel x = -1, y = -1, z = 0,$$

on trouvera que l'équation qui admet ces trois solutions est

$$z = -x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}.$$

59. PROBLÈME. On propose de composer un système d'équations qui admette des solutions données.

1^{er} EXEMPLE. Soient deux équations générales du premier degré entre deux inconnues x, y .

On ramène d'abord ces équations à la forme

$$(1) \dots y = ax + b, (2) \dots y = a'x + b'.$$

Il est facile de voir qu'on ne peut se donner qu'une seule solution commune; car si l'on voulait prendre deux solutions communes.

$$x = \alpha, y = \zeta \parallel x = \alpha', y = \zeta',$$

les valeurs de a et b tirées des équations de condition

$$\zeta = a\alpha + b, \zeta' = a\alpha' + b,$$

seraient les mêmes que les valeurs de α', b' , tirées des équations

semblables

$$\zeta = a'a + b', \zeta' = a'a' + b'.$$

Les équations (1) et (2) se réduiraient donc à une seule.

Cela est d'ailleurs évident, car si l'on se donne la solution commune $x = a, y = \zeta$, on aura

$$(3) \dots \zeta = ax + b, (4) \dots \zeta = a'a + b'.$$

Pour former les équations qui admettent cette solution, on remplacera dans (1) et (2), les indéterminées b, b' , par leurs valeurs $\zeta - ax, \zeta - a'a$; ce qui revient à retrancher (3) de (1), et (4) de (2); les équations résultantes

$$(5) \dots y - \zeta = a(x - a), y - \zeta = a'(x - a),$$

admettront la solution $x = a, y = \zeta$, quelles que soient d'ailleurs a et a' ; et pour que ces équations ne se réduisent pas à une seule, il suffira d'assigner des valeurs différentes aux coefficients arbitraires a, a' .

On ne pourra donc pas se donner une seconde solution commune, $x = a', y = \zeta'$; car cette solution devant convenir aux équations (5), on aurait

$$\zeta' - \zeta = a(a' - a), \zeta' - \zeta = a'(a' - a); \text{ d'où } a = a'.$$

Il en résulte que *deux équations du premier degré à deux inconnues ne peuvent jamais admettre qu'une seule solution commune*. Ce qui s'accorde avec le principe du n° 40.

2^e EXEMPLE. Soient les deux équations générales du premier degré entre trois inconnues

$$z = ax + by + c, z = a'x + b'y + c'.$$

On ne saurait donner arbitrairement plus de deux solutions communes à ces équations; car si l'on prenait trois solutions communes, les trois équations de condition qui serviraient à déterminer a, b, c , seraient les mêmes que celles qui détermineraient a', b', c' ; on trouverait donc $a = a', b = b', c = c'$. Les équations demandées se réduiraient donc à une seule; ce qui est contre l'hypothèse.

En général, lorsqu'on a deux équations complètes du même

degré à deux inconnues, on ne peut se donner qu'autant de solutions communes au plus, qu'il y a de coefficients moins un dans l'une de ces équations.

§ VIII. Des inégalités.

60. Les *inégalités* étant d'un fréquent usage dans l'Algèbre, nous allons en faire connaître les principales propriétés.

1°. Une *inégalité* n'est pas troublée, lorsqu'on ajoute à ses deux membres ou qu'on retranche de ses deux membres une même quantité; cela est évident.

Ainsi, $7 > 5$ donne $7 + 3 > 5 + 3$, $7 - 3 > 5 - 3$.

2°. Pour faire passer un terme d'un membre d'une *inégalité* dans un autre, il suffit de changer le signe de ce terme.

Par exemple, $x - a > b$ donne $x > b + a$, car en ajoutant a aux deux membres de la 1^{re} *inégalité*, on obtient la seconde.

De même, $x + a > b$ donne $x > b - a$, car en retranchant a des deux membres de la 1^{re} *inégalité*, on obtient la seconde.

Ainsi, $x - 2 > 7$ donne $x > 7 + 2$, ou $x > 9$
et $x + 2 > 7$ donne $x > 7 - 2$, ou $x > 5$.

3°. Lorsqu'on change les signes des termes d'une *inégalité*, il faut RENSER le signe d'*inégalité*, c'est-à-dire changer $>$ en $<$ ou $<$ en $>$; car cela revient à faire passer tous les termes du 1^{er} membre dans le 2^e, et ceux du 2^e dans le 1^{er}.

Par exemple, d'après (2°) l'*inégalité*

$$x - a > b - x \text{ donne } -b + x > -x + a,$$

et cette dernière revient à $-x + a < -b + x$.

4°. On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une *inégalité* par une quantité positive.

Ainsi, $x < a$ donne $2x < 2a$, $\frac{x}{2} < \frac{a}{2}$.

5°. Quand on multiplie ou quand on divise les deux membres d'une inégalité par une quantité négative, il faut RENSER le signe d'inégalité.

Par exemple, lorsque c représente un nombre positif, il résulte de (4°) que l'inégalité $a > b$ conduit à

$$ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c};$$

et d'après (3°) on a

$$-ac < -bc, \quad -\frac{a}{c} < -\frac{b}{c},$$

ce qui revient à $a \times (-c) < b \times (-c)$, $\frac{a}{-c} < \frac{b}{-c}$.

6°. Les inégalités $a < b$, $a' < b'$, $a'' < b''$, donnent évidemment $a + a' + a'' < b + b' + b''$, quels que soient les signes de a, a', a'', b, b', b'' .

Quand toutes ces quantités sont positives, on a

$$aa'a'' < bb'b'', \quad a^m < b^m, \quad \sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b} \quad (*).$$

Les trois dernières inégalités peuvent cesser d'être vraies, lorsqu'elles renferment des quantités négatives.

Par exemple, l'inégalité $-3 < 2$ est exacte; et si l'on élevait ses deux membres au carré, le résultat $9 < 4$ serait absurde.

7°. Lorsque a, b, c, d , sont positifs,

l'inégalité $a < b$ donne

$$1 < \frac{b}{a}, \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \quad \frac{c}{a} > \frac{c}{b},$$

et les inégalités $a > b$, $c < d$, donnent $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

8°. Quand deux quantités a, c sont comprises entre deux autres quantités p, q , la différence entre les deux premières est moindre que la différence entre les deux autres.

(*) On n'a égard qu'à la valeur positive de chaque radical.

En effet, soient $a > p$, $c > a$, $q > c$,
 on aura $a = p + \delta$, $c = p + \delta + \gamma$, $q = p + \delta + \gamma + \lambda$,
 d'où $c - a = \gamma$, $q - p = \gamma + \delta + \lambda$; donc $c - a < q - p$.
 Ce qui démontre le principe énoncé.

Des inégalités du premier degré à une seule variable.

61. Toute inégalité du premier degré en x conduit à $x > a$ ou à $x < a$.

La quantité connue a est ce qu'on nomme une *limite* de la variable x .

Par exemple, soit l'inégalité de cette espèce

$$(1) \dots 7x - \frac{23}{3} > \frac{2}{3}x + 5.$$

La multiplication de ses deux membres par 3 conduit à

$$21x - 23 > 2x + 15. \text{ On en déduit,} \\ 21x - 2x > 15 + 23, 19x > 38, x > 2.$$

Ainsi, des valeurs arbitraires de x plus grandes que 2, sont les seules qui satisfassent à la condition (1). On dit par cette raison, que dans l'inégalité (1), le nombre 2 est la *limite inférieure* de la variable x .

Lorsqu'on déduit ainsi d'une inégalité la *limite* de x , on dit qu'on *résout* cette inégalité par rapport à x .

On peut toujours faire dépendre la résolution d'une inégalité, de la résolution d'une équation.

Par exemple, si l'on représente par δ une quantité arbitraire plus grande que zéro, l'inégalité (1) reviendra à

$$(2) \dots 7x - \frac{23}{3} = \frac{2}{3}x + 5 + \delta,$$

car δ étant supposé plus grand que zéro, l'équation (2) exprime que $7x - \frac{23}{3}$ est plus grand que $\frac{2}{3}x + 5$.

L'équation (2) résolue par rapport à x donne,

$$x = 2 + \frac{3\delta}{19}. \text{ Or, } \delta > 0. \text{ Donc } x > 2.$$

$$\text{L'inégalité (3) ... } 7x - \frac{23}{3} < \frac{2}{3}x + 5,$$

conduisant à $x < 2$, le nombre 2 est la *limite supérieure* de la variable x .

Ainsi, on satisfera à l'inégalité (3), en donnant à x des valeurs positives quelconques comprises entre zéro et 2.

Lorsqu'on a égard aux valeurs relatives des quantités, les nombres négatifs étant moindres que zéro (n° 10), toute valeur négative de x satisfera dans ce sens à l'inégalité (3).

Par exemple, soit $x = -12$; l'inégalité (3) devient

$$-84 - \frac{23}{3} < -8 + 5,$$

et cette dernière inégalité est vraie; car d'après les principes du n° 60, elle donne successivement,

$$-\frac{275}{3} < -3, \quad -275 < -9, \quad 275 > 9.$$

Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, qu'on a égard aux valeurs relatives des quantités.

62. *Quand le système de deux inégalités du premier degré en x est possible, il admet une infinité de valeurs de x qui peuvent être limitées dans un seul sens ou dans deux sens. Ce système est quelquefois impossible.*

En effet, chaque inégalité conduisant à $x < a$ ou $x > a$, on parvient toujours à l'un des trois systèmes suivans :

$$1^{\circ}. \quad x < a, \quad x < c.$$

On peut donner à x des valeurs quelconques, moindres que la plus petite des quantités a, c .

$$\text{Ainsi, le système } 4x - 1 < 7, \quad 3x + 4 < 16,$$

$$\text{conduisant à } x < 2, \quad x < 4,$$

on peut assigner à x des valeurs positives moindres que 2, et des valeurs négatives quelconques.

Par conséquent, x peut croître depuis $-\infty$ en s'approchant indéfiniment de sa *limite supérieure* $+2$. La variable x n'est donc limitée que dans le sens positif.

$$2^{\circ}. \quad x > a, \quad x > 6.$$

On peut assigner à x des valeurs quelconques, plus grandes que la plus grande des quantités $a, 6$.

Ainsi, le système $4x - 1 > 7, 3x + 4 > 16$,
conduisant à $x > 2, x > 4$,

on peut assigner à x des valeurs quelconques plus grandes que 4. La variable x peut donc croître indéfiniment à partir de sa *limite inférieure* $+4$.

$$3^{\circ}. \quad x > a, \quad x < 6.$$

Lorsque a est moindre que 6, on peut donner à x des valeurs arbitraires comprises entre a et 6.

Ainsi, le système $4x - 1 > 7, 3x + 4 < 16$,
conduisant à $x > 2, x < 4$,

on peut donner à x des valeurs arbitraires comprises entre 2 et 4.

Lorsque a n'est pas moindre que 6, les deux inégalités proposées sont *contradictaires*; aucune valeur de x ne saurait satisfaire à leur système.

Ainsi, le système $4x - 1 < 7, 3x + 4 > 16$,
est *impossible*; car il conduit aux inégalités $x < 2, x > 4$, qui sont évidemment *contradictaires*.

En général: *Pour que le système $x > a, x < 6$ soit possible, il faut et il suffit que a soit moindre que 6.*

Problèmes qui conduisent à des inégalités du premier degré en x .

63. Appliquons la théorie précédente à la résolution de quelques problèmes.

1^{er} PROBLÈME. Trouver un nombre x , tel que son double dimi-

nué de 5, soit plus grand que 25, et que son triple, diminué de 7 soit plus grand que son double augmenté de 13.

D'après cet énoncé, il faut que x satisfasse aux inégalités,

$$2x - 5 > 25, \quad 3x - 7 > 2x + 13.$$

Elles conduisent à $x > 15, x > 20$.

On peut donc donner à x des valeurs quelconques plus grandes que 20. Le problème admet donc une infinité de solutions.

2° PROBLÈME. *Trouver un nombre x , tel que son double diminué de 5, soit plus grand que 25, et que son triple, diminué de 7, soit plus petit que son double augmenté de 13.* On doit avoir

$$2x - 5 > 25, \quad 3x - 7 < 2x + 13; \text{ d'où } x > 15, x < 20.$$

On peut donc donner à x des valeurs quelconques comprises entre 15 et 20.

3° PROBLÈME. *Le double d'un nombre inconnu x , diminué de 5, est moindre que 25, et son triple diminué de 7 est plus grand que son double augmenté de 13. Quel est ce nombre ?*

Le problème n'admet aucune solution, car on parvient aux inégalités contradictoires, $x < 15, x > 20$.

4° PROBLÈME. *Un berger, interrogé sur le nombre de ses moutons, répond: ce nombre est tel, que son double diminué de 5 est plus grand que 25, et que son triple diminué de 7 est plus petit que son double augmenté de 13. On demande le nombre des moutons.*

On doit avoir

$$2x - 5 > 25, \quad 3x - 7 < 2x + 13; \text{ d'où } x > 15, x < 20.$$

Des valeurs arbitraires de x , comprises entre 15 et 20, satisfont à ces inégalités. Mais, comme la nature du problème impose en outre à l'inconnue, la condition particulière d'être un nombre entier, on ne doit prendre pour x que les nombres 16, 17, 18 et 19. Ainsi le problème proposé n'admet que quatre solutions.

5° PROBLÈME. *Une femme porte des oranges au marché. Le nombre de ces oranges est tel, que son triple augmenté de 2, surpassé son double augmenté de 61; et que son quintuple diminué*

de 70, est moindre que son quadruple diminué de 9. Il faut découvrir le nombre x des oranges. On a

$$3x + 2 > 2x + 61, \quad 5x - 70 < 4x - 9; \text{ d'où } x > 59, \quad x < 61.$$

Or, x doit être un nombre entier positif; la femme a donc porté 60 oranges au marché.

Des inégalités du premier degré entre deux variables.

64. Une inégalité du premier degré entre deux variables x, y , admet toujours une infinité de valeurs positives et négatives de x et y , qui n'ont pas de limites; c'est-à-dire que x et y peuvent croître depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Cependant, pour chaque valeur arbitraire de l'une quelconque des variables x, y , l'inégalité proposée détermine une *limite* de l'autre variable.

En effet; toute inégalité du premier degré entre x, y , peut se ramener à l'une des formes

$$ax + by > c, \quad ax + by < c,$$

a, b, c , représentant des nombres entiers, positifs ou négatifs. Cette inégalité résolue par rapport à x , conduira à un résultat de l'une des formes,

$$x > a' + b'y, \quad x < a' + b'y,$$

a' et b' étant des nombres connus, positifs ou négatifs.

L'indéterminée y n'étant assujettie à aucune condition, pourra croître indéfiniment depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; il en sera de même de x , avec cette différence cependant, que pour chaque valeur arbitraire c de y , on ne pourra prendre que des valeurs de x qui satisferont à l'une des conditions

$$x > a' + b'c, \quad x < a' + b'c.$$

Par exemple, soit l'inégalité

$$(1) \dots \frac{2}{3}x + 3y - \frac{1}{2} < \frac{1}{6}x + \frac{5}{4}y + \frac{1}{4}.$$

On fera d'abord disparaître les dénominateurs, en multipliant tous les termes par 12; ce qui conduira à

$$8x + 36y - 6 < 2x + 15y + 3; \text{ d'où}$$

$$6x < 9 - 21y, \quad 2x < 3 - 7y, \quad (2) \dots x < \frac{3-7y}{2}.$$

Pour chaque valeur arbitraire ζ de y , on ne devra prendre que des valeurs de x moindres que $\frac{3-7\zeta}{2}$. Et comme y peut varier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, il en résulte que les valeurs correspondantes de x qui satisferont à la condition (2), pourront aussi varier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Par conséquent, x et y peuvent croître et décroître indéfiniment dans l'inégalité (1).

Par exemple, soit $y=1$; l'inégalité (2) donnant $x < -2$, toutes les valeurs de x correspondantes à $y=1$, se déduiront de la relation $x=-(2+\delta)$, en donnant à δ des valeurs positives quelconques.

Si $y=-1$, l'inégalité (2) donnera $x < 5$; toutes les valeurs de x correspondantes à $y=-1$, se déduiront de l'équation $x=5-\delta$ en donnant à δ des valeurs positives quelconques.

65. *Le système de deux inégalités du premier degré entre deux variables x , y , admet ordinairement une infinité de valeurs de x et y . Ces variables peuvent avoir des limites finies. Il arrive quelquefois que les inégalités proposées sont contradictoires.*

Pour découvrir les limites des variables y , x , on résout successivement les inégalités proposées, par rapport à x et par rapport à y .

Lorsque les inégalités conduisent à

$$x < a + by, \quad x < a' + b'y, \quad \text{ou à } x > a + by, \quad x > a' + b'y,$$

la variable y n'a pas de limite; et pour une valeur arbitraire ζ de y , on peut donner à x des valeurs quelconques moindres que la plus petite des quantités $a + b\zeta$, $a' + b'\zeta$, ou plus grandes que la plus grande de ces quantités.

Lorsqu'on trouve (1) $x > a + by, \quad x < a' + b'y,$

il faut et il suffit que y satisfasse à la condition

$$(2) \dots a + by < a' + b'y.$$

Quand b n'est pas égal à b' , cette dernière inégalité fournit une limite de y ; et pour toute valeur ϵ de y qui satisfait à l'inégalité (2), on peut prendre des valeurs quelconques de x comprises entre $a + b\epsilon$ et $a' + b'\epsilon$.

Lorsque $b = b'$, l'inégalité (2) se réduisant à $a < a'$, la variable y n'a pas de limite, et pour une valeur arbitraire ϵ de y , on peut assigner à x des valeurs quelconques comprises entre $a + b\epsilon$ et $a' + b\epsilon$, pourvu que $a < a'$.

Si a n'était pas moindre que a' , aucunes valeurs de x et y ne pourraient satisfaire aux inégalités proposées.

Des calculs analogues aux précédens fourniront la limite de la variable x ; à cet effet, on résoudra les inégalités proposées par rapport à y .

Lorsqu'on trouvera

$$y < a + bx, \quad y < a' + b'x, \quad \text{ou} \quad y > a + bx, \quad y > a' + b'x,$$

la variable x n'aura pas de limite.

Quand on sera conduit à

$$y > a + bx, \quad y < a' + b'x,$$

il en résultera $a + bx < a' + b'x$.

Si b n'est pas égal à b' , cette dernière inégalité fournira une limite de x .

Si $b = b'$, la variable x n'aura pas de limite, et il faudra que a soit moindre que a' .

1^{er} EXEMPLE. Soient $x - y < 3$, $x - y < 4$.

On en déduit

$$x < 3 + y, \quad x < 4 + y; \quad y > x - 3, \quad y > x - 4.$$

Les variables x, y , n'ont donc pas de limite.

2^e EXEMPLE. Soient $x - y < 2$, $x + y < 6$.

On en tire $x < 2 + y$, $x < 6 - y$.

La variable y n'a donc pas de limite.

Ces inégalités donnant $y > x - 2$, $y < 6 - x$,
il faut que $x - 2 < 6 - x$, d'où $x < 4$.

La *limite supérieure* de x est donc 4.

3^e EXEMPLE. Soient $y - x > 2$, $y + x > 6$.

On verra que x n'a pas de limite, et que $y > 4$; la *limite inférieure* de y est donc 4.

4^e EXEMPLE. Soient (1) ... $x - 3y > 2$, $x - 2y < 8$.

On en déduit $x > 2 + 3y$, $x < 8 + 2y$.

Donc $2 + 3y < 8 + 2y$; d'où $y < 6$.

Résolvant les inégalités (1) par rapport à y , il vient

$$y < \frac{x-2}{3}, y > \frac{x-8}{2}; \text{ d'où } \frac{x-8}{2} < \frac{x-2}{3}, x < 20.$$

Par conséquent, on peut donner à y des valeurs arbitraires moindres que 6, les valeurs correspondantes de x ne seront assujetties qu'à être comprises entre $2 + 3y$ et $8 + 2y$. Il reviendra au même d'assigner à x des valeurs arbitraires moindres que 20, les valeurs correspondantes de y ne seront assujetties qu'à être comprises entre $\frac{x-2}{3}$ et $\frac{x-8}{2}$.

Si l'on donnait à x des valeurs plus grandes que 20, ou à y des valeurs plus grandes que 6, les inégalités (1) deviendraient contradictoires

Par exemple, soit $x = 21$; les inégalités (1) deviennent

$$21 - 3y > 2, 21 - 2y < 8; \text{ d'où } y < \frac{38}{6}, y > \frac{39}{6}.$$

Ces deux dernières inégalités sont évidemment incompatibles.

5^e EXEMPLE. Soient $x - y < 4$, $\frac{3}{7}x - \frac{15}{35}y > 6$.

On en déduit $x < y + 4$, $x > y + 14$.

D'où $y + 4 > y + 14$.

Cette dernière inégalité n'étant pas possible, les inégalités pro-

posées sont incompatibles. On peut le vérifier, car elles reviennent à $x - y < 4$, $x - y > 14$, et il est impossible que la différence entre x et y soit à la fois moindre que 4 et plus grande que 14.

66. On déterminera d'une manière semblable les limites de deux variables dans un système quelconque d'inégalités.

Par exemple, soient données trois inégalités du premier degré entre les variables x , y , et supposons que, résolues par rapport à x , elles conduisent à

$$x < a + by, \quad x > a' + b'y, \quad x > a'' + b''y.$$

Il faudra et il suffira que y satisfasse aux conditions

$$a + by > a' + b'y, \quad a + by > a'' + b''y;$$

ce qui fournira deux limites de y .

Par une raison semblable, si en résolvant les inégalités proposées par rapport à y , on trouve

$$y < c + dx, \quad y > c' + d'x, \quad y > c'' + d''x,$$

il en résultera

$$c + dx > c' + d'x, \quad c + dx > c'' + d''x;$$

ce qui déterminera deux limites de x .

Si les inégalités proposées sont

$$(1) \dots x - 2y < 8, \quad x - 3y > 2, \quad x - y > 12,$$

on trouvera $x > 16$, $x < 20$, $y > 4$, $y < 6$.

Toutes les valeurs de x seront donc comprises entre 16 et 20; celles de y tomberont entre 4 et 6.

Le système $x - 2y > 8$, $x - 3y < 2$, $x - y < 12$, ne peut subsister, car il conduit aux inégalités contradictoires

$$x < 16, \quad x > 20, \quad y < 4, \quad y > 6.$$

PROBLÈMES.

67. 1^{er} PROBLÈME. *Trouver deux nombres entiers positifs, dont la somme soit plus petite que 8, et dont la différence soit plus grande que 2.*

Soit x le plus grand des deux nombres cherchés, et y le plus petit; il faudra que

$$(1) \dots x + y < 8, x - y > 2.$$

Ces inégalités résolues par rapport à y donnent

$$y < 8 - x, y < x - 2;$$

ce qui ne fournit pas de limite de x .

Les inégalités (1) résolues par rapport à x , conduisent à

$$(2) \dots x < 8 - y, x > 2 + y;$$

ce qui exige que $2 + y < 8 - y$; d'où $y < 3$.

On ne peut donc donner à y que les valeurs 1 et 2.

Pour $y = 1$, les inégalités (2) donnant $x < 7, x > 3$, les valeurs correspondantes de x sont 4, 5 et 6.

Pour $y = 2$, les inégalités (2) donnant $x < 6, x > 4$, la seule valeur correspondante de x est $x = 5$.

La question proposée admet donc les quatre solutions

$$\begin{array}{c} y = 1 \mid y = 1 \mid y = 1 \mid y = 2 \\ x = 4 \mid x = 5 \mid x = 6 \mid x = 5. \end{array}$$

On parvient aux mêmes solutions en résolvant d'abord les inégalités (1) par rapport à y ; car elles donnent

$$(3) \dots y < 8 - x, y < x - 2;$$

et y ne pouvant être moindre que 1, il faut que

$$8 - x > 1, x - 2 > 1; \text{ d'où } x < 7, x > 3.$$

On ne peut donc donner à x que les valeurs 4, 5, 6.

Or, d'après les inégalités (3),

$$x = 4 \text{ donne } y < 4, y < 2; \text{ donc } y = 1,$$

$$x = 5 \text{ donne } y < 3, y < 3; \text{ donc } y = 1 \text{ et } y = 2,$$

$$x = 6 \text{ donne } y < 2, y < 4; \text{ donc } y = 1.$$

Il est facile de voir que ces quatre solutions sont les mêmes que les précédentes.

2° PROBLÈME. *Trouver deux nombres entiers positifs dont la somme soit moindre que 4, et dont la différence soit moindre que 2.*

Si l'on désigne par x le plus grand des deux nombres cherchés, et par y le plus petit, on aura

$$(1) \dots x + y < 4, \quad x - y < 2, \quad x > y.$$

Ces inégalités résolues par rapport à x donnent

$$(2) \dots x < 4 - y, \quad x < 2 + y, \quad x > y.$$

Or

$x < 4 - y, x > y$ exige que $y < 4 - y$; d'où $y < 2$,

$x < 2 + y, x > y$ exige que $y < 2 + y$; d'où $0 < 2$.

On ne peut donc prendre que $y = 1$.

D'ailleurs, $y = 1$ réduit les inégalités (2) à $x < 3, x > 1$.

La question proposée n'admet donc que la seule solution $y = 1, x = 2$.

On parvient au même résultat en résolvant les inégalités (1) par rapport à y ; car elles donnent

$$(3) \dots y < 4 - x, \quad y > x - 2, \quad y < x.$$

Ces dernières exigent que

$$x - 2 < 4 - x, \quad x - 2 < x; \quad \text{d'où } x < 3 \text{ et } 2 > 0.$$

Or, y doit être un nombre entier positif moindre que x . On ne peut donc faire que $x = 2$. Cette valeur de x réduisant les inégalités (3) à $y < 2, y > 0$, la seule valeur de y est $y = 1$.

Il n'existe donc que la seule solution $x = 2, y = 1$.

3° PROBLÈME. *Un troupeau est composé de moutons et de chèvres. Le nombre des moutons, diminué du double du nombre des chèvres est plus petit que 7; le nombre des moutons, diminué du triple du nombre des chèvres, est plus grand que 4. Il s'agit de trouver le nombre x des moutons et le nombre y des chèvres.*

Cet énoncé conduit à

(1)... $x - 2y < 7$, $x - 3y > 4$; d'où

(2)... $x < 2y + 7$, $x > 3y + 4$.

Les inégalités (2) exigent que y satisfasse à la condition

$$3y + 4 < 2y + 7; \text{ d'où } y < 3.$$

La nature de la question ne permettant d'admettre que des nombres entiers positifs pour x et y , on ne peut faire que $y=1$ et $y=2$.

Pour $y=1$, les inégalités (2) donnant $x < 9$, $x > 7$, on ne peut admettre que $x=8$.

La valeur $y=2$ ne satisfait pas au problème, car les inégalités (2) donnent $x < 1$, $x > 10$.

La question proposée n'admet donc que la seule solution $x=8$, $y=1$.

Par conséquent, le troupeau était composé de 8 moutons et d'une chèvre.

On parvient plus longuement au même résultat, en résolvant les inégalités (1) par rapport à y ; car on en déduit

$$(3)... y > \frac{x-7}{2}, \quad y < \frac{x-4}{3}; \text{ d'où}$$

$$\frac{x-7}{2} < \frac{x-4}{3}, \text{ et par suite } x < 13.$$

Or, y est moindre que $\frac{x-4}{3}$, et y ne peut être plus petit que 1; il faut donc que $\frac{x-4}{3} > 1$; d'où $x > 7$.

On ne peut donc assigner à x que les valeurs 8, 9, 10, 11, 12. Cela posé :

Pour $x=8$, les inégalités (3) deviennent $y > \frac{1}{2}$, $y < \frac{4}{3}$; donc $y=1$.

Pour toutes les autres valeurs 9, 10, 11, 12, de x , les inégalités (2) fournissent des *limites* de y qui ne comprennent aucun nombre entier. Ces valeurs ne sont donc pas admissibles.

La seule solution entière positive des inégalités (1) est donc $x=8$, $y=1$.

68. Lorsqu'on ne peut pas déterminer directement la valeur d'une inconnue x , on a quelquefois recours aux inégalités, pour démontrer que cette inconnue ne peut être ni plus grande, ni plus petite qu'une quantité connue c ; on en déduit $x=c$.

Par exemple, si le double d'un nombre inconnu x , augmenté de 7, ne peut surpasser 19, et si le triple du même nombre, diminué de 5, ne peut être moindre que 13, on en conclura que ce nombre est 6. En effet :

$$2x + 7 \text{ ne pouvant surpasser } 19,$$

il est évident que $2x$ ne peut surpasser $19 - 7$ ou 12, et que par conséquent

$$x \text{ ne peut surpasser } 6.$$

Or, $3x - 5$ ne peut être moindre que 13; ajoutant 5, on voit que $3x$ ne peut être moindre que 18,

$$x \text{ ne peut donc pas être moindre que } 6.$$

Il faut donc que $x=6$.

Afin de simplifier l'écriture des calculs, nous adopterons le signe $\succcurlyeq$ pour signifier *n'est pas plus grand que*.

De sorte que $x \succcurlyeq 6$ indique que x n'est pas plus grand que 6.

De même, $x \preccurlyeq 6$ signifie que x n'est pas plus petit que 6.

En général :

$$x \succcurlyeq a \text{ tient lieu des deux conditions } x < a, \quad x = a.$$

De même,

$$x \preccurlyeq a \text{ remplace } x > a \text{ et } x = a.$$

Enfin, le système $x \succcurlyeq a, x \preccurlyeq a$, donne $x=a$.

Si l'on fait usage de cette notation pour résoudre la question précédente, on sera conduit aux relations

$$2x + 7 \succcurlyeq 19, \quad 3x - 5 \preccurlyeq 13.$$

$$2x + 7 \succcurlyeq 19, \text{ donne } 2x \succcurlyeq 19 - 7, \quad 2x \succcurlyeq 12, \quad x \succcurlyeq 6,$$

$$3x - 5 \preccurlyeq 13, \text{ donne } 3x \preccurlyeq 13 + 5, \quad 3x \preccurlyeq 18, \quad x \preccurlyeq 6.$$

Le système $x \geq 6$, $x \leq 6$, démontre que $x = 6$.

PROBLÈME. Une femme porte des pommes au marché. Le double du nombre de ses pommes, diminué de 4, ne peut surpasser 2; et le quintuple de ce nombre, diminué de 7, ne peut être moindre que 3. Trouver le nombre x des pommes.

D'après cet énoncé,

$$2x - 4 \geq 2, \quad 5x - 7 \leq 3; \text{ on en déduit, } x \geq 3, \quad x \leq 2.$$

Or, x doit être un nombre entier; le nombre des pommes ne peut donc être que 2 ou 3. Le problème n'admet pas d'autres solutions.

§ IX. ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

69. Lorsque le nombre des inconnues surpasse celui des équations, ces dernières admettent une infinité de solutions; car on peut donner des valeurs arbitraires à plusieurs inconnues, de manière qu'il ne reste plus qu'un nombre d'inconnues égal à celui des équations. Mais, quelquefois, la nature du problème imposant aux inconnues des conditions particulières qui ne sont pas susceptibles d'être exprimées par des équations, on ne peut plus admettre indistinctement toutes les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations du problème, et le nombre des solutions diminue; de sorte que le problème peut n'admettre qu'un nombre limité de solutions, et qu'il peut même n'en admettre aucune.

Lorsque des nombres entiers, positifs ou négatifs, mis à la place des inconnues, satisfont à des équations, ces nombres forment ce qu'on nomme une *solution entière* des équations proposées.

Ainsi, les valeurs $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$, satisfaisant aux équations

$$2x + y + z = 6, \quad 3x + 4y + z = 17,$$

forment une *solution entière* de ces équations.

70. Nous examinerons d'abord comment on peut trouver

toutes les solutions entières d'une équation numérique du premier degré à deux inconnues.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation $\frac{3}{4}x = \frac{21}{2} - 3y$.

Pour découvrir ses solutions entières, on fera disparaître tous les dénominateurs en multipliant par 4, ce qui donnera

$$3x = 42 - 12y.$$

Supprimant le facteur 3 commun à tous les termes, la question sera réduite à chercher les solutions entières de l'équation

$$(1) \dots x = 14 - 4y.$$

On voit que chaque valeur entière arbitraire e de y fournira une valeur entière correspondante $14 - 4e$ de x . Le système $y = e$, $x = 14 - 4e$ satisfaisant nécessairement à l'équation (1), quel que soit e , cette équation admet une infinité de solutions entières.

Si l'on ne veut admettre pour les inconnues que des valeurs entières positives, il faudra que $4y < 14$; d'où $y < \frac{7}{2}$.

On ne pourra donc donner à y que les valeurs 1, 2, 3; les valeurs correspondantes de x seront 10, 6, 2. De sorte que l'équation (1) n'admet que trois solutions entières positives plus grandes que zéro.

En général, lorsqu'après avoir fait disparaître tous les dénominateurs, on a ramené l'équation à la forme $ax + by = c$, si le coefficient de l'une des inconnues est égal à l'unité, chaque valeur entière arbitraire de l'autre inconnue conduit à une solution entière de l'équation proposée. De sorte qu'il est facile d'obtenir les diverses solutions entières de cette équation.

Quand aucun des coefficients des inconnues n'est égal à l'unité, on ramène ce cas au précédent, en faisant dépendre la résolution de l'équation proposée de celle d'une équation dans laquelle le coefficient de l'une des inconnues est égal à l'unité. En voici des exemples :

2^e EXEMPLE. Soit l'équation (2) : $7x + 2y = 9$.

On en tire

$$y = \frac{9-7x}{2} = -3x + \frac{9-x}{2}.$$

Or, x doit être un nombre entier; par conséquent, pour que cette valeur de y soit aussi entière, il suffit et il faut que $\frac{9-x}{2}$ soit un nombre entier quelconque e . On a donc

$$y = -3x + e, \quad 9 - x = 2e; \quad \text{d'où}$$

$$(3) \dots x = 9 - 2e, \quad y = -3(9 - 2e) + e = 7e - 27.$$

Les valeurs $9 - 2e$, $7e - 27$, de x et y , satisfont à l'équation (2), quel que soit e ; car elles réduisent cette équation à l'identité

$$14e - 14e + 9 = 9.$$

On obtiendra donc toutes les solutions entières de l'équation (2) en donnant à l'indéterminée e les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., -1, -2, -3, etc.

Par exemple, l'hypothèse $e = 2$ donne $x = 5$, $y = -13$.

Si l'on ne veut admettre que des nombres entiers positifs pour x et y , il faudra que

$$2e < 9, \quad 7e > 27; \quad \text{d'où } e < \frac{9}{2}, \quad e > \frac{27}{7}.$$

Le seul nombre entier compris entre $\frac{9}{2}$ et $\frac{27}{7}$ étant 4, l'équation proposée n'admet qu'une solution entière positive.

Pour obtenir cette solution, on fera $e = 4$; les formules (3) donneront $x = 1$, $y = 1$.

3^e EXEMPLE. Soit l'équation (4) $\dots 5x + 3y = 49$.

On en déduit

$$y = \frac{49-5x}{3} = -x + \frac{49-2x}{3}.$$

Or x doit être entier. Par conséquent, pour que la valeur de y soit entière, il suffit et il faut que $\frac{49-2x}{3}$ soit un nombre entier quelconque e . On a donc

$$y = -x + e, \quad 49 - 2x = 3e; \quad \text{d'où}$$

$$x = \frac{49 - 3e}{2} = -e + \frac{49 - e}{2}.$$

Pour que cette valeur de x soit entière, il faut et il suffit que $\frac{49 - e}{2}$ soit un nombre entier quelconque e' . On a donc

$$x = -e + e', \quad e = 49 - 2e'; \quad \text{d'où}$$

$$x = -(49 - 2e') + e' = 3e' - 49,$$

$$y = -x + e = -(3e' - 49) + (49 - 2e') = 98 - 5e'.$$

Ces valeurs de x et y satisfont à l'équation (4), quel que soit e' ; car elles réduisent cette équation à l'identité

$$15e' - 15e' + 49 = 49.$$

Toutes les solutions entières de l'équation (4) se déduiront donc des formules

$$(5) \dots x = 3e' - 49, \quad y = 98 - 5e',$$

en donnant successivement à l'indéterminée e' les valeurs entières 0, 1, 2, 3, etc., -1, -2, -3, etc.

Lorsque x et y doivent être des nombres entiers positifs, il faut que

$$3e' > 49, \quad 5e' < 98; \quad \text{d'où } e' > \frac{49}{3}, \quad e' < \frac{98}{5}.$$

On ne peut donc assigner à e' que les valeurs 17, 18 et 19. Substituant ces valeurs de e' dans les formules (5), on trouve que

$$e' = 17 \quad \text{donne} \quad x = 2, \quad y = 13,$$

$$e' = 18 \quad \text{donne} \quad x = 5, \quad y = 8,$$

$$e' = 19 \quad \text{donne} \quad x = 8, \quad y = 3.$$

Chacun de ces trois systèmes satisfait à l'équation proposée; elle n'admet pas d'autres valeurs entières positives de x et y .

On parvient plus directement aux formules (5), en préparant chaque dividende de manière que le reste n'excede pas la moitié du diviseur. Voici le calcul ainsi effectué :

L'équation (4) ... $5x + 3y = 49$ donne

$$y = \frac{49 - 5x}{3} = \frac{49 + x - 6x}{3} = -2x + \frac{49 + x}{3}.$$

On fait $\frac{49 + x}{3} = e'$; d'où $x = 3e' - 49$,

$$y = -2x + e' = -2(3e' - 49) + e' = 98 - 5e'.$$

Enfin, on peut effectuer le calcul, en extrayant tous les entiers contenus dans chaque expression fractionnaire. L'équation (4) donne

$$y = \frac{49 - 5x}{3} = \frac{48 - 6x + 1 + x}{3} = 16 - 2x + \frac{1 + x}{3}.$$

Posant $\frac{1 + x}{3} = e$, il vient $x = 3e - 1$,

$$y = 16 - 2x + e = 16 - 2(3e - 1) + e = 18 - 5e.$$

Les valeurs (6) ... $x = 3e - 1$, $y = 18 - 5e$,

satisfont à l'équation (4), quel que soit e ; car elles la réduisent à l'identité $15e - 15e = 49 - 49$.

Toutes les solutions entières de cette équation peuvent donc se déduire des formules (6), en donnant à l'indéterminée e les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., -1, -2, -3, etc.

On emploie de préférence ce dernier procédé, parce qu'il conduit à des formules plus simples.

REMARQUE. Chacune des formules (5) et (6) fournissant toutes les solutions entières de l'équation $5x + 3y = 49$, on doit pouvoir les déduire l'une de l'autre. En effet, l'égalité des valeurs $3e' - 49$, $3e - 1$, de x , conduit à $e' = 16 + e$; et la substitution de cette valeur de e' dans $y = 98 - 5e'$ donnant $y = 18 - 5e$, on voit que les relations (6) se déduisent des relations (5), en remplaçant e' par $16 + e$.

4^e EXEMPLE. Soit l'équation $15x + 20y = 7$;
elle donne

$$x = \frac{7 - 20y}{15} = -y + \frac{7 - 5y}{15}.$$

Or y devant être entier, pour que x le soit, il faut et il suffit que $\frac{7-5y}{15}$ soit un nombre entier quelconque e . Donc

$$x = -y + e, \quad 7 - 5y = 15e; \quad \text{d'où}$$

$$y = \frac{7-15e}{5} = \frac{7}{5} - 3e.$$

Comme aucune valeur entière de e ne peut réduire $\frac{7}{5} - 3e$ à un nombre entier, l'équation proposée n'admet aucune solution entière.

Il était facile de prévoir ce résultat; car x et y devant être des nombres entiers, le premier membre $15x + 20y$ est exactement divisible par le plus grand commun diviseur 5 des coefficients 15, 20, de x et y ; le second membre 7 devrait donc être divisible par 5; ce qui n'a pas lieu.

Problèmes indéterminés à deux variables.

71. La recherche des solutions entières d'une équation numérique du premier degré à deux inconnues ne pouvant plus offrir de difficulté, nous allons traiter quelques problèmes, qui conduiront à des équations de cette espèce, et dans lesquels la nature de la question ne permettra d'admettre pour les inconnues que des nombres entiers positifs plus grands que zéro.

1^{er} PROBLÈME. *Payer 70 francs avec des pièces de 5 francs et de 20 francs.*

Si l'on donne x pièces de 5 francs et y pièces de 20 francs, on aura payé x fois 5^f + y fois 20^f, ou $5x + 20y$ francs. Il faut donc que

$$5x + 20y = 70; \quad \text{d'où } x = 2(7 - 2y).$$

Le nombre des pièces de chaque espèce devant être entier et positif, on ne doit admettre que les valeurs entières positives de y qui rendent $7 - 2y$ positif. On ne peut donc assigner à l'indéterminée y que les valeurs 1, 2, 3; les valeurs correspondantes de x déduites de $x = 2(7 - 2y)$ sont 10, 6, 2. La ques-

tion proposée n'admet donc que les trois solutions

$$\begin{array}{l} y=1 \\ x=10 \end{array} \parallel \begin{array}{l} y=2 \\ x=6 \end{array} \parallel \begin{array}{l} y=3 \\ x=2. \end{array}$$

2° PROBLÈME. *Payer 71 francs avec des pièces de 5 francs et de 20 francs.*

Ce problème n'admet aucune solution; car il conduit à l'équation

$$5x + 20y = 71, \text{ d'où } x = \frac{71}{5} - 4y,$$

et la fraction $\frac{71}{5}$ étant irréductible, aucune valeur entière de y ne peut donner une valeur entière de x correspondante.

3° PROBLÈME. *Payer 26 francs avec des pièces de 2 francs et de 5 francs.*

Si l'on prend x pièces de 2 francs et y pièces de 5 francs, ces $x + y$ pièces vaudront $2x + 5y$ francs. Il faut donc que

$$(1) \dots 2x + 5y = 26. \text{ On en tire}$$

$$x = \frac{26 - 5y}{2} = 13 - 2y - \frac{y}{2}.$$

Soit $\frac{y}{2} = e$; on a $y = 2e$,

$$x = 13 - 2y - e = 13 - 4e - e = 13 - 5e.$$

Les valeurs, $2e$, $13 - 5e$, de y et x , devant être entières et positives, il faut que

$$2e > 0, 5e < 13; \text{ d'où } e > 0, e < \frac{13}{5}.$$

On ne peut donc assigner à l'indéterminée e que les valeurs 1 et 2. Or,

$$e = 1, \text{ donne } x = 8, y = 2,$$

$$e = 2, \text{ donne } x = 3, y = 4.$$

On peut donc payer 26 francs avec 8 pièces de 2 francs et 2 pièces de 5 francs, ou avec 3 pièces de 2 francs et 4 pièces de 5 francs.

4° PROBLÈME. *Payer 26 francs en donnant des pièces de 2 fr., et en recevant des pièces de 5 francs.*

Si l'on donne x pièces de 2 francs, et si l'on reçoit y pièces de 5 francs, on aura payé $2x - 5y$ francs. Il faut donc que

$$2x - 5y = 26.$$

Des calculs analogues aux précédents donneront

$$y = 2e, \quad x = 5e + 13.$$

On obtiendra donc toutes les solutions de la question proposée, en donnant à e les valeurs 1, 2, 3, 4, etc.

Par exemple, $e = 1$ donne $x = 18$, $y = 2$.

Et en effet, si l'on donne 18 pièces de 2 francs ou 36 francs, et si l'on reçoit 2 pièces de 5 francs ou 10 francs, on aura payé $36^f - 10^f$ ou 26 francs.

Le problème admet donc une infinité de solutions.

5^e PROBLÈME. *Un troupeau est composé de chèvres et de moutons. Le quintuple du nombre des chèvres est égal au triple du nombre des moutons augmenté d'un. Il s'agit de trouver le nombre des chèvres et celui des moutons.*

Si x et y désignent ces deux nombres, on aura

$$5x = 3y + 1; \text{ d'où } y = \frac{5x-1}{3} = \frac{6x-x-1}{3} = 2x - \frac{x+1}{3}.$$

Soit $\frac{x+1}{3} = e$; on en déduira $x = 3e - 1$,

$$y = 2x - e = 2(3e - 1) - e = 5e - 2.$$

Chaque valeur entière positive de e , substituée dans $x = 3e - 1$, $y = 5e - 2$, fournira une solution de la question proposée.

6^e PROBLÈME. *Les neuf Muses, portant chacune le même nombre de couronnes de fleurs, rencontrent les trois Grâces et leur offrent des couronnes. La distribution faite, les Grâces et les Muses ont chacune le même nombre de couronnes. On demande combien les Muses portaient de couronnes, et combien elles en donnèrent. (Arith., 76^e prob., page 156.)*

Si chaque Muse porte x couronnes et donne y couronnes, les neuf Muses qui avaient $9x$ couronnes, auront donné $9y$ couronnes aux trois Grâces. La distribution faite, chaque Muse

n'aura plus que $(x - y)$ couronnes; les trois Grâces ayant reçu $9y$ couronnes, chacune portera 3 y couronnes. Mais alors, chaque Muse et chaque Grâce, doit avoir le même nombre de couronnes; donc

$x - y = 3y$; d'où $9x = 36y =$ le nombre total des couronnes.

Cette dernière équation démontre que tout multiple de 36 peut être pris pour le nombre total des couronnes. Ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu en Arithmétique (page 156).

7^e PROBLÈME. Former la longueur du MÈTRE en plaçant des pièces d'or, de 20 francs et de 40 francs les unes à la suite des autres. Les diamètres de ces pièces ont 21 et 26 millimètres.

Si l'on prend x pièces de 20^e et y pièces de 40^e, la somme $21x + 26y$ millimètres des diamètres de ces pièces devra être égale à 1000 millimètres. Il suffit donc de chercher les valeurs entières de x et y , qui satisfont à l'équation indéterminée

$$21x + 26y = 1000.$$

On en déduit

$$x = \frac{1000 - 26y}{21} = 47 - y + \frac{13 - 5y}{21}.$$

Posant $13 - 5y = 21e$; on a $x = 47 - y + e$,

$$y = \frac{13 - 21e}{5} = 2 - 4e + \frac{3 - e}{5}.$$

Soit $3 - e = 5e'$; on a $y = 2 - 4e + e'$, $e = 3 - 5e'$.

Substituant cette valeur de e , on trouve

$$y = 21e' - 10, \quad x = 2(30 - 13e').$$

La nature de la question exigeant que y et x soient entiers et positifs, il faut et il suffit que l'entier e' satisfasse aux inégalités

$$21e' > 10, \quad 13e' < 30; \quad \text{d'où } e' > \frac{10}{21}, \quad e' < \frac{30}{13}.$$

On ne peut donc faire que $e' = 1$ et $e' = 2$.

$$e' = 1 \quad \text{donne } x = 34, \quad y = 11,$$

$$e' = 2 \quad \text{donne } x = 8, \quad y = 32.$$

La première solution est celle qui a été donnée en Arithmétique (page 147.)

REMARQUE. Lorsqu'on assigne d'autres valeurs entières à e' , une des inconnues x, y , devient *negative*; ce qui indique qu'on peut obtenir la longueur du mètre en portant d'abord des pièces de 20^f ou de 40^f dans un sens, et en reportant des pièces de 40^f ou de 20^f en sens inverse.

Par exemple, la valeur $e' = 0$ donnant $x = 60$, $y = -10$, on met 60 pièces de 20^f les unes à la suite des autres; on porte 10 pièces de 40^f en sens inverse, en revenant de la dernière pièce de 20^f à la première; la distance de la dernière pièce de 40^f à la 1^{re} pièce de 20^f est 1000 millimètres ou un mètre; car 60 fois 21 millimètres, moins 10 fois 26 millimètres, forment 1000 millimètres.

72. Pour découvrir les propriétés générales des solutions entières des équations du premier degré à deux variables, nous observerons que toute équation de cette espèce est réductible à la forme

$$(1) \dots ax + by = c.$$

a, b, c , désignant des nombres entiers positifs ou négatifs premiers entre eux.

Lorsque a et b ont un facteur commun d , l'équation (1) n'admet aucune solution entière; car x et y devant être des nombres entiers, le premier membre $ax + by$ est exactement divisible par le commun diviseur d de a et b ; le second membre c devrait donc jouir de la même propriété; ce qui est impossible, puisque a, b et c sont premiers entre eux.

Nous allons démontrer que lorsque les coefficients a, b des inconnues x, y n'ont pas de facteur commun, l'équation (1) $ax + by = c$ admet toujours une infinité de solutions entières.

Cela est évident, lorsque le coefficient de l'une des inconnues est égal à l'unité; car chaque valeur entière arbitraire de l'autre inconnue, conduit à une solution entière de l'équation proposée.

Quand aucun des coefficients a, b n'est égal à l'unité, on

peut ramener ce cas au précédent, en faisant dépendre la résolution de l'équation (1), de celle d'une équation dans laquelle le coefficient de l'une des inconnues est égal à l'unité.

En effet, soit $b < a$; l'équation (1) donne

$$(2) \dots by = c - ax, \quad y = \frac{c - ax}{b}.$$

On pourrait extraire les entiers contenus dans cette valeur de y , en divisant c et a par b ; mais comme le but de ces divisions est de réduire le coefficient d'une inconnue à l'unité, il suffit d'effectuer la division sur le coefficient a de x .

Divisant donc a par b , on obtient un quotient entier q et un reste $r < b$; on a

$$a = bq + r, \quad y = \frac{c - (bq + r)x}{b} = -qx + \frac{c - rx}{b}.$$

Or, x doit être entier; par conséquent, pour que y le soit, il suffit et il faut que $\frac{c - rx}{b}$ soit un nombre entier quelconque e . On a donc $y = -qx + e$, $c - rx = be$; d'où

$$(3) \dots rx = c - be.$$

Lorsque $r = 1$, le problème est résolu, car on a

$$a = bq + 1, \quad x = c - be, \\ y = e - qx = e - q(c - be) = (1 + bq)e - cq.$$

Substituant ces valeurs de a , x et y dans l'équation (1); on est conduit à l'égalité

$$b^2qe - b^2qe + be - be + bcq - bcq + c = c,$$

qui est vraie quel que soit e .

Par conséquent, si l'on assigne des valeurs entières quelconques à l'indéterminée e , les formules

$$x = c - be, \quad y = (1 + bq)e - cq,$$

fourniront des valeurs entières correspondantes de x et y , qui satisferont à l'équation (1). De sorte qu'on obtiendra une infinité de solutions entières de cette équation.

EXEMPLE. Soit $7x + 2y = 9$; on a

$$a = 7, \quad b = 2, \quad c = 9, \quad q = 3, \quad r = 1.$$

Les formules $x = c - be$, $y = (1 + bq)e - cq$,
deviennent $x = 9 - 2e$, $y = 7e - 27$.

Ce qui s'accorde avec les résultats que l'on a obtenus dans le 2^e exemple (page 145.)

Quand r n'est pas égal à l'unité, on fait sur l'équation....

$$(3) \dots rx = c - be,$$

des opérations analogues à celles qui ont été effectuées sur l'équation

$$(2) \dots by = c - ax;$$

et la difficulté est diminuée, car il s'agit de parvenir à une équation dans laquelle le coefficient de l'une des inconnues soit égal à l'unité, et les coefficients r, b , des inconnues x, e , dans (3), sont respectivement moindres que les coefficients b, a des inconnues y, x dans (2).

La division de b par r , fournit un quotient entier q' et un reste $r' < r$; on a

$$b = rq' + r', \quad x = \frac{c - (rq' + r')e}{r} = -q'e + \frac{c - r'e}{r}.$$

Or, e est entier; par conséquent, pour que x le soit, il suffit et il faut que $\frac{c - r'e}{r}$ soit un nombre entier quelconque e' .

On a donc

$$x = -q'e + e', \quad (4) \dots r'e = c - re'.$$

Quand $r' = 1$, le problème est résolu; car d'après les relations

$$(5) \dots e = c - re', \quad x = -q'e + e', \quad y = -qx + e,$$

toute valeur entière arbitraire de e' , conduit à une valeur entière correspondante de chacune des inconnues e, x, y .

Si l'on exprime x et y en fonction de e' , on trouvera

$$(6) \dots \begin{cases} x = (1 + rq')e' - cq', \\ y = (1 + qq')c - (q + r + qq'r)e'. \end{cases}$$

Il est facile de s'assurer que d'après les relations $a = bq + r$, $b = r'q' + 1$, les valeurs (6) de x et y satisfont à l'équation (1)... $ax + by = c$, quel que soit e' . De sorte que toutes les solutions entières de l'équation (1) se déduisent des formules (6), en donnant successivement à e' les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, etc., - 1, - 2, - 3, - 4, etc.

EXEMPLE. Soit l'équation $5x + 3y = 49$. On a
 $a = 5$, $b = 3$, $c = 49$, $q = 1$, $r = 2$, $q' = 1$, $r' = 1$;
 et les formules (6) donnent

$$x = 3e' - 49, \quad y = 98 - 5e'.$$

Ces valeurs satisfont à l'équation proposée quel que soit e . Ce qui s'accorde avec les résultats que l'on a obtenus dans le 3^e exemple (pages 145 et 146.)

Lorsque le reste r' n'est pas égal à l'unité, on opère sur (4) comme sur (2) et (3).

Mais, sans pousser plus loin les calculs, on peut observer que les restes successifs r, r' , etc., sont les restes qu'on obtiendrait en cherchant le plus grand commun diviseur de a et b ; car on a d'abord divisé a par b , ce qui a fourni le quotient entier q et le reste $r < b$; on a divisé b par r , ce qui a donné le quotient entier q' et le reste $r' < r$; et ainsi de suite.

Or, a et b sont premiers entre eux; on trouvera donc nécessairement un reste égal à l'unité; et comme les restes r, r' , etc., sont les coefficients des inconnues dans les équations successives (3), (4), etc., on parviendra toujours à une équation dans laquelle le coefficient d'une inconnue sera égal à l'unité. Ce qui démontre le principe énoncé (page 152.)

73. Quand on connaît une solution entière $x = a$, $y = c$, de l'équation (1)... $ax + by = c$, on peut en déduire immédiatement toutes les autres solutions entières de cette équation. En effet; puisque $x = a$, $y = c$, satisfait à (1), on a

$$aa + bc = c; \quad \text{d'où} \quad ax + by = aa + bc.$$

Cette dernière donne (2)... $y - c = -\frac{a(x-a)}{b}$.

Pour que y soit entier, il suffit et il faut que b divise le produit $a \times (x - a)$. Or, a et b sont premiers entre eux; b doit donc diviser $x - a$ (*Arith.*, n° 46, page 44). Désignant le quotient par e , on aura

$$x - a = be, \text{ et (2) donnera } y - c = -ae; \text{ d'où}$$

$$(3) \dots x = a + be, y = c - ae.$$

Les valeurs (3) de x et y satisfont à l'équation (1) quel que soit e , car en les substituant on parvient à la relation $ax + by = c$.

Lorsqu'on connaîtra a et c , toutes les solutions entières de l'équation (1) se déduiront des formules (3), en donnant à l'indéterminée e les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., -1, -2, -3, etc.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation $7x + 2y = 9$.

On voit facilement que $x = 1$, $y = 1$, satisfait à cette équation. Supposant donc $a = 1$, $c = 1$, $a = 7$, $b = 2$, dans (3), on trouvera

$$(4) \dots x = 1 + 2e, y = 1 - 7e.$$

Toutes les solutions entières de l'équation $7x + 2y = 9$ se déduiront des formules (4) en donnant à e les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., -1, -2, -3, etc.

2^e EXEMPLE. Soit l'équation $ax - by = 0$.

On y satisfait en faisant $x = 0$, $y = 0$; de sorte que, dans ce cas, $a = c = 0$. Les solutions entières de l'équation proposée se déduiront donc des formules $x = be$, $y = -ae$, en donnant à e des valeurs entières quelconques. (On suppose toujours que a et b n'ont pas de facteur commun.)

REMARQUE. Les formules (3) $x = a + be$, $y = c - ae$, démontrent que si e augmente de 1, la valeur de x augmentera de b , et celle de y diminuera de a . Par conséquent, les valeurs entières successives de x forment une *progression arithmétique* dont la *raison* est le coefficient b de y , et les valeurs entières correspondantes de y forment une *progression arithmétique*, dont la *raison* est le coefficient a de x , pris avec le signe —.

EXEMPLE. Soit l'équation $5x - 3y = 1$.

On a vu (5^e Problème, page 150) que ses solutions entières sont fournies par les formules

$$x = 3e - 1, \quad y = 5e - 2.$$

Donnant successivement à e les valeurs 1, 2, 3, 4, etc.,
 les valeurs de x seront 2, 5, 8, 11, 14, etc.
 et celles de y seront 3, 8, 13, 18, 23, etc.

Ces valeurs de x et y forment deux progressions arithmétiques, dont les *raisons* sont les coefficients 3, 5, de y et de x .

74. Il résulte de ce qui précède, que lorsque a, b, c étant des nombres entiers positifs premiers entre eux, a et b n'ont pas de facteur commun, chacune des équations

$$(1) \dots ax + by = c, \quad (2) \dots ax - by = c, \\ (3) \dots -ax + by = c, \quad (4) \dots -ax - by = c,$$

admet une infinité de solutions entières.

Le nombre des solutions entières positives de ces équations, dépend des signes des coefficients des inconnues x, y . En effet :

L'équation (1) n'admet qu'un nombre déterminé de solutions entières positives; car la somme des nombres positifs ax, by , devant être égale à la constante c , les parties de cette somme ne sauraient croître indéfiniment.

Chacune des équations (2), (3), peut admettre une infinité de solutions entières positives; car les nombres ax, by , croissant indéfiniment, leur différence peut conserver la même valeur c .

Enfin, il est évident que l'équation (4) n'admet aucune solution entière positive.

75. La manière de trouver les solutions entières de m équations du premier degré entre $m + n$ variables, se déduit de ce qui précède. Pour éviter des répétitions inutiles, nous supposons toujours qu'on a ramené les équations proposées et les transformées, à leurs formes les plus simples; c'est-à-dire qu'on a fait disparaître tous les dénominateurs et qu'on a

ensuite supprimé les facteurs communs aux différens termes de chaque équation. Dans ce cas, lorsqu'on parviendra à une équation dans laquelle les coefficients des inconnues auront un facteur commun, cette équation n'admettant aucune solution entière, il en sera de même des équations proposées; de sorte qu'il sera inutile de continuer à chercher les solutions entières de ces équations.

Proposons-nous d'abord de *calculer les solutions entières de deux équations du premier degré entre trois inconnues x, y, z .*

On ramène d'abord ces équations à la forme

$$(1) \dots ax + by + cz = d, \quad (2) \dots a'x + b'y + c'z = d',$$

a, b, c, d , désignant des nombres entiers premiers entre eux, ainsi que a', b', c', d' . On démontrera comme dans le n° 72, que ces équations n'admettent des solutions entières que lorsque a, b, c , sont premiers entre eux, ainsi que a', b', c' .

Pour découvrir les solutions entières positives des équations (1) et (2), on élimine z entre ces équations; ce qui conduit à un résultat de la forme

$$(3) \dots Ax + By = C.$$

A, B, C , désignant des nombres entiers premiers entre eux.

Le système des équations (1), (2), peut être remplacé par

$$(1) \dots ax + by + cz = d, \quad (3) \dots Ax + By = C.$$

Il suffit donc de chercher les valeurs entières de x, y, z , qui satisfont aux équations (1) et (3).

Si A et B ont un facteur commun, l'équation (3) n'admettra pas de solution entière. Le problème sera donc impossible.

Si A et B sont premiers entre eux, l'équation (3) admettra une infinité de solutions entières. La recherche de ces solutions conduira à des résultats de la forme

$$(4) \dots x = a' + Be, \quad y = c' - Ae,$$

dans lesquels e désigne un nombre entier arbitraire.

Les valeurs (4) de x, y satisfont à l'équation (3) quel que soit e . Il suffit donc d'exprimer que ces valeurs conviennent à l'é-

quation (1). Substituant les valeurs (4) de x et y , dans (1), on parvient à un résultat de la forme

$$(5) \dots A'z + B'e = C',$$

dans lequel A' , B' , C' , sont des nombres entiers premiers entre eux.

Si A' et B' ont un facteur commun, l'équation (5) n'admettra pas de solution entière.

Si A' et B' sont premiers entre eux, l'équation (5) admettra une infinité de solutions entières, et la recherche de ces solutions conduira à des résultats de la forme

$$z = \gamma + B'e', \quad e = \delta - A'e',$$

dans lesquels e' représente un nombre entier arbitraire.

Mettant la valeur $\delta - A'e'$ de e , dans (4), on obtiendra des résultats de la forme

$$(6) \dots x = \alpha - BA'e', \quad y = \beta + AA'e'; \quad \text{on a } z = \gamma + B'e'.$$

Toutes les valeurs entières de x , y , z , qui satisfont aux équations (1) et (2), se déduiront des formules (6), en donnant successivement à e' les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., -1, -2, -3, etc.

Si, A et B étant premiers entre eux, A' et B' avaient un facteur commun, les formules (4) donneraient des valeurs entières de x et y ; mais alors, l'équation (5) n'admettant pas de solutions entières, les valeurs correspondantes de z seraient fractionnaires.

Appliquons cette théorie à un exemple numérique.

$$\text{Soient, } 4x - 2y + 5z = 13, \quad -3x + 7y + 5z = 10.$$

$$\text{L'élimination de } z \text{ donne } 7x - 9y = 3.$$

Si l'on cherche les solutions entières de cette dernière équation, on trouvera

$$x = 12 + 9e, \quad y = 9 + 7e.$$

Substituant ces valeurs de x et y dans l'une quelconque des équations proposées, on parvient à

$$5z + 22e = -17; \text{ d'où}$$

$$z = -4e - 3 - \frac{2(1+e)}{5}. \text{ Soit } 1+e = 5e', \text{ on a}$$

$$e = 5e' - 1, z = -4e - 3 - 2e'.$$

Substituant la valeur $5e' - 1$ de e dans celles de x, y, z , on trouve

$$(1) \dots x = 3(1 + 15e'), y = 2 + 35e', z = 1 - 22e'.$$

Ces valeurs de x, y, z satisfont aux équations proposées quel que soit e' , car elles rendent ces équations identiques.

On obtiendra toutes les solutions entières des équations proposées en donnant à e' les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., -1, -2, etc.

Les formules (1) démontrent qu'il n'existe qu'une seule solution entière positive; car

$$e' = 0 \text{ donne } x = 3, y = 2, z = 1,$$

et pour toute autre valeur entière positive ou négative de e' , l'une des inconnues x, y, z devient négative.

On déduit facilement de ce qui précède, la manière de trouver les solutions entières de m équations numériques du premier degré entre $m + n$ inconnues. En voici des exemples.

1^{er} EXEMPLE. Soient les trois équations

$$3x - 2y = 21, x = 3z + 2, y = 6t + 3.$$

Éliminant x et y , on trouve $3z - 4t = 7$.

Cette dernière équation, entre les deux inconnues z, t , donne

$$(2) \dots t = 3e - 7, z = 4e - 7.$$

La substitution de ces valeurs de t, z , dans celles de x, y , conduit à (3)...

$$(3) \dots x = 12e - 19, y = 3(6e - 13).$$

Les valeurs (2), (3), de t, z, x et y , satisfont aux équations proposées, quel que soit e .

Si l'on ne veut admettre que les valeurs entières positives de x, y, z et t , il faudra que le nombre entier arbitraire e satisfasse aux inégalités

$$12e > 19, 6e > 13; \text{ d'où } e > \frac{19}{12}, e > \frac{13}{6}.$$

Il suffit donc de prendre pour e un nombre entier plus grand que 2. Ainsi, toutes les solutions entières positives des équations proposées, se déduiront des formules (2) et (3), en donnant à e les valeurs 3, 4, 5, 6, etc.

2^e EXEMPLE. Soit l'équation $7x + 9y + 11z = 57$.

On en tire $x = \frac{57 - 9y - 11z}{7} = 8 - y - z + \frac{1 - 2y - 4z}{7}$.

On fait $\frac{1 - 2y - 4z}{7} = e$; d'où $x = 8 - y - z + e$,

$$y = \frac{1 - 4z - 7e}{2} = -2z - 3e + \frac{1 - e}{2}.$$

Posant $1 - e = 2e'$, on a $y = -2z - 3e + e'$, $e = 1 - 2e'$.

La substitution de cette valeur de e , dans celles de y et x donne

$$(2) \dots y = 7e' - (2z + 3), \quad x = z + 12 - 9e'.$$

Ces valeurs de y et x satisfont à l'équation proposée, quels que soient e' et z . On obtiendra toutes les solutions entières de cette équation en donnant aux indéterminées e' , z , les valeurs 0, 1, 2, etc., -1, -2, etc.

Pour trouver les solutions entières positives, on observe que y devant être positif, il faut que e' soit positif et plus grand que zéro.

D'ailleurs, y et x devant être positifs, il faut que

$$7e' > 2z + 3, \quad 9e' < z + 12; \text{ d'où}$$

$$2z < 7e' - 3, \quad 2z > 2(9e' - 12).$$

Ces deux dernières inégalités exigent que

$$2(9e' - 12) < 7e' - 3; \text{ d'où } e' < \frac{21}{11}. \text{ Mais } e' > 0.$$

On ne peut donc admettre que la valeur $e' = 1$, pour laquelle les formules (2) donnent

$$y = 2(2 - z), \quad x = z + 3.$$

Or, y doit être positif et plus grand que zéro. On ne peut donc faire que $z = 1$; d'où $y = 2$ et $x = 4$.

La seule solution positive de l'équation proposée est donc $x=4$, $y=2$, $z=1$.

3^e EXEMPLE. $x+y+z+t=100$, $20x+10y+4z+t=200$.

L'élimination de t donne

$$(1) \dots 19x + 9y + 3z = 100; \text{ d'où}$$

$$z = \frac{100 - 19x - 9y}{3} = 33 - 6x - 3y + \frac{1-x}{3}.$$

x et y étant entiers, pour que z le soit, il suffit et il faut que $\frac{1-x}{3}$ soit un nombre entier quelconque e . Donc

$$1-x=3e; \text{ d'où } z=33-6x-3y+e, \quad x=1-3e.$$

Substituant cette valeur de x dans celle de z , on trouve

$$z=27+19e-3y.$$

$$\text{Les valeurs } x=1-3e, \quad z=27+19e-3y,$$

satisfont à (1) quels que soient y et e . En les substituant dans l'une quelconque des équations proposées, on parvient à

$$t=72+2y-16e.$$

Les valeurs

$$x=1-3e, \quad z=27+19e-3y, \quad t=72+2y-16e,$$

satisfont aux équations proposées quels que soient y et e . De sorte qu'on obtiendra toutes les solutions entières de ces équations, en donnant aux indéterminées y , e , les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., -1, -2, -3, etc.

Il existe donc une infinité de solutions entières.

Pour trouver les solutions entières positives, on observe que la valeur $1-3e$ de x devant être positive, il faut que e soit zéro, ou que e soit un nombre négatif $-e'$.

$$e=0 \text{ donne } x=1, \quad z=3(9-y), \quad t=2(y+36).$$

z devant être positif, on ne peut donner à y que les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ce qui fournit huit solutions entières positives des équations proposées.

Pour obtenir toutes les autres solutions entières positives, on fera $e = -e'$. D'où

$$x = 1 + 3e', \quad z = 27 - 19e' - 3y, \quad t = 72 + 2y + 16e'.$$

Mais, z doit être plus grand que zéro; il faut donc que $19e'$ soit moindre que 27. On ne peut donc faire que $e' = 1$; d'où

$$x = 4, \quad z = 8 - 3y, \quad t = 88 + 2y.$$

Or, z doit être positif; il faut donc que $y = 1$ ou que $y = 2$; ce qui donnera les deux autres solutions entières positives dont les équations proposées sont susceptibles.

PROBLÈMES INDÉTERMINÉS.

76. Appliquons ce qui précède à la résolution de quelques questions.

1^{er} PROBLÈME. *Un nombre est composé de trois chiffres. Le quadruple du chiffre des unités, diminué du double du chiffre des dizaines, et augmenté du quintuple du chiffre des centaines, donne 13. Le quintuple du chiffre des centaines, plus 7 fois le chiffre des dizaines, moins le triple du chiffre des unités, donne 10. Trouver ce nombre.*

Si le nombre cherché est composé de x unités, de y dizaines et de z centaines, ces trois chiffres devront satisfaire aux équations

$$4x - 2y + 5z = 13, \quad 5z + 7y - 3x = 10;$$

et d'après la nature de la question, on ne devra admettre pour x, y, z , que des nombres entiers positifs moindres que 10.

On a vu (pages 159 et 160), qu'il n'existe qu'une solution entière positive $x = 3, y = 2, z = 1$. De sorte que le nombre cherché est 123.

2^e PROBLÈME. *Déterminer deux nombres entiers positifs x, y , tels que le triple du premier, diminué du double du second, soit égal à 21; le premier de ces nombres, divisé par 3, conduit au reste 2, et le reste de la division du second nombre par 6, est 3.*

La division de x par 3 doit donner un quotient entier positif

quelconque z , et le reste 2; la division de y par 6, fournit un quotient entier positif quelconque t , et le reste 3; on a donc

$$3x - 2y = 21, \quad x = 3z + 2, \quad y = 6t + 3.$$

On a vu (1^{er} exemple, pages 160 et 161), que ces équations admettent une infinité de solutions entières positives qui se déduisent des formules

$$x = 12e - 19, \quad y = 3(6e - 13), \quad z = 4e - 7, \quad t = 3e - 7,$$

en donnant à e les valeurs 3, 4, 5, 6, 7, etc.

3^e. PROBLÈME. *Trouver un nombre entier positif tel qu'en le divisant successivement par 6, par 12 et par 15, les restes correspondans soient 1, 1 et 10.*

Si l'on représente par t le nombre cherché, et par x, y, z les quotiens correspondans aux diviseurs 6, 12, 15, il faudra que

$$t = 6x + 1 = 12y + 1 = 15z + 10.$$

Ce qui revient au système

$$6x + 1 = 12y + 1, \quad 6x + 1 = 15z + 10, \quad t = 6x + 1.$$

Les solutions entières des équations

$$6x + 1 = 12y + 1, \quad 6x + 1 = 15z + 10,$$

seront fournies par les formules

$$x = 2(2 + 5e'), \quad y = 2 + 5e', \quad z = 1 + 4e'.$$

On en déduit $t = 5(5 + 12e')$.

Tous les nombres qui jouissent des propriétés demandées, se déduiront de la formule $t = 5(5 + 12e')$, en donnant successivement à l'indéterminée e' les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, etc.

On trouvera que ces nombres sont,

$$25, 85, 145, 205, 265, 325, 385, 445, \text{ etc.}$$

Ils forment une progression arithmétique dont la raison est 60.

4^e PROBLÈME. *Payer 57000 francs avec des billets de 7000 francs, de 9000 francs et de 11000 francs.*

Si x, y et z désignent le nombre des billets de chaque espèce,

on aura

$$7000x + 9000y + 11000z = 57000.$$

Divisant tous les termes par 1000, il vient

$$7x + 9y + 11z = 57.$$

On a vu (2^e exemple, page 161), que la seule solution entière positive de cette équation est $x=4$, $y=2$, $z=1$.

De sorte qu'on effectuera le paiement des 57000^f en donnant quatre billets de 7000^f, plus deux billets de 9000^f, plus un billet de 11000 francs.

5^e PROBLÈME. *Un fermier achète 100 bêtes pour 100 pistoles, à raison de 10 pistoles par bœuf, de 5 pistoles par vache, de 2 pistoles par veau, et d'une demi-pistole par mouton. Il s'agit de trouver combien il y a d'animaux de chaque espèce.*

Soient x, y, z et t les nombres cherchés. Ils devront satisfaire aux conditions

$$x + y + z + t = 100, \quad 10x + 5y + 2z + \frac{1}{2}t = 100.$$

On a vu (3^e exemple, pages 162 et 163), que ces équations admettent dix solutions entières positives, dont les huit premières se déduisent des formules

$$x = 1, \quad z = 3(9 - y), \quad t = 2(y + 36),$$

en donnant successivement à y les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; et dont les deux autres sont fournies par les relations

$$x = 4, \quad z = 8 - 3y, \quad t = 88 + 2y,$$

en faisant $y=1$ et $y=2$.

Par exemple, soit $y=3$; on a $x=1$, $z=18$, $t=78$.

Et en effet

1 bœuf vaut.		10 pistoles,
3 vaches valent	3 fois 5 pistoles, ou	15 pistoles,
18 veaux valent	18 fois 2 pistoles, ou	36 pistoles,
78 moutons valent	78 fois $\frac{1}{2}$ pistole, ou	39 pistoles,

Ces 100 bêtes valent donc..... 100 pistoles.

6^e PROBLÈME. *Trouver un nombre de quatre chiffres tel, que*

le 1^{er} chiffre (à partir de la gauche) ajouté au dernier donne 8, que le 2^e ajouté au 3^e donne 7, que le 1^{er} plus le 3^e, fournisse une somme égale aux $\frac{2}{3}$ de la somme des deux autres, et que la somme des quatre chiffres soit 15.

Si x , y , z et t désignent les chiffres du nombre demandé, on aura

$$x+t=8, \quad y+z=7, \quad x+z=\frac{2}{3}(y+t), \quad x+y+z+t=15.$$

Le problème paraît déterminé, car on a quatre équations entre quatre inconnues. Mais il est facile de voir que la dernière équation n'est qu'une conséquence des deux premières. On n'a donc réellement que trois équations distinctes, entre les quatre inconnues x , y , z , t . Le problème est donc indéterminé.

Pour trouver toutes ses solutions, on tire des trois premières équations, les valeurs de y , z , t , en fonction de l'indéterminée x , ce qui conduit à

$$(1) \dots y=1+x, \quad z=6-x, \quad t=8-x.$$

Le nombre cherché devant être composé de quatre chiffres x , y , z , t , le chiffre x des mille ne peut être zéro; et d'ailleurs x , y , z , t , doivent être des nombres entiers positifs. Toutes les solutions du problème proposé se déduiront donc des formules (1) en donnant successivement à x les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6. Cela fournira les six nombres

$$1257, \quad 2346, \quad 3435, \quad 4524, \quad 5613, \quad 6702,$$

qui jouissent des propriétés demandées.

Nous terminerons l'analyse indéterminée en traitant une question dans laquelle il n'y aura que certaines inconnues qui devront être des nombres entiers positifs.

7^e PROBLÈME. *Trois mobiles partent en même temps d'un même point d'une circonférence; ils la parcourent dans le même sens avec des vitesses constantes; la longueur de la circonférence est c mètres. Il s'agit de trouver dans combien d'heures ces mobiles se rencontreront deux à deux et trois à trois.*

Soient v' , v'' et v''' mètres, les espaces qu'ils parcourent en

une heure; et supposons

$$v'' > v', v' > v'.$$

Pour que deux de ces mobiles se rencontrent, il suffit et il faut que la distance parcourue par l'un de ces mobiles soit égale à celle que l'autre mobile a parcourue pendant le même temps, augmentée d'un nombre exact de circonférences.

Cela posé : si après y heures de marche, les deux premiers mobiles se trouvent sur un même point de la circonférence, les espaces qu'ils auront parcourus seront $v'y$, $v''y$ mètres; et n désignant un nombre entier positif quelconque, il faudra que

$$v''y = v'y + nc; \text{ d'où (1)... } y = \frac{nc}{v'' - v'}.$$

Donnant successivement à n les valeurs 1, 2, 3, etc., les valeurs correspondantes de y exprimeront dans combien d'heures le 2^e mobile rencontrera le 1^{er} mobile, pour la 1^{re} fois, pour la 2^e fois, pour la 3^e fois, etc.

Par une raison semblable, le 3^e mobile aura rencontré n' fois le 1^{er} mobile, dans $\frac{n'c}{v'' - v'}$ heures; et le 3^e mobile aura rencontré n'' fois le 2^e mobile, dans $\frac{n''c}{v'' - v'}$ heures; désignant ces deux nombres d'heures, par z et t , on aura

$$(1)... y = \frac{nc}{v'' - v'}, (2)... z = \frac{n'c}{v'' - v'}, (3)... t = \frac{n''c}{v'' - v'}.$$

D'après la nature de la question, les inconnues y , z , t , doivent être des nombres positifs entiers ou fractionnaires; et les indéterminées n , n' , n'' , doivent être des nombres entiers positifs.

Pour trouver les valeurs de y , z et t , correspondantes aux rencontres deux à deux des mobiles, il suffit de donner successivement aux indéterminées n , n' , n'' , les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc.

Par exemple, en faisant $n' = 5$, la formule (2) indiquera après combien d'heures le 3^e mobile rencontrera le 1^{er}, pour la cinquième fois.

Les rencontres des mobiles trois à trois, se déduisent de ce qui précède. En effet, le 2^e mobile rencontre le 1^{er} après y heures, et le 3^e rencontre le 1^{er} après z heures. Par conséquent, pour que les trois mobiles se trouvent sur un même point de la circonférence, il suffit et il faut que les valeurs (1), (2) de y et de z soient égales entre elles.

La question est ainsi réduite à calculer les valeurs entières positives des indéterminées n, n' , qui satisfont à l'équation

$$\frac{nc}{v'' - v'} = \frac{n'c}{v'' - v'}; \text{ d'où } (4) \dots \frac{n}{n'} = \frac{v'' - v'}{v'' - v'}.$$

Lorsque les valeurs numériques des vitesses v', v'', v''' seront données, on réduira la fraction $\frac{v'' - v'}{v'' - v'}$ à sa plus simple expression $\frac{a}{c}$; a et c seront des nombres entiers positifs, premiers entre eux; on aura

$$\frac{n}{n'} = \frac{a}{c}; \text{ d'où } (4) \dots cn - an' = 0;$$

et d'après ce qu'on a vu (page 156), toutes les solutions entières positives de l'équation (4) se déduiront des formules $n = ae$, $n' = ce$, en donnant successivement à e les valeurs 1, 2, 3, etc.

Le nombre d'heures écoulées depuis l'instant du départ des trois mobiles jusqu'au moment où ils se retrouvent sur un même point de la circonférence, est exprimé par l'une quelconque des quantités égales $\frac{nc}{v'' - v'}$, $\frac{n'c}{v'' - v'}$; désignant ce nombre d'heures par x , et remplaçant les indéterminées n, n' , par leurs valeurs générales ae, ce , on aura

$$(5) \dots x = \frac{ace}{v'' - v'} = \frac{cce}{v'' - v'}.$$

Les mobiles se seront donc rencontrés e fois, trois à trois, dans $\frac{ace}{v'' - v'}$ heures.

Les valeurs correspondantes de y et z se déduisent des formules (1), (2), en y faisant $n = ae$, $n' = ce$; ce qui donne

$$y = \frac{aec}{v'' - v'}, \quad z = \frac{cec}{v'' - v'}.$$

On voit donc que pendant ce temps, le 2^e mobile aura rencontré ae fois le 1^{er}, et le 3^e aura rencontré ce fois le 1^{er}.

Il est facile d'en conclure que le 3^e mobile aura rencontré $(c - a)e$ fois le 2^e; car les relations (5) donnent

$$(v'' - v')x = ace, \quad (v'' - v')x = cce;$$

éliminant v' entre ces deux équations, il vient

$$(v'' - v'')x = (c - a)ec, \quad x = \frac{(c - a)ec}{v'' - v''},$$

et la comparaison de cette valeur de x avec la valeur $\frac{n^c c}{v'' - v''}$ de t , démontre la propriété énoncée, car il en résulte que $n^c = (c - a)e$.

Ainsi, après $\frac{aec}{v'' - v'}$ heures, le 2^e mobile aura rencontré ae fois le 1^{er} mobile, le 3^e mobile aura rencontré ce fois le 1^{er} mobile, le 3^e mobile aura rencontré $(c - a)e$ fois le 2^e mobile, et les mobiles se seront rencontrés e fois trois à trois.

EXEMPLE. Une montre marque les heures, les minutes et les secondes; les trois aiguilles sont sur la douzième heure; il s'agit de trouver les rencontres deux à deux et trois à trois de ces aiguilles.

Le cadran est divisé en 60 parties égales; pendant une heure, les aiguilles parcourent respectivement 5, 60 et 3600 de ces divisions; on a donc

$$v' = 5, \quad v'' = 60, \quad v''' = 3600, \quad c = 60; \quad \text{d'où}$$

$$\frac{v'' - v'}{v''' - v'} = \frac{55}{3595} = \frac{11}{719} = \frac{a}{c}, \quad a = 11, \quad c = 719, \quad \frac{ca}{v''' - v'} = 12.$$

Ainsi, la première rencontre des trois aiguilles aura lieu dans 12 heures; l'aiguille des minutes aura rencontré 11 fois celle des heures, l'aiguille des secondes aura rencontré 719 fois celle des heures et 708 fois celle des minutes.

CHAPITRE III.

Des Quarrés et de la Racine quarrée. Des Équations et des problèmes du second degré. Des propriétés des Trinomes du second degré.

§ 1^{er}. Des Quarrés et de la Racine quarrée.

77. Le produit d'une quantité par elle-même est le QUARRÉ ou la DEUXIÈME PUISSANCE de cette quantité. La quantité qui multipliée par elle-même fournit une quantité donnée est la RACINE QUARRÉE ou la RACINE DEUXIÈME de cette quantité donnée.

Nous avons vu en Arithmétique comment on forme les quarrés des nombres, et comment on revient à leurs racines.

Nous allons nous occuper des quantités littérales.

Pour indiquer le quarré d'une quantité, on la met entre parenthèses et on place le chiffre 2 à droite de la parenthèse et un peu au-dessus.

Lorsqu'on veut indiquer la racine quarrée d'une quantité, on couvre cette quantité du signe $\sqrt{\quad}$ nommé RADICAL.

Ainsi, l'expression $(a + 2b - c)^2$ représente le quarré du trinome $a + 2b - c$, et $\sqrt{a + 2b - c}$ désigne la racine quarrée de $a + 2b - c$.

On indique quelquefois ce quarré et cette racine de cette autre manière, moins usitée,

$$\overline{a + 2b - c}^2, \sqrt{a + 2b - c}.$$

Des Quarrés et de la Racine quarrée des monomes.

78. Le quarré de $ca^p b^q$ étant $ca^p b^q \times ca^p b^q$ ou $c^2(a^p)^2 \times (b^q)^2$, ou $c^2 a^{2p} b^{2q}$, on voit que pour obtenir le quarré d'un monome,

il suffit d'élever chaque facteur de ce monome au quarré ; ce qui revient à former le quarré du coefficient numérique c , et à doubler les exposans des autres facteurs.

Par conséquent : Pour revenir du quarré d'un monome à sa racine, il suffit d'extraire la racine quarrée de chaque facteur de ce monome ; ce qui se réduit à extraire la racine quarrée du coefficient numérique, et à diviser par 2 les exposans des autres facteurs. Ainsi,

$$\sqrt{9a^8b^{12}}=3a^4b^6, \quad \sqrt{25a^2b^2c^4}=5ab^2c^2, \quad \sqrt{64a^8b^2}=8a^4b.$$

Quand tous les facteurs d'un monome ne sont pas des quarrés, ce monome n'est pas un quarré ; on indique alors l'extraction de la racine, et on réduit ensuite le radical à sa plus simple expression, en faisant sortir de dessous ce radical, les facteurs qui ont des racines exactes.

Par exemple,

$$\sqrt{18a^9b^7}=\sqrt{9a^8b^6 \times 2ab}=\sqrt{9a^8b^6} \times \sqrt{2ab}=3a^4b^3\sqrt{2ab}.$$

Le radical $\sqrt{2ab}$ est réduit à sa plus simple expression, car on ne peut en faire sortir aucun facteur.

Pour faire passer sous un radical quarré un facteur placé hors du radical, il suffit d'élever ce facteur au quarré.

Ainsi,

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}, \quad 2a\sqrt{b+c}=\sqrt{4a^2(b+c)}, \\ 3a^4b^3\sqrt{2ab}=3a^4\sqrt{2ab \times b^2}=3\sqrt{2ab \times b^2 \times a^8}=\sqrt{18a^8b^7}.$$

Les expressions littérales qui ne contiennent pas de radicaux, sont dites *rationnelles*, et celles qui renferment des radicaux sont *irrationnelles*.

Ainsi, les quantités $2a^2b$, $\frac{c}{d}$, $a^2 - \frac{3}{2}b + c$, $\frac{a-b}{c-d}$, sont *rationnelles*, et $\sqrt{2ab}$ est *irrationnelle*.

Une quantité littérale irrationnelle peut devenir commensurable, lorsqu'on remplace les lettres par des nombres.

Par exemple, lorsqu'on fait $a=3$, $b=6$, l'irrationnelle $\sqrt{2ab}$ devient $\sqrt{36}$ ou 6.

Le carré de $\frac{a}{b}$ étant $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$ ou $\frac{a \times a}{b \times b}$ ou $\frac{a^2}{b^2}$, on voit que le carré d'une fraction s'obtient en élevant séparément le numérateur et le dénominateur au carré.

$$\text{Ainsi,} \quad \left(\frac{3a^4b^5}{7cd^3}\right)^2 = \frac{(3a^4b^5)^2}{(7cd^3)^2} = \frac{9a^8b^{10}}{49c^2d^6}.$$

Par conséquent : Pour trouver la racine d'une fraction, il suffit d'extraire séparément la racine du numérateur et du dénominateur.

$$\text{Ainsi,} \quad \sqrt{\frac{9a^8b^{10}}{49c^2d^6}} = \frac{\sqrt{9a^8b^{10}}}{\sqrt{49c^2d^6}} = \frac{3a^4b^5}{7cd^3}.$$

REMARQUE. Quand le dénominateur n'est pas un carré, on peut réduire le calcul à extraire la racine d'un seul entier, en multipliant d'abord les deux termes de la fraction par son dénominateur; car

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{bb}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{bb}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Des carrés et de la racine carrée des polynomes.

79. Pour former le carré de $a + b$, on effectue le produit de $a + b$ par $a + b$, et on trouve que

$$(1) \dots (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Cette formule démontre que le carré de la somme de deux quantités est composé, du carré de la première quantité, du double de la première quantité multiplié par la seconde, et du carré de la seconde.

On trouve, d'après cette règle, que

$$(2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 - 20x^4 + 25x^2.$$

La formule (1) donne le moyen de former le carré d'un polynome quelconque.

Pour trouver le carré du trinome $a + b + c$, on change b

en $b + c$ dans (1); ce qui donne

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2.$$

On développe le carré de $b + c$, on multiplie $b + c$ par $2a$, et l'on trouve

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2.$$

Pour déduire de cette dernière formule le carré d'un quatri-nome, il suffit d'y changer c en $c + d$, et de développer ensuite le carré de $c + d$.

On trouve de cette manière que le carré de $a + b + c + d$ est

$$a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2;$$

et ainsi de suite.

Il est facile de conclure de ces formules que le carré d'un polynome quelconque est composé : du carré du 1^{er} terme, du double du 1^{er} terme multiplié par tous les autres termes; du carré du 2^e terme, du double de ce 2^e terme multiplié par tous les termes suivans; du carré du 3^e terme, du double de ce 3^e terme par tous les termes qui le suivent; et ainsi de suite, jusqu'au carré du dernier terme.

On trouve d'après cette règle, que le carré de $2a^3 + 7a^2 + 3$ est $4a^6 + 28a^5 + 49a^4 + 12a^3 + 42a^2 + 9$,

et que le carré de $a + bx + cx^2 + dx^3$ est

$$\begin{aligned} a^2 + 2abx + 2acx^2 + 2adx^3 \\ + b^2x^2 + 2bcx^3 + 2bdx^4 \\ + c^2x^4 + 2cdx^5 + d^2x^6. \end{aligned}$$

80. Nous allons faire voir actuellement comment on peut extraire la racine carrée d'un polynome. Nous supposons que tous les polynomes sont ordonnés suivant les puissances d'une même lettre.

1^{er} EXEMPLE. Soit proposé d'extraire la racine carrée de

$$4a^6 + 28a^5 + 49a^4 + 12a^3 + 42a^2 + 9.$$

On dispose et on effectue le calcul de la manière suivante :

(Quarré	$4a^6 + 28a^5 + 49a^4 + 12a^3 + 42a^2 + 9$	$2a^3 + 7a^2 + 3$	Racine.
	$-4a^6$		
1 ^{er} reste,	$R = 28a^5 + 49a^4 + 12a^3 + 42a^2 + 9$ $-28a^5 - 49a^4$	$4a^3 + 7a^2$ $+ 7a^2$	$4a^3 + 14a^2 + 3$ $+ 3$
2 ^e reste,	$R' = \dots\dots\dots 12a^3 + 42a^2 + 9$ $-12a^3 - 42a^2 - 9$	$28a^5 + 49a^4$	$12a^3 + 42a^2 + 9$
3 ^e reste,	$R'' = 0$		

Pour calculer la racine cherchée, on observe que le 1^{er} terme du produit de deux polynômes étant le produit du 1^{er} terme du multiplicande par le 1^{er} terme du multiplicateur (n° 19), le premier terme du quarré d'un polynôme, est le quarré du premier terme de ce polynôme.

Par conséquent, le 1^{er} terme $4a^6$ du polynôme donné est le quarré du 1^{er} terme de la racine demandée; le 1^{er} terme de cette racine est donc $\sqrt{4a^6}$ ou $2a^3$.

Désignant par r , la somme des autres termes de la racine, et par P le polynôme proposé, on a

$$P = (2a^3 + r)^2 = 4a^6 + 4a^3r + r^2 = 4a^6 + 28a^5 + \text{etc.}$$

Retranchant $(2a^3)^2$ ou $4a^6$, de P , le 1^{er} reste est

$$R = P - 4a^6 = r \times (4a^3 + r) = 28a^5 + 49a^4 + \text{etc.}$$

Le 1^{er} terme $28a^5$ de ce reste est donc le produit du 1^{er} terme de r , par le 1^{er} terme $4a^3$ du facteur $4a^3 + r$; la division du 1^{er} terme $28a^5$ du 1^{er} reste, par le double $4a^3$ du 1^{er} terme de la racine, donne donc le 1^{er} terme $7a^2$ de r , c'est-à-dire le 2^e terme de la racine cherchée.

Retranchant de P , le quarré $(2a^3 + 7a^2)^2$ de la somme des deux premiers termes de la racine, ou, ce qui est plus simple, retranchant du 1^{er} reste R le produit de $4a^3 + 7a^2$ par $7a^2$ (*),

(*) La formule $(p + q)^2 = p^2 + (2p + q)q$, démontre que pour soustraire $(p + q)^2$, de α , il suffit d'ôter d'abord p^2 de α , et d'ôter ensuite $(2p + q) \times q$, du reste $\alpha - p^2$.

on obtient un 2^e reste,

$$R' = 12a^3 + 42a^2 + 9.$$

Pour trouver les autres termes de la racine, on désigne leur somme par r' , et regardant $2a^3 + 7a^2$ comme la 1^{re} partie de la racine demandée, on a

$$P = (2a^3 + 7a^2 + r')^2 = (2a^3 + 7a^2)^2 + 2(2a^3 + 7a^2)r' + r'^2. \text{ Or, } \\ R' = P - (2a^3 + 7a^2)^2. \text{ Donc } R' = r' \times \{2(2a^3 + 7a^2) + r'\} = 12a^3 + \text{etc.}$$

Les exposans de a dans r' étant moindres que 2, on est certain que $12a^3$ est le produit du 1^{er} terme de r' , par le 1^{er} terme $4a^2$ du facteur $2(2a^3 + 7a^2) + r'$. Divisant donc le 1^{er} terme $12a^3$ du 2^e reste, par le double $4a^2$ du 1^{er} terme de la racine, le quotient 3 est le 1^{er} terme de r' , c'est-à-dire le 3^e terme de la racine demandée.

Retranchant de P le carré $(2a^3 + 7a^2 + 3)^2$, de la somme des trois premiers termes de la racine, ou, ce qui est plus simple, ôtant du 2^e reste R' , le produit de $2(2a^3 + 7a^2) + 3$ par 3, le 3^e reste est zéro.

La racine demandée est donc $2a^3 + 7a^2 + 3$.

On parviendrait au même résultat en ordonnant le polynome proposé et tous les restes, par rapport aux puissances croissantes de a . On trouverait que la racine demandée est $3 + 7a^2 + 2a^3$.

81. On en déduit cette règle générale : *Pour extraire la racine quarrée d'un polynome quelconque P, ordonnez-le par rapport aux puissances d'une même lettre. Concevez que la racine et les restes successifs soient ordonnés par rapport à la même lettre, et disposez les calculs comme dans l'exemple précédent. La racine du 1^{er} terme de P, sera le 1^{er} terme δ de la racine demandée. Otez δ^2 de P; le 1^{er} terme du reste R, divisé par 2δ , donnera le 2^e terme δ' de la racine. Retranchez de R, le produit de $2\delta + \delta'$ par δ' ; vous obtiendrez un second reste R'; la division du 1^{er} terme de R' par 2δ , donnera le 3^e terme de la racine; et ainsi de suite. Lorsque vous parviendrez à un reste nul, la racine obtenue sera exacte.*

2^e EXEMPLE. Soit proposé d'extraire la racine de

$$-42a^2b^3 + 12a^3b^6 + 9b^4 + 49a^4b^6 + 4a^6b^8 - 28a^5b^7,$$

on ordonne ce polynome par rapport aux puissances décroissantes de a , et on dispose ainsi le calcul

$4a^6b^8 - 28a^5b^7 + 49a^4b^6 + 12a^3b^6 - 42a^2b^3 + 9b^4$ $- 4a^6b^8$	$2a^3b^4 - 7a^2b^3 + 3b^2$
$1^{\text{er}} \text{ reste, } -28a^5b^7 + 49a^4b^6 + 12a^3b^6 - 42a^2b^3 + 9b^4$ $+ 28a^5b^7 - 49a^4b^6$	$4a^3b^4 - 7a^2b^3$ $- 7a^2b^3$
$2^{\text{e}} \text{ reste, } +12a^3b^6 - 42a^2b^3 + 9b^4$ $- 12a^3b^6 + 42a^2b^3 - 9b^4$	$-28a^5b^7 + 49a^4b^6$ $4a^3b^4 - 14a^2b^3 + 3b^2$ $+ 3b^2$
$3^{\text{e}} \text{ reste, } 0.$	$12a^3b^6 - 42a^2b^3 + 9b^4$

La racine du 1^{er} terme $4a^6b^8$ du polynome proposé P, détermine le 1^{er} terme $2a^3b^4$ de la racine cherchée. Retranchant $4a^6b^8$ de P, on obtient le 1^{er} reste. Le 1^{er} terme $-28a^5b^7$ de ce reste, divisé par $4a^3b^4$, donne le 2^e terme $-7a^2b^3$ de la racine. Ajoutant ce 2^e terme au double $4a^3b^4$ du 1^{er} terme de la racine et multipliant la somme par $-7a^2b^3$, le produit, soustrait du 1^{er} reste conduit au 2^e reste. La division du 1^{er} terme $+12a^3b^6$ de ce 2^e reste, par $4a^3b^4$, donne le 3^e terme $+3b^2$ de la racine. On ajoute ce 3^e terme au double $4a^3b^4 - 14a^2b^3$ de la somme des deux premiers termes de la racine, et on retranche du 2^e reste le produit de $4a^3b^4 - 14a^2b^3 + 3b^2$ par $3b^2$; ce qui donne zéro, pour 3^e reste. La racine demandée est donc $2a^3b^4 - 7a^2b^3 + 3b^2$.

1^{re} REMARQUE. Dans tout le cours des opérations relatives à l'extraction de la racine quarrée d'un polynome P, le quarré de la partie de la racine déjà obtenue, ajouté au reste correspondant, fournit une somme qui doit être égale au polynome donné P. Quand cette condition n'est pas remplie, on est certain qu'on a commis des fautes de calcul. Car il est facile de voir que d'après le procédé indiqué par la règle générale, on parvient à un reste quelconque, après avoir retranché du polynome donné toutes les parties qui composent le quarré de la somme des termes déjà obtenus à la racine.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on a trouvé le 2^e reste $12a^3b^6 - 42a^2b^5 + 9b^4$, après avoir ôté successivement du polynome donné, les parties $4a^6b^6$, $-28a^5b^7 + 49a^4b^8$, qui forment le carré des termes $2a^3b^4 - 7a^2b^3$ obtenus à la racine. Le carré de $2a^3b^4 - 7a^2b^3$ ajouté au 2^e reste, doit donc donner le polynome proposé; ce qui a effectivement lieu.

2^e REMARQUE. Quand le polynome P dont on demande la racine, est le carré d'un polynome C composé d'un nombre fini de termes, la règle précédente conduit nécessairement à un reste nul, et le dernier terme de P est le carré du dernier terme de la racine C (n^o 19).

Par conséquent, lorsqu'en ordonnant suivant les puissances décroissantes d'une lettre a, on est conduit à un terme ω de la racine tel que l'exposant de a dans ω^2 est moindre que dans le dernier terme de P, le polynome P n'est pas un carré; sa racine est *irrationnelle*, c'est-à-dire qu'elle ne peut être exprimée exactement par un nombre fini de monomes.

Par exemple, lorsqu'en extrayant la racine de $a^{10} + 2a^8$, on est parvenu au 2^e terme $+a^3$ de la racine, on est certain que le binome $a^{10} + 2a^8$ n'est pas un carré; car s'il en était un, l'exposant de a dans le dernier terme de la racine serait moindre que 3; le carré de ce dernier terme ne pourrait donc pas être égal au dernier terme $2a^8$ du polynome proposé; ce qui devrait avoir lieu si la racine était exacte (n^o 19).

L'extraction de la racine carrée de $a^{10} + 2a^8$ se prolonge indéfiniment, et on trouve

$$\sqrt{a^{10} + 2a^8} = a^5 + a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a^{-1} - \frac{5}{8}a^{-3} + \text{etc.}$$

Par une raison semblable, lorsqu'en ordonnant suivant les puissances croissantes de a, on parvient à un terme ω de la racine, tel que l'exposant de a dans ω^2 est plus grand que dans le dernier terme du polynome proposé, ce polynome n'est pas un carré.

Le binome $b^4 - 4ca$ est de cette espèce; on trouve

$$\sqrt{b^4 - 4ca} = b - 2cb^{-1}a - 2c^2b^{-3}a^2 - 4c^3b^{-5}a^3 - \text{etc.}$$

3^e REMARQUE. Les parties qui composent le carré d'un nombre

entier étant confondues dans ce quarré, la recherche des différens chiffres de la racine a exigé des tâtonnemens qui n'ont plus lieu pour les quantités littérales, parce que les parties qui composent les quarrés des quantités littérales, peuvent toujours être mises en évidence. La division a offert les mêmes circonstances.

Calcul des radicaux quarrés.

82. Lorsque les quantités placées sous des radicaux quarrés sont les mêmes, on dit que ces *radicaux* sont *semblables*, et quand ces deux conditions ne sont pas remplies, les *radicaux* sont *dissemblables*. Ainsi, les radicaux $3a\sqrt{2cd}$, $2b\sqrt{2cd}$ sont *semblables*, et les radicaux $\sqrt{ab}$, $\sqrt{2ab}$, $\sqrt{cd}$, sont *dissemblables*. Cela posé :

1°. *L'addition et la soustraction des radicaux semblables s'effectuent sur les coefficients de ces radicaux; car on peut regarder le radical, comme une certaine unité qui est répétée un nombre de fois marqué par le coefficient de chaque radical.*

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } 3\sqrt{2a} + 5\sqrt{2a} &= 8\sqrt{2a}, 8\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 5\sqrt{2a}, \\ 2a\sqrt{b} + 3b\sqrt{b} &= (2a + 3b)\sqrt{b}, \\ 5a\sqrt{b^2 - c} + 7a\sqrt{b^2 - c} &= 12a\sqrt{b^2 - c}. \end{aligned}$$

2°. *Quand des radicaux réduits à leur plus simple expression sont dissemblables, on ne peut qu'indiquer l'addition et la soustraction.*

Ainsi, pour ajouter $\sqrt{a}$ à $\sqrt{b}$ on écrit $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

3°. *Pour multiplier des radicaux quarrés, il suffit de former le produit des quantités qui sont sous les radicaux et de mettre ce produit sous un radical du même degré; car d'après le premier principe du n° 78, le quarré de $\sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{c}$ étant..... $(\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 (\sqrt{c})^2$, ou abc , il en résulte que $\sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{c}$ exprime la racine quarrée de abc ; de sorte que*

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} = \sqrt{abc}.$$

Ainsi, $\sqrt{7ab} \times \sqrt{2c} = \sqrt{14abc},$

$$\begin{aligned} 5a\sqrt{18abc} \times 3b\sqrt{2bc} &= 5a \times 3b\sqrt{18abc \times 2bc} \\ &= 15ab\sqrt{36ab^2c^2} = 15ab\sqrt{36b^2c^2} \times \sqrt{a} \\ &= 15ab \times 6bc\sqrt{a} = 90ab^2c\sqrt{a}. \end{aligned}$$

$$\sqrt{a+b} \times \sqrt{a-b} = \sqrt{(a+b) \times (a-b)} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

4°. La division de deux radicaux quarrés l'un par l'autre s'effectue en indiquant la division des quantités placées sous ces radicaux, et en mettant le quotient sous un radical du même degré; car d'après ce qui a été démontré (page 172), le

quarré de $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ étant $\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}$ ou $\frac{a}{b}$, il en résulte que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ex-

prime la racine quarrée de $\frac{a}{b}$. Par conséquent, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

$$\frac{\sqrt{14abc}}{\sqrt{7ab}} = \sqrt{\frac{14abc}{7ab}} = \sqrt{2c}.$$

$$\frac{\sqrt{7a^3b}}{a} = \frac{\sqrt{7a^3b}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{7a^3b}{a^2}} = \sqrt{7ab}.$$

5°. Toutes les puissances de degré pair d'un radical quarré réduit à sa plus simple expression sont rationnelles, et toutes les puissances de degré impair sont irrationnelles; car en élevant à la $n^{\text{ième}}$ puissance les deux membres de l'identité

$$(\sqrt{a})^2 = a, \text{ il vient } (\sqrt{a})^{2n} = a^n; \text{ et l'on a}$$

$$(\sqrt{a})^{2n+1} = (\sqrt{a})^{2n} \times \sqrt{a} = a^n \sqrt{a}.$$

Ainsi, $(\sqrt{3ab})^5 = (3ab)^2 \times \sqrt{3ab} = 9a^2b^2 \sqrt{3ab}.$

83. Le quarré d'une quantité positive étant le même que celui de cette quantité affectée du signe —, il en résulte que la racine quarrée d'une quantité a toujours deux valeurs égales et de signes contraires.

Ainsi, le carré de chacun des nombres $+3$, -3 , étant $+9$, la racine carrée de 9 a deux valeurs $+3$ et -3 .

De même, la racine carrée de a^2 a deux valeurs $+a$, $-a$; car le carré de chacune des quantités $+a$, $-a$, est a^2 .

Les procédés arithmétiques ne donnent qu'une seule valeur de la racine carrée d'un nombre; tandis qu'en ayant égard aux signes algébriques $+$ et $-$, on obtient deux valeurs de cette racine. On dit, par ce motif, que la racine carrée de a^2 n'a qu'une seule *valeur arithmétique* a , et qu'elle a deux *valeurs algébriques* $+a$, $-a$. Ce qu'on indique en posant $\sqrt{a^2} = \pm a$.

Ainsi, $\sqrt{9}$ a une seule *valeur arithmétique* 3 , et deux *valeurs algébriques* $+3$, -3 .

La valeur arithmétique d'une quantité se nomme aussi sa *valeur absolue*, parce qu'elle est indépendante des signes algébriques $+$ et $-$.

REMARQUE. La règle générale du n° 81 conduirait aux deux valeurs algébriques de la racine carrée d'un polynôme P ; car la racine carrée δ du 1^{er} terme du polynôme P , devant être affectée du double signe $+$ et $-$, le 1^{er} terme de la racine de ce polynôme a deux valeurs, $+\delta$ et $-\delta$; la première fournit la racine α qui a été obtenue par les méthodes précédentes, et la 2^e valeur du 1^{er} terme, conduirait à l'autre valeur $-\alpha$ de la racine du polynôme proposé.

Ainsi, pour obtenir la racine d'un polynôme, il suffit de calculer cette racine au moyen de la règle du n° 81, et d'affecter ensuite la racine obtenue du double signe $\pm$.

84. Le carré d'une quantité positive ou négative étant toujours positif, la racine carrée d'une quantité négative n'existe pas. On dit, par ce motif, que cette racine est IMAGINAIRE.

Ainsi, la racine carrée de -9 est *imaginaire*; on la désigne par $\sqrt{-9}$.

D'après son origine, le carré de $\sqrt{-9}$ est -9 , et le carré de $\sqrt{-a}$ est $-a$.

REMARQUE. Si l'on appliquait la règle du n° 82, (3°), on trouverait

$$\sqrt{-9} \times \sqrt{-9} = \sqrt{(-9) \times (-9)} = \sqrt{81} = \pm 9.$$

Pour interpréter ce résultat, il suffit d'observer que lorsqu'on ignore d'où provient $\sqrt{81}$, on doit admettre ses deux valeurs $+9, -9$. Mais, quand on sait que $\sqrt{81}$ résulte de la multiplication de $\sqrt{-9}$ par $\sqrt{-9}$, on ne peut plus admettre que la valeur -9 du carré de $\sqrt{-9}$.

Cette observation mérite toute l'attention des élèves.

Le symbole $\sqrt{-1}$ indiquant une expression dont le carré doit être -1 , il en résulte que,

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1; \text{ d'où } \frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}.$$

On en déduit, $(b\sqrt{-1})^2 = b^2(\sqrt{-1})^2 = b^2 \times (-1) = -b^2$,

$$\sqrt{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-a}, \sqrt{b} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-b},$$

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} = \sqrt{a} \sqrt{b} (\sqrt{-1})^2 = -\sqrt{ab},$$

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-\frac{a}{b}},$$

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-1}\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{-1} \sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{-\frac{a}{b}}.$$

La formule $(a + c)(a - c) = a^2 - c^2$, donne

$$(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1}) = a^2 - (b\sqrt{-1})^2 = a^2 + b^2.$$

Ainsi, le produit de deux facteurs imaginaires peut être réel, et l'on peut toujours décomposer la somme de deux carrés en deux facteurs imaginaires.

85. Les diverses puissances entières positives de $\sqrt{-1}$ se réduisent à ± 1 , ou à $\pm \sqrt{-1}$. En effet: si l'on désigne $\sqrt{-1}$ par α , et si n représente un nombre entier positif quelconque, on aura

$$\alpha = \sqrt{-1}, \alpha^2 = -1, \alpha^3 = \alpha^2 \times \alpha = -\alpha, \alpha^4 = \alpha^2 \times \alpha^2 = +1,$$

$$\alpha^{4n} = (\alpha^4)^n = (+1)^n = +1, \alpha^{4n+1} = \alpha^{4n} \times \alpha = +\alpha = +\sqrt{-1},$$

$$\alpha^{4n+2} = \alpha^{4n} \times \alpha^2 = (+1) \times (-1) = -1,$$

$$\alpha^{4n+3} = \alpha^{4n} \times \alpha^3 = (+1) \times (-\alpha) = -\alpha = -\sqrt{-1}.$$

Ces relations démontrent que pour trouver directement la $n^{\text{ème}}$ puissance de $\sqrt{-1}$, il suffit de diviser n par 4; selon que le reste est zéro, ou 1, ou 2, ou 3, la puissance demandée est $+1$, ou $+\sqrt{-1}$, ou -1 , ou $-\sqrt{-1}$.

Par exemple, le reste de la division de 35 par 4 étant 3, la 35^{ème} puissance de $\sqrt{-1}$ est $-\sqrt{-1}$.

86. On verra par la suite que l'emploi des imaginaires est de la plus grande utilité dans les diverses parties des Mathématiques.

Pour en donner une première idée, nous chercherons deux expressions différentes du produit P des quatre facteurs imaginaires

$$a+b\sqrt{-1}, a-b\sqrt{-1}, a+c\sqrt{-1}, a-c\sqrt{-1}.$$

Le produit des deux premiers facteurs est a^2+b^2 , et celui des deux autres est a^2+c^2 . Donc

$$P=(a^2+b^2)\times(a^2+c^2).$$

Or, le produit du 1^{er} facteur par le 3^e est

$$(aa-bc)+(ac+ba)\sqrt{-1},$$

et le produit du 2^e par le 4^e est

$$(aa-bc)-(ac+ba)\sqrt{-1}.$$

Multipliant ces deux derniers produits l'un par l'autre, et observant que $(p+q\sqrt{-1})\times(p-q\sqrt{-1})=p^2+q^2$, on trouve

$$P=(aa-bc)^2+(ac+ba)^2.$$

Ces deux valeurs de P devant être les mêmes, il faut que

$$(1) \dots (a^2+b^2)\times(a^2+c^2)=(aa-bc)^2+(ac+ba)^2.$$

En effet, si l'on effectue les multiplications indiquées, on verra que chacun des deux membres de l'identité (1) se réduit à $a^4a^2+b^2c^2+a^2c^2+b^2a^2$.

L'identité (1) démontre cette propriété remarquable, que la somme des carrés de deux nombres entiers, multipliée par la

somme des quarrés de deux autres nombres entiers, est toujours égale à la somme des quarrés de deux nombres entiers; car en supposant que, a, b, c et e sont des nombres entiers quelconques, $ac - bc$ et $ac + bc$ deviennent deux nombres entiers p, q , et on a $(a^2 + b^2) \times (c^2 + e^2) = p^2 + q^2$.

EXEMPLE. Soient, $a=3, b=2, c=7, e=5$.

Les relations $p=ac-bc, q=ac+bc$, donnent $p=11, q=29$.

Et en effet, on a $(3^2 + 2^2) \times (7^2 + 5^2) = 11^2 + 29^2$.

Il est essentiel de remarquer la différence qui existe entre les *quantités incommensurables* et les *expressions imaginaires*; les unes et les autres ne peuvent être exprimées exactement en nombres, mais les premières existent, et il est toujours possible d'en approcher autant qu'on veut, tandis qu'aucune quantité ne peut approcher des *imaginaires*.

§ II. Des équations et des problèmes du second degré.

Équations du second degré.

87. Ce qui précède fournit le moyen de résoudre toutes les *équations du second degré à une seule inconnue, qui ne renferment que le quarré de l'inconnue*; car on peut toujours ramener ces équations à la forme $x^2 = a$; et, d'après le principe du n° 83, si c désigne la valeur arithmétique de $\sqrt{a}$, les deux valeurs de x qui satisfont à l'équation proposée sont $+c$ et $-c$.

De sorte que l'équation $x^2 = a$ donne

$$x = \pm \sqrt{a} = \pm c.$$

Par exemple, $x^2 = 49$ donne $x = \pm 7$,

$$x^2 = \frac{4}{9} \quad \text{donne} \quad x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3},$$

$$x^2 = 0,49 \quad \text{donne} \quad x = \sqrt{0,49} = \pm 0,7.$$

L'équation $x^2 = 10$ donne $x = \pm \sqrt{10}$.

Ces deux valeurs de x étant *incommensurables*, aucun nombre entier ou fractionnaire ne satisfait à l'équation proposée; mais on peut toujours déterminer un nombre qui diffère d'aussi peu qu'on veut de x .

Si l'on extrait la racine quarrée de 10, on trouvera que les valeurs approchées de x sont

$$\pm 3,16227766016837933199889354443271, \text{ etc.}$$

L'équation $x^2 = 4a^2b^6$ donne $x = \sqrt{4a^2b^6} = \pm 2ab^3$.

L'équation $x^2 = 4ab^3$ donne $x = \sqrt{4ab^3} = \pm 2b \sqrt{ab}$.

L'équation

$$x^2 = 4a^6b^2 - 28a^5b^2 + 49a^4b^2 + 12a^3b^6 - 42a^2b^5 + 9b^4,$$

donne $x = \pm (2a^3b^2 - 7a^2b^3 + 3b^4)$, (page 176).

L'équation $x^2 = -49$ donne $x = \pm \sqrt{-49}$.

Ces deux valeurs de x sont *imaginaires*; c'est-à-dire qu'il n'existe aucune quantité qui, multipliée par elle-même, donne -49 .

En général, quand a désigne une quantité positive, aucune valeur réelle de x ne satisfait à l'équation $x^2 = -a$; car il s'agit de trouver pour x une quantité qui, multipliée par elle-même, donne un produit négatif, et toute quantité positive ou négative, multipliée par elle-même, conduit à un résultat positif.

La racine quarrée de x^2 étant $\pm x$, l'extraction de la racine quarrée des deux membres de l'équation $x^2 = 49$ donnerait $\pm x = \pm 7$; mais il n'en résulterait pas des nouvelles valeurs de x , car

$$+x = \pm 7 \text{ donne } x = +7, x = -7,$$

$$\text{et } -x = \pm 7 \text{ donne } x = -7, x = +7.$$

Par conséquent, lorsqu'on extrait la racine quarrée des deux membres d'une équation, il suffit de mettre le double signe $\pm$ devant la racine de l'un des membres.

On peut aussi se rendre compte de ces propriétés, en obser-

vant que l'équation $x^2 = 49$ revient à $x^2 - 7^2 = 0$, ou à $(x-7) \times (x+7) = 0$, car $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$.

Or, pour que le produit $(x-7)(x+7)$ soit nul, il suffit et il faut qu'un de ses facteurs $x-7$, $x+7$ soit zéro; ce qui donne $x=7$ et $x=-7$.

Chacune de ces valeurs de x satisfait à l'équation proposée $x^2 = 49$, et aucune autre valeur de x ne peut y satisfaire.

Les valeurs de x , qui satisfont à l'équation $x^2 = a$, étant fournies par l'extraction de la racine quarrée de a , se nomment les racines de cette équation.

Par analogie, toute valeur de l'inconnue qui rend les deux membres d'une équation identiquement égaux, est une racine de cette équation.

Ainsi, l'hypothèse $x=2$ réduisant chaque membre de l'équation $x^3 - x = x^2 + 2$, à $+6$, le nombre 2 est une racine de cette équation.

88. Toute équation complète du second degré à une seule inconnue x peut se ramener à la forme $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c désignant des quantités entières connues.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation numérique

$$2x - \frac{1}{4} + \frac{6}{x} = 5 - \frac{3x}{7}.$$

On fera d'abord disparaître les dénominateurs (n° 37, 5^e), ce qui donnera

$$2x \times 4 \times 7 \times x - 1 \times x \times 7 + 6 \times 4 \times 7 = 5 \times 4 \times 7 \times x - 3x \times 4 \times x,$$

ou, en effectuant les multiplications indiquées,

$$56x^2 - 7x + 168 = 140x - 12x^2.$$

Si l'on fait passer tous les termes dans le 1^{er} membre, et si l'on réunit les termes semblables, on trouvera

$$68x^2 - 147x + 168 = 0.$$

Comparant cette dernière équation à l'équation générale $ax^2 + bx + c = 0$, on a

$$a = 68, \quad b = -147, \quad c = 168.$$

2^e EXEMPLE. Soit l'équation *littérale*

$$\frac{3d}{x-e} + 2fx = \frac{gx}{h} - \frac{m}{n},$$

dans laquelle d, e, f, g, h, m, n désignent des quantités connues; on chassera les dénominateurs (n° 37, 5°), ce qui donnera

$$3dnh + 2fxnh(x-e) = gx(x-e)n - mh(x-e).$$

Effectuant les multiplications indiquées, passant tous les termes dans le 1^{er} membre, et réunissant les termes semblables, on trouvera

$$(2fh - g)n x^2 + (egn + mh - 2efhn)x + (3dn - em)h = 0.$$

Pour ramener cette dernière à la forme indiquée, il suffit de faire

$$(2fh - g)n = a, \quad egn + mh - 2efhn = b, \quad (3dn - em)h = c.$$

Pour résoudre l'équation générale du second degré à une seule inconnue $ax^2 + bx + c = 0$,

on divise d'abord tous ses termes par a , et afin de simplifier, on pose $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$; elle devient

$$(1) \dots x^2 + px + q = 0.$$

Nous allons faire dépendre la résolution de cette équation de celle d'une équation du premier degré. Cela serait facile si le premier membre étant un carré, le second membre était un nombre connu, car il suffirait d'extraire la racine carrée de chaque membre.

Par exemple, dans l'équation $(2) \dots x^2 + 2ax + a^2 = c$, le 1^{er} membre étant le carré de $x + a$, l'extraction de la racine carrée de chaque membre conduit à l'équation du premier degré

$$x + a = \pm \sqrt{c}; \text{ d'où } x = -a \pm \sqrt{c};$$

ce qui détermine les deux valeurs de x qui satisfont à l'équation (2).

La question se réduit donc à ramener l'équation (1) à la

forme (2). A cet effet, on fait d'abord passer q dans le second membre; ce qui donne

$$x^2 + px = -q;$$

et il ne s'agit plus que de trouver la quantité qu'on doit ajouter au premier membre, pour qu'il devienne le carré d'un binôme.

Or, on peut regarder $x^2 + px$ comme les deux premiers termes du carré d'un binôme dont le 1^{er} terme est x , et dont le double de ce 1^{er} terme multiplié par le 2^e est px ; le 2^e terme du binôme est donc égal à $\frac{px}{2x}$, ou à $\frac{1}{2}p$. Par conséquent, la quantité qu'il faut ajouter au 1^{er} membre $x^2 + px$, pour en faire un carré, est le carré de $\frac{1}{2}p$ ou $\frac{1}{4}p^2$; et afin de conserver l'égalité, on ajoutera aussi $\frac{1}{4}p^2$ au 2^e membre; ce qui donnera

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = -q + \frac{1}{4}p^2.$$

Le 1^{er} membre étant le carré de $x + \frac{1}{2}p$, on en extrait la racine carrée, et l'on indique la racine carrée du 2^e membre; ce qui donne

$$x + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2}; \quad \text{d'où}$$

$$(3) \dots x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2}.$$

La formule (3) détermine deux valeurs de x qui satisfont à l'équation (1); car il est facile de s'assurer que chacune d'elles, substituée dans (1), rend cette équation identique; ces deux valeurs de x sont les racines de l'équation (1).

Toute équation du second degré à une seule inconnue a donc deux racines.

Lorsque $-q + \frac{1}{4}p^2$ est un nombre positif, les deux racines sont réelles et inégales.

Quand $-q + \frac{1}{4}p^2$ est zéro, les deux racines se réduisent à $-\frac{1}{2}p$. Le 1^{er} membre $x^2 + px + q$ devient

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2, \text{ ou } \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2, \text{ ou } \left(x + \frac{1}{2}p\right)\left(x + \frac{1}{2}p\right);$$

ce premier membre étant le produit de deux facteurs égaux, on dit par ce motif que les deux racines sont *égales*.

Enfin, lorsque $-q + \frac{1}{4}p^2$ est négatif, les deux racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$ sont *imaginaires*.

Dans ce dernier cas, q étant nécessairement positif et plus grand que $\frac{1}{4}p^2$, on a

$$q = \frac{1}{4}p^2 + \delta \text{ } (\delta \text{ est positif et plus grand que zéro});$$

l'équation $x^2 + px + q = 0$ revient à

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 + \delta = 0, \text{ ou à } \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 + \delta = 0;$$

et δ étant positif, on voit qu'aucune valeur réelle de x ne peut réduire le 1^{er} membre à zéro.

Les valeurs imaginaires de x sont des *symboles* algébriques qui jouissent de la propriété de réduire $x^2 + px + q$ à zéro.

Quand le dernier terme de l'équation $x^2 + px + q = 0$ est négatif, $-q + \frac{1}{4}p^2$ est nécessairement positif; les deux racines sont donc réelles.

Par conséquent : *Dans toute équation du second degré... $x^2 + px - q = 0$, dont le dernier terme est négatif, les deux racines sont réelles.*

Pour obtenir les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, il suffit de faire $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$ dans la formule (3), (p. 187);

on en déduit

$$\sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$(4) \dots x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Selon que $b^2 - 4ac$ est positif ou nul, ou négatif, les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ sont réelles et inégales, ou égales (et par conséquent réelles), ou imaginaires; et la réciproque est vraie.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$

en la comparant à $x^2 + px + q = 0$,

on voit que $p = -6$, $q = 8$;

d'où $\frac{1}{2}p = -3$, $\left(\frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 = 9$, $-q + \frac{1}{4}p^2 = 1$.

Substituant ces valeurs, la formule (3), (page 187), donne $x = 3 \pm 1$; donc $x = 3 + 1 = 4$ et $x = 3 - 1 = 2$.

Il est facile de s'assurer que chacune de ces valeurs de x réduit $x^2 - 6x + 8$ à zéro.

Si l'on veut résoudre directement l'équation proposée, on fera d'abord passer 8 dans le 2^e membre, ce qui donnera

$$x^2 - 6x = -8.$$

On observera qu'on peut regarder $x^2 - 6x$ comme les deux premiers termes du carré d'un binôme dont le 1^{er} terme est x , et dont le double $2x$ de ce 1^{er} terme multiplié par le 2^e terme du binôme est $-6x$; ce 2^e terme du binôme est donc égal à $-\frac{6x}{2x}$ ou à -3 . Ajoutant à chaque membre le carré de -3 , qui est 9, il vient

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9 = 1;$$

et $x^2 - 6x + 9$ étant le carré de $x - 3$, l'extraction de la racine carrée de chaque membre fournit l'équation du 1^{er} degré

$$x - 3 = \pm 1; \text{ d'où } x = 4 \text{ et } x = 2.$$

2^e EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^2 - 2x - 8 = 0,$$

on a $p = -2$, $q = -8$,

et la formule (3), (page 187), donne

$$x = 1 \pm \sqrt{8+1} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3; \text{ d'où } x=4, x=-2.$$

3^e EXEMPLE. Soit l'équation

$$3x^2 + 14x + 8 = 0;$$

pour la comparer à $x^2 + px + q = 0$,

on réduira le coefficient du 1^{er} terme à l'unité en divisant tous les termes par 3, ce qui donnera

$$x^2 + \frac{14}{3}x + \frac{8}{3} = 0.$$

On voit alors que $p = \frac{14}{3}$, $q = \frac{8}{3}$.

La substitution de ces valeurs de p et q dans (3), donne

$$x = -\frac{7}{3} \pm \sqrt{-\frac{8}{3} + \frac{49}{9}}.$$

Or,
$$-\frac{8}{3} + \frac{49}{9} = \frac{49}{9} - \frac{24}{9} = \frac{25}{9}.$$

La racine quarrée arithmétique de $\frac{25}{9}$ étant $\frac{5}{3}$, on a

$$x = -\frac{7}{3} \pm \frac{5}{3};$$

d'où $x = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$ et $x = -\frac{7}{3} - \frac{5}{3} = -4.$

On parvient plus simplement à ces valeurs de x , en comparant

$$3x^2 + 14x + 8 = 0 \text{ à } ax^2 + bx + c = 0;$$

car il en résulte

$$a = 3, \quad b = 14, \quad c = 8, \quad b^2 - 4ac = 100,$$

et la formule (4), (page 189), donne

$$x = \frac{1}{6}(-14 \pm 10); \text{ d'où } x = -\frac{2}{3} \text{ et } x = -4.$$

4^e EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^2 - 14x + 39 = 0; \text{ on a } p = -14, \quad q = 39;$$

et la formule (3), (page 187), conduit à

$$x = 7 \pm \sqrt{10}.$$

Il est facile de s'assurer que chacune des expressions... $7 + \sqrt{10}$, $7 - \sqrt{10}$, de x , réduit $x^2 - 14x + 39$ identiquement à zéro.

Par exemple, si l'on remplace x par $7 + \sqrt{10}$, on trouvera

$$\begin{aligned} x^2 &= 49 + 2 \times 7 \sqrt{10} + 10 = 59 + 14 \sqrt{10}, \\ -14x &= -14(7 + \sqrt{10}) = -98 - 14 \sqrt{10}, \\ x^2 - 14x + 39 &= 59 - 98 + 39 = -39 + 39 = 0. \end{aligned}$$

Pour exprimer en nombres les deux valeurs incommensurables de x , on calcule la racine quarrée arithmétique de 10, et l'on trouve

$$\sqrt{10} = 3,16227\ 76601\ 68379\ 33199\ 88935 \text{ etc.};$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad x &= 10,16227\ 76601\ 68379 \text{ etc.}, \\ x &= 3,83772\ 23398\ 31620 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ces valeurs approchées de x ne réduisent pas exactement $x^2 - 14x + 39$ à zéro, mais on peut toujours prendre assez de décimales pour que l'erreur devienne aussi petite qu'on voudra.

5^e EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^2 - 6x + 14 = 0;$$

$$\text{on a} \quad p = -6, \quad q = 14;$$

et la formule (3), (page 187), conduit à

$$x = 3 \pm \sqrt{-5}.$$

Chacune de ces valeurs *imaginaires* de x réduit $x^2 - 6x + 14$ à zéro.

Par exemple, si l'on remplace x par $3 + \sqrt{-5}$, on trouvera

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 + 6\sqrt{-5} - 5 = 4 + 6\sqrt{-5} \\ -6x &= -6(3 + \sqrt{-5}) = -18 - 6\sqrt{-5}; \end{aligned}$$

d'où

$$x^2 - 6x + 14 = 4 - 18 + 6\sqrt{-5} - 6\sqrt{-5} + 14 = -14 + 14 = 0.$$

Il est facile d'apercevoir que l'équation proposée ne saurait admettre aucune valeur réelle de x ; car son premier membre revient à $x^2 - 6x + 9 + 5$, ou à $(x - 3)^2 + 5$; et pour des valeurs réelles quelconques de x , le carré du nombre $x - 3$ étant positif, $(x - 3)^2 + 5$ ne peut se réduire à zéro.

6^e EXEMPLE. Soit l'équation littérale

$$x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0;$$

on a $p = -2(a + b)$, $q = 4ab$, $\frac{1}{2}p = -(a + b)$,

$$\left(\frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 = (a + b)^2,$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} = \sqrt{(a + b)^2 - 4ab} = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b.$$

La formule (3), (page 187), donne

$$x = a + b \pm (a - b); \text{ d'où } x = 2a \text{ et } x = 2b.$$

89. L'équation $x^2 + px = -q$, ayant conduit à

$$(3) \dots x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2},$$

on voit que dans toute équation du deuxième degré, ramenée à la forme $x^2 + px = -q$, l'inconnue x est égale à la moitié du coefficient du second terme pris avec un signe contraire, plus ou moins la racine carrée du deuxième membre augmenté du carré de la moitié du coefficient de x .

Appliquons cette règle à des exemples.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0;$$

on la ramène d'abord à la forme demandée; elle devient

$$x^2 - 6x = -8,$$

et la règle énoncée donne

$$x = 3 \pm \sqrt{-8 + 3^2} = 3 \pm \sqrt{-8 + 9} = 3 \pm \sqrt{1} = 3 \pm 1.$$

D'où $x = 3 + 1 = 4$ et $x = 3 - 1 = 2$.

2^e EXEMPLE. Soit l'équation

$$\frac{11}{7}x = 5x^2 - \frac{6}{7};$$

elle revient à $x^2 - \frac{11}{35}x = \frac{6}{35}$.

En appliquant la règle générale, on a

$$x = \frac{11}{70} \pm \sqrt{\frac{6}{35} + \left(\frac{11}{70}\right)^2}.$$

Pour évaluer le radical, on observe que

$$\frac{6}{35} + \left(\frac{11}{70}\right)^2 = \frac{6 \times 2 \times 70}{35 \times 2 \times 70} + \left(\frac{11}{70}\right)^2 = \frac{840 + 11^2}{70^2} = \frac{961}{70^2}.$$

On cherche la racine carrée de 961, qui est 31; de sorte que

$$x = \frac{11}{70} \pm \frac{31}{70}; \text{ d'où } x = \frac{42}{70} = \frac{3}{5}, \quad x = -\frac{20}{70} = -\frac{2}{7}.$$

Chacune de ces valeurs de x satisfait à l'équation proposée.

On peut mettre les valeurs (3), (page 187), de x sous une forme plus propre aux applications numériques. On observe, à cet effet, que

$$\sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2} = \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, deviennent

$$x = \frac{1}{2} (-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}).$$

Par conséquent, dans toute équation du second degré ramenée à la forme $x^2 + px + q = 0$, l'inconnue est égale au coefficient de x pris avec un signe contraire, plus ou moins la racine quarrée du quarré de ce coefficient diminué du quadruple du dernier terme, le tout divisé par 2.

D'après cette règle, les racines de $x^2 - 5x + 6 = 0$, sont

$$x = \frac{1}{2} (5 \pm \sqrt{25 - 24}) = \frac{1}{2} (5 \pm 1); \text{ d'où } x = 2, x = 3$$

90. Pour concevoir comment deux valeurs différentes de x peuvent satisfaire à l'équation

$$(1) \dots x^2 + px + q = 0,$$

on observe que cette équation revient à

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 - \left(\frac{1}{4}p^2 - q\right) = 0,$$

$$\text{ou à} \quad \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right)^2 = 0;$$

et la différence $a^2 - c^2$ de deux quarrés, étant égale au produit de $a + c$ par $a - c$, la dernière équation peut se mettre sous la forme

$$(4) \dots \left(x + \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right) \times \left(x + \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right) = 0.$$

Or, pour qu'un produit soit nul, il suffit et il faut que l'un de ses facteurs soit zéro; on satisfera donc également à l'équation proposée en faisant

$$x + \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} = 0, \text{ ou } x + \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} = 0;$$

et les deux valeurs (3), (page 187), de x tirées de ces équations du premier degré, seront les seules qui satisferont à l'équation (1).

Par conséquent : *Toute équation du second degré en x a deux racines, et aucune autre valeur de x ne saurait satisfaire à cette équation.*

On peut employer ces dernières transformations pour résoudre l'équation (1)... $x^2 + px + q = 0$.

Il en résulte que si l'on désigne par x' et x'' les racines de l'équation (1)... $x^2 + px + q = 0$, on aura

$$x' = -\frac{1}{2}p + \sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2}, \quad x'' = -\frac{1}{2}p - \sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2};$$

et d'après la relation (4), le premier membre $x^2 + px + q$ sera le produit de $x - x''$ par $x - x'$.

91. On en déduit que *le premier membre de l'équation (1) ... $x^2 + px + q = 0$ est exactement divisible par l'inconnue moins chaque racine, et que pour former l'équation dont les racines sont des nombres donnés x' , x'' , il suffit d'égaliser à zéro le produit $x^2 - (x' + x'')x + x'x''$ des facteurs binomes $x - x'$, $x - x''$.*

92. Les racines d'une équation du second degré étant x' et x'' , nous venons de voir que cette équation revient à

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0. \text{ Par conséquent :}$$

Dans toute équation du second degré ramenée à la forme $x^2 + px + q = 0$, le coefficient de la première puissance de x pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines de cette équation, et le dernier terme est égal au produit de ces racines.

On peut encore s'en assurer d'une autre manière; car les racines x' , x'' de l'équation $x^2 + px + q = 0$, étant

$$(1) \dots x' = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}, \quad x'' = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q},$$

on trouve

$$x' + x'' = -p,$$

$$\begin{aligned} x' \times x'' &= \left(-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right) \left(-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}p\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 - \left(\frac{1}{4}p^2 - q\right) = q. \end{aligned}$$

Lorsque $p = 0$, la somme des racines x' , x'' , est égale à zéro; ces racines sont donc égales et de signes contraires; et en effet, les valeurs de x' et x'' deviennent $x' = \sqrt{-q}$, $x'' = -\sqrt{-q}$.

L'équation $x^2 + px + q = 0$, conduit au même résultat, car elle devient $x^2 + q = 0$, d'où $x = \pm \sqrt{-q}$.

Quand le produit q des deux racines x' , x'' , est égal à zéro, l'une d'elles est nécessairement nulle; et en effet, les formules (1) donnent $x' = 0$, $x'' = -p$.

On parvient plus directement au même résultat, en observant que q étant nul, l'équation $x^2 + px + q = 0$,

devient $x^2 + px = 0$, ou $x(x+p) = 0$,

et le produit $x(x+p)$ ne pouvant être nul que lorsqu'un de ses facteurs est zéro, on a $x = 0$ et $x = -p$.

93. Les relations $x' + x'' = -p$, $x' \times x'' = +q$, fournissent le moyen de déterminer les signes des racines réelles de toute équation du second degré, sans qu'il soit nécessaire de la résoudre.

Par exemple, soit l'équation $x^2 - 6x + 8 = 0$; le produit des deux racines de cette équation étant $+8$, ces racines sont nécessairement de mêmes signes; mais leur somme est $+6$; elles sont donc positives; et en effet, ces racines sont $+4$ et $+2$.

Dans l'équation $x^2 - 2x - 8 = 0$, le produit des deux racines est -8 ; elles sont donc de signes contraires; or leur somme est $+2$, la racine positive est donc la plus grande; et en effet, ces racines sont $+4$ et -2 .

94. On peut aussi résoudre l'équation $x^2 + px + q = 0$, en la ramenant à la forme $x^2 = a$. Ce qui se réduit à faire disparaître la première puissance de l'inconnue. A cet effet, on égale x à la somme de deux inconnues y , z ; une de ces inconnues reste entièrement arbitraire, z par exemple; on substitue la valeur $y + z$ de x dans $x^2 + px + q = 0$; ce qui conduit à

$$(1) \dots y^2 + (2z + p)y + (z^2 + pz + q) = 0,$$

et l'on dispose de l'indéterminée z de manière que la première

puissance de l'inconnue y n'entre plus dans l'équation (1); ce qui revient à supposer

$$2z + p = 0; \text{ d'où } z = -\frac{1}{2}p.$$

Substituant cette valeur de z dans (1), on trouve

$$y^2 = -q + \frac{1}{4}p^2; \text{ d'où } y = \pm \sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2}.$$

Or, $x = z + y = -\frac{1}{2}p + y$. Donc $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2}$.

REMARQUE. On voit que pour faire disparaître la première puissance de l'inconnue dans l'équation $x^2 + px + q = 0$, il suffit d'y supposer $x = y - \frac{1}{2}p$; l'équation résultante est de la forme demandée $y^2 = c$.

95. Pour résoudre directement l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, sans diviser par le coefficient, a , de x^2 , on fait passer c dans le second membre, ce qui donne

$$ax^2 + bx = -c.$$

On regarde $ax^2 + bx$, comme les deux premiers termes du carré d'un binôme, dont le carré du 1^{er} terme est ax^2 , et dont bx est le double de ce 1^{er} terme multiplié par le 2^e; le 1^{er} terme du binôme est donc $\sqrt{ax^2}$ ou $x\sqrt{a}$, et le 2^e terme est $\frac{bx}{2x\sqrt{a}}$ ou $\frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Ajoutant à chaque membre le carré $\frac{b^2}{4a}$ de $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, il vient

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Le 1^{er} membre étant un carré, on en extrait la racine, et on indique la racine du 2^e membre; ce qui donne

$$x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}; \text{ d'où } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Désignant ces deux valeurs de x , par x' et x'' , on a

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

96. Nous avons supposé que l'équation (1)... $ax^2 + bx + c = 0$ était du second degré, de sorte que a n'était pas nul. Or, en faisant $a = 0$, l'équation (1) donne $x = -\frac{c}{b}$; la généralité des formules algébriques exige donc que l'hypothèse $a = 0$ réduise x' ou x'' à $-\frac{c}{b}$. Mais, x'' devient infini et x' se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; la valeur de x' doit donc se réduire à $-\frac{c}{b}$.

On peut le vérifier; car en substituant pour $\sqrt{b^2 - 4ac}$, sa valeur $b - 2cb^{-1}a - 2c^2b^{-3}a^2 - \text{etc.}$ (page 177), il vient

$$x' = \frac{-2cb^{-1}a - 2c^2b^{-3}a^2 - \text{etc.}}{2a}.$$

Supprimant le facteur a , commun aux deux termes de cette fraction, et supposant ensuite $a = 0$, on trouve $x' = -\frac{c}{b}$.

On parvient plus simplement au même résultat en multipliant d'abord, par $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$, les deux termes de la fraction qui exprime x' ; car le produit de $\sqrt{b^2 - 4ac} + b$, par $\sqrt{b^2 - 4ac} - b$, étant $(\sqrt{b^2 - 4ac})^2 - b^2$, ou $-4ac$, on trouve

$$x' = \frac{-4ac}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}};$$

et l'hypothèse $a = 0$, donne $x' = -\frac{c}{b}$.

Quand a et b sont nuls, la valeur $-\frac{c}{b}$ de x' est infinie, les deux racines de l'équation (1) deviennent infinies.

97. En général : *Pour exprimer qu'une des racines de l'é-*

quation $ax^2 + bx + c = 0$ est infinie, on égale le coefficient de x^2 à zéro; et pour indiquer que les deux racines sont infinies, on pose $a = 0$, $b = 0$.

Pour mettre ces propriétés en évidence, on fera

$$x = \frac{1}{y}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{1}{x}.$$

L'équation (1) ... $ax^2 + bx + c = 0$, deviendra

$$\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c = 0, \quad \text{d'où} \quad cy^2 + by + a = 0.$$

Lorsque $a = 0$, on a $cy^2 + by = 0$, ou $(cy + b)y = 0$;

ce qui donne $y = 0$ et $y = -\frac{b}{c}$.

Or $x = \frac{1}{y}$; donc $x = \infty$ et $x = -\frac{c}{b}$.

Quand a et b sont nuls, la seconde valeur $-\frac{c}{b}$ de x devient infinie.

REMARQUE. Lorsqu'on fait $a = 0$, dans l'expression générale de la racine x' de l'équation (1), la valeur $-\frac{c}{b}$ de x' , se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; cela résulte de ce que le facteur a , qui devient zéro, entre dans les deux termes de la fraction qui exprime x' . Il n'en était pas de même dans le problème des courriers (page 92, 3°), la valeur de x ne devenant $\frac{0}{0}$ qu'en vertu des deux hypothèses réunies $d = 0$, $v' = v''$, cette valeur est entièrement indéterminée.

On donnera par la suite, la théorie des fractions qui se réduisent à $\frac{0}{0}$.

Pour appliquer cette théorie générale à un exemple, nous proposerons de diviser un nombre a , en deux parties telles, que le rapport de leurs carrés soit égal à δ .

Si x désigne la 1^{re} partie, la 2^e sera $a - x$, et on aura

$$(1) \dots \frac{x^2}{(a-x)^2} = d; \text{ d'où } (d-1)x^2 - 2ax + da^2 = 0.$$

On déduira de cette équation

$$x = \frac{a(d \pm \sqrt{d})}{d-1}; \text{ d'où } a-x = \frac{-a(1 \pm \sqrt{d})}{d-1}.$$

Les signes supérieurs se correspondent ainsi que les signes inférieurs; de sorte que *le problème admet deux solutions.*

REMARQUE. Quand $d=1$, une des valeurs de x est infinie, et l'autre, qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, se réduit à $\frac{1}{2}a$.

Pour interpréter ces résultats, on observe que dans l'hypothèse actuelle, l'équation (1) donne

$$\frac{(a-x)^2}{x^2} = 1; \text{ d'où } \frac{a^2 - 2ax + x^2}{x^2} = 1,$$

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{2a}{x} = 0, (2) \dots \frac{a}{x} \times \left(\frac{a}{x} - 2 \right) = 0.$$

On satisfait à l'équation (2) en posant

$$\frac{a}{x} - 2 = 0; \text{ d'où } x = \frac{1}{2}a \text{ et } a-x = \frac{1}{2}a.$$

Aucune autre valeur finie de x ne saurait convenir à l'équation (2).

Cependant, comme le facteur $\frac{a}{x}$ diminue à mesure que x augmente, on peut toujours prendre x assez grand pour que le 1^{er} membre de l'équation (2) diffère d'aussi peu qu'on veut de zéro; enfin, quand x est infiniment grand, $\frac{a}{x}$ devient nul, et l'équation (2) est satisfaite.

98. Ce qui précède donne le moyen de résoudre les équations qui peuvent se ramener à la forme

$$(1) \dots x^4 - 2px^2 - q = 0;$$

car en faisant $x^2 = z$, l'équation (1) devient $z^2 - 2pz - q = 0$.

Cette dernière détermine deux valeurs a, b , de z . Or, $x = \pm \sqrt{z}$; les valeurs de x sont donc $\pm \sqrt{a}$ et $\pm \sqrt{b}$.

L'équation (1) a donc quatre racines.

On trouve ainsi que les racines de l'équation

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0, \text{ sont } +2, -2, +3 \text{ et } -3.$$

99. On peut facilement résoudre deux équations à deux inconnues, quand une de ces équations étant du premier degré, l'autre est du deuxième degré. En effet; ces équations sont de la forme

$$(2) \dots ax + cy + \gamma = 0, \quad (3) \dots ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

L'équation (2) donne (4) $\dots y = -\frac{ax + \gamma}{c}$.

La substitution de cette valeur de y , dans (3), conduit à une équation du second degré en x , qui fournit deux valeurs de x ; et l'équation (4) détermine les valeurs correspondantes de y .

EXEMPLE. Soient, $x - y + 1 = 0, x^2 + y^2 + y - x - 14 = 0$.

La 1^{re} équation donne $y = 1 + x$; substituant cette valeur de y dans la 2^e équation, on trouve

$$x^2 + x = 6; \text{ d'où } x = 2 \text{ et } x = -3;$$

les valeurs correspondantes de y , déduites de $y = 1 + x$, sont $y = 3$ et $y = -2$.

Problèmes du second degré à une inconnue.

100. 1^{er} PROBLÈME. Deux ouvriers, employés à des prix différents, furent payés après un certain temps. Le 1^{er} reçut 96 francs; le 2^e, qui avait travaillé six jours de moins que le 1^{er}, reçut 54 francs. Si le 2^e eût travaillé six jours de plus, et le 1^{er} six jours de moins, ils eussent reçu chacun la même somme. On demande pendant combien de jours chaque ouvrier a travaillé, et le prix de la journée de chacun.

D'après cet énoncé, si le 1^{er} ouvrier a travaillé pendant x jours, le 2^e n'aura travaillé que pendant $x - 6$ jours.

Le 1^{er} ouvrier a reçu 96^f pour x jours; il gagnait donc $\frac{96^f}{x}$ par jour.

Le 2^e a reçu 54^f pour $x - 6$ journées; il gagnait donc $\frac{54^f}{x-6}$ par jour.

Si le 2^e ouvrier eût travaillé six jours de plus, c'est-à-dire x jours, il eût reçu x fois $\frac{54^f}{x-6}$, ou $\frac{54x}{x-6}$ francs; et si le 1^{er} ouvrier, qui gagne $\frac{96^f}{x}$ par jour, eût travaillé six jours de moins, c'est-à-dire $x - 6$ jours, il eût reçu $(x - 6)$ fois $\frac{96^f}{x}$, ou $\frac{96(x-6)}{x}$ francs.

Mais, dans cette dernière hypothèse, chaque ouvrier eût reçu la même somme; on a donc

$$(1) \dots \frac{54x}{x-6} = \frac{96(x-6)}{x}.$$

Cette équation se réduit à

$$x^2 - \frac{192}{7}x = -\frac{576}{7}; \text{ d'où } x = 24 \text{ et } x = \frac{24}{7}.$$

Or, x et $x - 6$, exprimant des nombres de journées, doivent être positifs; la valeur $x = 24$ satisfait donc seule à la question proposée.

Ainsi : le 1^{er} ouvrier a reçu 96^f pour 24 journées; il gagnait donc 4^f par jour. Le 2^e ouvrier a reçu 54^f pour 24 - 6 ou 18 journées; il gagnait donc 3^f par jour. Si le 2^e ouvrier eût travaillé six jours de plus, c'est-à-dire 24 jours, il eût reçu 24 fois 3^f ou 72^f; et si le 1^{er} ouvrier eût travaillé six jours de moins, c'est-à-dire 18 jours, il eût reçu 18 fois 4^f ou 72^f, comme l'exige l'énoncé.

REMARQUE. La forme particulière de l'équation (1), conduit à une solution plus directe; car cette équation donne

$$\frac{x^2}{(x-6)^2} = \frac{96}{54} = \frac{16}{9};$$

extrayant la racine quarrée de chaque membre, il vient

$$\frac{x}{x-6} = \pm \frac{4}{3}.$$

Les valeurs des inconnues x , $x-6$, devant être positives, le quotient de leur division doit être positif; on ne peut donc prendre que le signe $+$; ce qui donne $\frac{x}{x-6} = \frac{4}{3}$, d'où $x=24$.

2^e PROBLÈME. Un particulier doit 7200 francs dans un an, et 7200 francs dans deux ans; il acquitte ces deux dettes avec 11000 francs argent comptant; on a égard aux intérêts des intérêts. Quel est le taux de l'argent?

Si l'on désigne par x francs l'intérêt annuel de 100 francs, celui de 1^f sera $\frac{x}{100}$ francs; de sorte que 1^f vaudra dans un an, $1 + \frac{x}{100}$ francs, ou $1^f \times \left(\frac{100+x}{100}\right)$.

Soit $\frac{100+x}{100} = z$; on en déduit $x = 100(z-1)$.

Le capital 1^f vaudra $1^f \times z$ après un an, et $1^f \times z \times z$ après 2 ans. (*Arithmétique*, page 126.) Par conséquent :

1^f payable dans un an, vaut comptant $\frac{1}{z}$ franc,

1^f payable dans 2 ans, vaut comptant $\frac{1}{z^2}$ franc,

les 7200^f payables dans un an, valent $\frac{7200^f}{z}$ comptant,

les 7200^f payables dans 2 ans, valent $\frac{7200^f}{z^2}$ comptant.

Or, on acquitte la dette totale avec 11000^f comptant; donc

$$\frac{7200}{z} + \frac{7200}{z^2} = 11000; \text{ d'où } 55z^2 - 36z - 36 = 0.$$

Cette équation a deux racines réelles (page 188), et de signes contraires (n° 93). Mais, la nature de la question exigeant que x et z soient positifs, on trouvera $z = \frac{6}{5}$, $x = 20$.

De sorte que l'argent est à 20 pour 100 par an.

3^e PROBLÈME. Deux lettres de change, l'une de 6000 francs payable dans 25 mois, l'autre de 27000 francs payable dans 4 mois, ont supporté le même ESCOMPTE; c'est-à-dire que les pertes éprouvées sur chaque lettre de change pour les toucher sur-le-champ sont égales. Il s'agit de trouver le taux de l'argent. On n'a égard qu'aux intérêts simples, et on prend l'escompte en dedans. (Arith., n° 107, page 118.)

Si l'intérêt de 100^f par mois est x francs, l'intérêt de 100^f en 25 mois sera $25x$ francs; 100^f comptant valent donc $100 + 25x$ francs après 25 mois.

L'escompte de $100 + 25x$ francs, étant $25x$ francs en 25 mois,

l'escompte de 1^f sera $\frac{25x \text{ francs}}{100 + 25x}$ ou $\frac{x^f}{4 + x}$;

l'escompte des 6000^f sera donc 6000 fois $\frac{x^f}{4 + x}$ ou $\frac{6000x^f}{4 + x}$.

On verra de même que l'escompte des 27000^f est $\frac{27000x^f}{25 + x}$, pour quatre mois.

Or, ces escomptes doivent être égaux. Donc

$$\frac{6000x}{4 + x} = \frac{27000x}{25 + x}.$$

Cette équation se réduit à

$$(x - 2)x = 0; \text{ d'où } x = 2 \text{ et } x = 0.$$

La valeur $x = 2$, nous apprend que l'argent était à 2 pour 100 par mois. Et en effet, lorsque l'argent est à ce taux, l'escompte de chaque lettre de change se réduit à 2000 francs.

La valeur $x = 0$ fournit une seconde solution de la question proposée; car si l'on suppose que l'intérêt de 100 francs par

mois est nul, c'est-à-dire que l'argent ne porte aucun intérêt, les escomptes des deux lettres de change seront égaux à zéro.

Problèmes du second degré à deux inconnues.

101. 1^{er} PROBLÈME. *La somme de deux nombres est $2p$, leur produit est q ; quels sont ces nombres?*

Si x et y désignent les nombres cherchés, on aura

$$(1) \dots x + y = 2p, \quad xy = q.$$

La 1^{re} équation donne $y = 2p - x$; la substitution de cette valeur de y , dans $xy = q$, conduit à

$$(2) \dots x^2 - 2px + q = 0; \text{ d'où}$$

$$x = p + \sqrt{p^2 - q} \quad \text{et} \quad x = p - \sqrt{p^2 - q}.$$

Or, $y = 2p - x$; les valeurs correspondantes de y sont donc

$$p - \sqrt{p^2 - q} \quad \text{et} \quad p + \sqrt{p^2 - q}.$$

les deux nombres cherchés sont donc les racines

$$p + \sqrt{p^2 - q}, \quad p - \sqrt{p^2 - q}, \text{ de l'équation (2).}$$

Par conséquent: *Toutes les fois qu'on connaîtra la somme $2p$ de deux nombres et leur produit q , ces deux nombres seront les racines $p + \sqrt{p^2 - q}$, $p - \sqrt{p^2 - q}$ de l'équation du second degré $x^2 - 2px + q = 0$.*

Cela résulte d'ailleurs du principe du n° 92 (page 195).

On pouvait prévoir que les inconnues x et y seraient les racines d'une même équation; car les équations (1) restant les mêmes quand on change x et y en y et x , il suffit de faire ce changement dans l'équation (2) pour obtenir l'équation $y^2 - 2py + q = 0$, qui résulterait de l'élimination de x entre les équations (1); x et y sont donc les racines de l'équation $z^2 - 2pz + q = 0$.

En général: *Toutes les fois que des inconnues entrent d'une manière semblable dans des équations, ces inconnues sont nécessairement les racines d'une même équation.*

1^{re} REMARQUE. Le problème proposé conduit à une équation du second degré, qui fournit deux valeurs de l'inconnue, et cependant il n'admet qu'une seule solution.

2^e REMARQUE. Lorsqu'on ne donne que la somme $2p$ de deux nombres positifs x, y , on n'a que la seule équation $x + y = 2p$ entre x et y ; ces deux nombres inconnus ont une infinité de valeurs, et leur produit q reste indéterminé. Cependant le produit q ne saurait croître indéfiniment, car les expressions

$$p + \sqrt{p^2 - q}, \quad p - \sqrt{p^2 - q},$$

des nombres cherchés x, y devant être réelles et positives, la plus grande valeur de q est p^2 .

Par conséquent : lorsque la somme $2p$ de deux nombres positifs est donnée, la plus grande valeur du produit q , de ces deux nombres, est le carré p^2 de leur demi-somme.

On peut d'ailleurs le démontrer directement ; car la somme des deux nombres positifs demandés étant $2p$, si l'un de ces nombres est $p + z$, l'autre sera $p - z$; leur produit $p^2 - z^2$ sera le plus grand possible quand z sera zéro, c'est-à-dire quand chaque facteur sera égal à la demi-somme p des nombres cherchés.

On peut résoudre le problème proposé à l'aide d'une seule inconnue, car en désignant l'un des deux nombres cherchés par x , l'autre sera $2p - x$; et leur produit devant être égal à q , il faut que

$$x(2p - x) = q; \quad \text{d'où} \quad x^2 - 2px + q = 0.$$

Cette équation donne

$$x = p + \sqrt{p^2 - q}, \quad \text{d'où} \quad 2p - x = p - \sqrt{p^2 - q},$$

$$x = p - \sqrt{p^2 - q}, \quad \text{d'où} \quad 2p - x = p + \sqrt{p^2 - q}.$$

Les deux nombres cherchés sont donc

$$p + \sqrt{p^2 - q} \quad \text{et} \quad p - \sqrt{p^2 - q}.$$

102. Il résulte de ce qui précède que toutes les fois que la

somme de deux facteurs positifs variables est constante, la plus grande valeur du produit de ces facteurs a lieu quand ces facteurs sont égaux.

1^{er} EXEMPLE. Soit le produit $x \times (6 - x)$.

La somme des facteurs positifs x , $6 - x$ étant constante, on obtiendra la valeur de x qui rend ce produit le plus grand possible en posant

$$x = 6 - x; \text{ d'où } 2x = 6, x = 3.$$

Le produit *maximum* est donc 3×3 ou 9.

2^e EXEMPLE. Soit le produit $(a + x)(b - x)$.

Pour trouver la valeur de x qui fournit le *maximum* de ce produit, on pose

$$a + x = b - x; \text{ d'où } x = \frac{1}{2}(b - a).$$

Le produit *maximum* est $\frac{1}{2}(a + b) \times \frac{1}{2}(a + b)$ ou $\frac{1}{4}(a + b)^2$.

En général, la somme de m facteurs variables et positifs étant a , le *MAXIMUM* de leur produit a lieu quand tous ces facteurs sont égaux; car si le produit maximum contenait deux facteurs inégaux b , c , on pourrait lui donner la forme $bcpqr$, etc.; or, on vient de prouver que le produit

$\frac{1}{2}(b + c) \times \frac{1}{2}(b + c)$ serait plus grand que bc (*), et la somme des m facteurs b , c , p , q , r , etc., serait la même que celle des m facteurs $\frac{1}{2}(b + c)$, $\frac{1}{2}(b + c)$, p , q , r , etc.; il

existerait donc un produit $\frac{1}{2}(b + c) \times \frac{1}{2}(b + c) \times pqr$ etc., qui serait plus grand que le produit maximum $bcpqr$ etc., et dont la somme des m facteurs serait la même; ce qui est impossible. Tous les facteurs du produit maximum sont donc égaux.

(*) Cela est d'ailleurs évident, car l'inégalité

$$\frac{1}{2}(b + c) \times \frac{1}{2}(b + c) > bc, \text{ conduit à } (b - c)^2 > 0.$$

Par conséquent : Chaque facteur du produit maximum est égal à $\frac{a}{m}$, et la valeur de ce produit est $\left(\frac{a}{m}\right)^m$.

EXEMPLE. Soit l'équation $x + y + z = 6$.

Pour trouver le *maximum* du produit xyz , on pose $x = y = z$; l'équation $x + y + z = 6$, devient $x + x + x = 6$, $3x = 6$, $x = 2$. Le maximum cherché est donc $2 \times 2 \times 2$ ou 8.

2° PROBLÈME. Connaissant la différence, a , de deux nombres, et la différence, b , de leurs carrés, trouver ces deux nombres.

Si x et y désignent les deux nombres cherchés, on aura

$$x - y = a, \quad x^2 - y^2 = b.$$

La 1^{re} équation donne $y = x - a$; substituant cette valeur de y dans $x^2 - y^2 = b$, on trouve

$$x = \frac{b + a^2}{2a}; \text{ et ensuite } y = x - a, \text{ donne } y = \frac{b - a^2}{2a}.$$

Les deux nombres cherchés sont donc $\frac{b + a^2}{2a}$ et $\frac{b - a^2}{2a}$.

REMARQUE. La différence des nombres cherchés x, y étant a , si l'on connaissait leur somme, il serait facile d'en déduire x et y (n° 2). Or, on peut trouver cette somme; car $x^2 - y^2$ étant le produit de $x - y$ par $x + y$, si l'on divise la valeur b de $x^2 - y^2$, par la valeur a de $x - y$, le quotient $\frac{b}{a}$ exprimera $x + y$. On a donc

$$x + y = \frac{b}{a}, \text{ et } x - y = a; \text{ d'où (n° 2)}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + a \right) = \frac{b + a^2}{2a}, \quad y = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} - a \right) = \frac{b - a^2}{2a}.$$

3° PROBLÈME. Connaissant la somme, a , de deux nombres inconnus x, y , et la différence b de leurs carrés, trouver ces deux nombres. On a

$$x + y = a, \quad x^2 - y^2 = b.$$

Si l'on divise la valeur b de $x^2 - y^2$, par la valeur a de $x + y$,

le quotient $\frac{b}{a}$ exprimera $x - y$. Donc

$$x + y = a, \quad x - y = \frac{b}{a}; \quad \text{d'où (n° 2),}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{a}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(a - \frac{b}{a}\right).$$

4^e PROBLÈME. On connaît la somme, a , des carrés de deux nombres, et le produit, b , de ces carrés. Il s'agit de trouver ces deux nombres.

Soient x et y les deux nombres cherchés; on aura

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^2 y^2 = b.$$

Or, d'après le principe du n° 101 (page 205); x^2 et y^2 sont les racines de l'équation

$$z^2 - az + b = 0.$$

On a donc

$$x^2 = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}, \quad y^2 = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}; \quad \text{d'où}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}}.$$

Les doubles signes qui affectent les radicaux fournissent les quatre systèmes de valeurs de x et y qui satisfont aux équations proposées.

EXEMPLE. Soient $a = 34$, $b = 225$;

on en déduit

$$\frac{1}{2}a = 17, \quad \frac{1}{4}a^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 17^2 = 289, \quad \frac{1}{4}a^2 - b = 64,$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} = 8, \quad x = \pm 5, \quad y = \pm 3.$$

Si l'on combine chacune des deux valeurs de x avec chacune des deux valeurs de y , on obtiendra les quatre solutions du système

$$x^2 + y^2 = 34, \quad x^2 y^2 = 225.$$

5^e PROBLÈME. *Trouver deux nombres x, y , dont la somme des quarrés soit, a , et dont le produit soit b . On aura*

$$(1) \dots x^2 + y^2 = a, xy = b.$$

Ces équations peuvent se résoudre par différentes méthodes.

1^{re} MÉTHODE. On élimine y entre les équations (1), en substituant dans la 1^{re} équation, la valeur $\frac{b}{x}$ de y tirée de la 2^e équation; ce qui conduit à

$$x^4 - ax^2 + b^2 = 0.$$

Pour résoudre cette dernière équation, on pose $x^2 = z$; elle devient

$$z^2 - az + b^2 = 0; \text{ d'où } z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Désignant ces deux valeurs de z par m et n , on a

$$z = x^2 = m, z = x^2 = n, m + n = a.$$

Si l'on prend $x^2 = m$, la valeur correspondante de y^2 déduite de $x^2 + y^2 = a$, sera $y^2 = a - m = n$, car $m + n = a$.

Si l'on prend $x^2 = n$, on aura $y^2 = a - n = m$.

Les quarrés des nombres inconnus sont donc m et n . On obtiendra donc tous les systèmes de valeurs de x et y , en posant

$$x^2 = m, y^2 = n; \text{ d'où}$$

$$(2) \dots x = \pm \sqrt{m}, y = \pm \sqrt{n}.$$

Ces quatre systèmes de valeurs de x et y , satisfont à la condition $x^2 + y^2 = a$, car $m + n = a$.

Mais, la condition $xy = b$ exigeant que x et y soient de mêmes signes (on suppose que b est positif), on ne peut admettre que les deux systèmes

$$(3) \dots x = +\sqrt{m}, y = +\sqrt{n} \parallel x = -\sqrt{m}, y = -\sqrt{n}.$$

Pour interpréter les deux autres systèmes

$$(4) \dots x = +\sqrt{m}, y = -\sqrt{n} \parallel x = -\sqrt{m}, y = +\sqrt{n},$$

on observe que les valeurs de m et n ne renfermant que le quarré

b^2 , on serait conduit aux mêmes formules (2) en résolvant les équations

$$(5) \dots x^2 + y^2 = a, \quad xy = -b.$$

Ces formules doivent donc fournir les diverses solutions des systèmes (1) et (5). Les relations (3) donnant $xy = +b$, conviennent aux équations (1); et les relations (4) conduisant à $xy = -b$, conviennent aux équations (5).

1^{er} EXEMPLE. Soient $a = 34$, $b = 15$.

On en déduit $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} = 8$, $m = 25$, $n = 9$.

Les formules (3) donnent $x = 5$, $y = 3$, et $x = -5$, $y = -3$.

2^e EXEMPLE. Soient $a = 34$, $b = -15$.

Les formules (4) fournissent les deux solutions

$$x = +5, y = -3 \parallel x = -5, y = +3.$$

On pouvait prévoir que l'une des solutions des équations (1) étant de la forme $x = p$, $y = q$, l'autre serait $x = -p$, $y = -q$; car les équations (1) restent les mêmes quand on change à la fois les signes de x et y .

REMARQUE. Lorsque, pour éliminer y entre les équations (1), on a remplacé y^2 par sa valeur $\frac{b^2}{x^2}$ tirée de l'équation $xy = b$, on a réellement fait usage de la relation $x^2 y^2 = b^2$; ce qui revient à élever au carré les deux membres de l'équation primitive $xy = b$. Les valeurs (2) de x et y sont donc les mêmes que celles que l'on déduirait des équations

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^2 y^2 = b^2,$$

qui comprennent non-seulement le système primitif proposé,

$$x^2 + y^2 = a, \quad xy = b,$$

mais encore le système

$$x^2 + y^2 = a, \quad xy = -b.$$

On devait donc effectivement parvenir à toutes les valeurs de x et y qui satisfont à ces deux systèmes d'équations.

2^e MÉTHODE. Les équations (1)... $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$, peuvent servir à calculer la somme et la différence des inconnues x , y , car elles donnent

$$x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b, \quad x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b,$$

ce qui revient à

$$(x+y)^2 = a + 2b, \quad (x-y)^2 = a - 2b.$$

Extrayant la racine quarrée des deux membres de chaque équation, et désignant par 2α et 2ϵ les *valeurs arithmétiques* de $\sqrt{a+2b}$ et $\sqrt{a-2b}$, on aura

$$x+y = \pm 2\alpha, \quad x-y = \pm 2\epsilon.$$

Les doubles signes $+$ et $-$ conduisent aux quatre systèmes

$$\begin{aligned} x+y &= +2\alpha, & x-y &= +2\epsilon; & \text{d'où } x &= (\alpha+\epsilon), & y &= (\alpha-\epsilon), \\ x+y &= -2\alpha, & x-y &= -2\epsilon; & \text{d'où } x &= -(\alpha+\epsilon), & y &= -(\alpha-\epsilon), \\ x+y &= +2\alpha, & x-y &= -2\epsilon; & \text{d'où } x &= (\alpha-\epsilon), & y &= (\alpha+\epsilon), \\ x+y &= -2\alpha, & x-y &= +2\epsilon; & \text{d'où } x &= -(\alpha-\epsilon), & y &= -(\alpha+\epsilon). \end{aligned}$$

On voit que ces quatre systèmes ne fournissent que deux solutions du problème proposé; car les deux nombres cherchés sont $\alpha+\epsilon$ et $\alpha-\epsilon$, ou $-(\alpha+\epsilon)$ et $-(\alpha-\epsilon)$.

1^{er} EXEMPLE. Soient $a=34$, $b=15$.

On en déduit

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \sqrt{a+2b} = \sqrt{64} = 8, & 2\epsilon &= \sqrt{a-2b} = \sqrt{4} = 2, \\ \alpha &= 4, & \epsilon &= 1, & \alpha+\epsilon &= 5, & \alpha-\epsilon &= 3. \end{aligned}$$

Les deux nombres cherchés sont donc $+5$ et $+3$, ou -5 et -3 .

2^e EXEMPLE. Soient $a=34$, $b=-15$.

On trouve $\alpha=1$, $\epsilon=4$, $\alpha+\epsilon=5$, $\alpha-\epsilon=-3$.

Les deux nombres cherchés sont donc $+5$ et -3 , ou -5 et $+3$.

REMARQUE. Les valeurs $\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}$, $\frac{1}{2}\sqrt{a-2b}$, de α et ϵ , renfermant les premières puissances des données, a , b , les ex-

pressions $\pm (\alpha + \epsilon)$, $\pm (\alpha - \epsilon)$ des inconnues x , y , ne peuvent convenir qu'aux équations (1) proposées; de sorte que la 2^e méthode offre l'avantage de ne pas conduire à des *valeurs étrangères* des inconnues, c'est-à-dire à des valeurs qui ne satisfont pas aux équations du problème.

103. En général, lorsqu'en résolvant des équations littérales, on parvient à des valeurs des inconnues qui renferment les premières puissances de chacune des *données*, toutes ces valeurs des inconnues satisfont nécessairement aux équations proposées; de sorte qu'on n'obtient pas de solutions étrangères aux équations. Quand les valeurs des inconnues ne contiennent pas les premières puissances de toutes les *données*, on trouve plusieurs systèmes de valeurs des inconnues, dont les uns satisfont aux équations proposées, et dont les autres conviennent à d'autres systèmes d'équations; de sorte qu'on obtient des solutions étrangères aux équations proposées.

Ainsi, dans les quatre premiers problèmes (pages 205...209), les valeurs des inconnues renfermant les premières puissances de toutes les données, toutes ces valeurs ont satisfait aux équations proposées.

Dans le 5^e problème (pages 210 et 211), la première méthode, ayant conduit à des expressions des inconnues x , y , qui ne renferment que le carré de b , on a trouvé deux systèmes de valeurs de x et y , qui ont satisfait aux équations proposées $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$, et deux autres systèmes qui satisfont aux équations $x^2 + y^2 = a$, $xy = -b$.

La 2^e méthode conduisant à des valeurs de x et y qui renferment les premières puissances des *données* a , b , toutes ces valeurs ont satisfait aux équations proposées.

§ III. Propriétés des trinomes du second degré.

104. Tout trinome du second degré $x^2 + px + q$ est le produit de deux facteurs du premier degré, $x - x'$, $x - x''$; et pour trouver ces facteurs, il suffit de chercher les racines x' , x'' , de l'équation $x^2 + px + q = 0$, n^o 91. (page 195).

EXEMPLE. Soit le trinôme $x^2 - 6x + 8$.

Pour le décomposer en deux facteurs, on fait

$$x^2 - 6x + 8 = 0; \text{ d'où } x = 4 \text{ et } x = 2.$$

Les facteurs demandés sont $x - 4$ et $x - 2$.

Le produit de $x - 4$ par $x - 2$ est effectivement $x^2 - 6x + 8$.

105. Quand $ax^2 + bx + c$ est un carré, $b^2 - 4ac$ se réduit à zéro, et la réciproque est vraie; car les deux premiers termes de la racine carrée de $ax^2 + bx + c$ sont $x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$,

le reste correspondant est $\frac{4ac - b^2}{4a}$, et suivant que ce reste est nul ou n'est pas nul, $b^2 - 4ac$ est nul ou n'est pas nul; de sorte que $ax^2 + bx + c$ est un carré ou n'est pas un carré.

106. Dans tout trinôme du second degré de la forme $x^2 + px + q$, on peut toujours assigner une valeur réelle γ de x qui rende le 1^{er} terme x^2 plus grand que la valeur absolue de la somme $px + q$ des autres termes, et qui soit telle que toute valeur de x plus grande que γ jouisse de la même propriété. On suppose que p et q désignent des nombres positifs ou négatifs.

Nous chercherons d'abord la valeur de x qui donne

$$x^2 > px + q.$$

Si c représente la valeur absolue du plus grand des coefficients p, q , on aura

$$cx + c > px + q.$$

Il suffit donc de rendre $x^2 > cx + c$, ou $x^2 > c(x + 1)$.

Ce qui revient à (1) ... $x^2 > \frac{c(x^2 - 1)}{x - 1}$, car $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$.

Or, en supposant $x > 1$, on satisfait évidemment à l'inégalité (1) en posant

$$x^2 = \frac{cx^2}{x - 1}; \text{ d'où } x = c + 1.$$

La valeur de x qui rend le 1^{er} terme x^2 du trinôme $x^2 + px + q$

plus grand que la valeur absolue de la somme $px + q$ des autres termes, est donc égale à la valeur absolue c du plus grand des coefficients p, q , prise positivement et augmentée de 1.

Toute valeur de x plus grande que $c + 1$, jouit de la même propriété ; car en représentant par C un nombre quelconque plus grand que c , la valeur de x qui rendra $x^2 > Cx + C$, donnera à plus forte raison

$$x^2 > cx + c, \quad x^2 > px + q,$$

et d'après ce qui précède, on satisfait à la condition $x^2 > Cx + C$, en prenant $x = C + 1$; ce qui revient à donner à x une valeur quelconque plus grande que $c + 1$.

Lorsqu'on fait $x = -z$, le trinôme $x^2 + px + q$ devient $z^2 - pz + q$; la valeur absolue du plus grand des coefficients p, q , est toujours c ; et d'après ce qui vient d'être démontré, la valeur $z = c + 1$ rend $z^2 > -pz + q$, ainsi que toutes les valeurs de z plus grandes que $c + 1$; or $x = -z$; par conséquent, la valeur négative $x = -(c + 1)$ rend $x^2 > px + q$, et toute valeur négative de x , plus grande en valeur absolue que $c + 1$, jouit de la même propriété.

Il résulte de cette discussion qu'en désignant par δ un nombre positif quelconque, et par c la valeur absolue du plus grand des coefficients p, q , chacune des valeurs $x = (c + 1 + \delta)$, $x = -(c + 1 + \delta)$ rend positif le trinôme $x^2 + px + q$ et rend négatif le trinôme $-x^2 + px + q$.

1^{er} EXEMPLE. Soit le trinôme $x^2 - 5x + 4$.

On a, $c = 5$; chacune des valeurs $x = 6 + \delta$, $x = -(6 + \delta)$, rend $x^2 - 5x + 4$ positif ; car

$$x = 6 + \delta, \text{ donne } x^2 - 5x + 4 = \delta^2 + 7\delta + 10,$$

$$x = -(6 + \delta) \text{ donne } x^2 - 5x + 4 = \delta^2 + 17\delta + 70;$$

et δ étant positif, on voit que ces deux valeurs de $x^2 - 5x + 4$ sont positives.

Cela est d'ailleurs évident ; car $x^2 - 5x + 4$ étant le produit de $x - 1$ par $x - 4$, toute valeur de x plus grande que 6 rend ces deux facteurs positifs.

2^e EXEMPLE. Soit le trinome $-x^2 + 5x - 4$.

On verra, comme dans le 1^{er} exemple, que ce trinome devient négatif, pour chacune des valeurs $x = 6 + \delta$, $x = -(6 + \delta)$, quelle que soit la valeur positive qu'on assigne à δ .

107. Lorsque dans le trinome $ax^2 + bx + c$, le coefficient de x^2 est plus grand que zéro, il existe toujours une infinité de valeurs réelles de x , qui rendent ce trinome positif, et ces valeurs de x peuvent toujours croître jusqu'à l'infini positif et négatif.

Cette propriété se déduirait de ce qu'il est toujours possible de rendre le 1^{er} terme d'un trinome plus grand que la somme des deux autres (n^o 106). Mais on peut aussi la démontrer en décomposant $ax^2 + bx + c$ en deux facteurs du 1^{er} degré; ce qui offre trois cas.

Pour abréger, nous désignerons le trinome par z .

1^o. Lorsque les racines x' , x'' , de l'équation $z = 0$, sont réelles et inégales, on a

$$z = a(x - x')(x - x'').$$

Toutes les valeurs réelles de x , qui ne sont pas comprises entre x' et x'' , rendent z positif; car les facteurs $x - x'$, $x - x''$, sont de même signe; ainsi x peut croître jusqu'à l'infini positif et jusqu'à l'infini négatif.

Toutes les valeurs réelles de x , comprises entre x' et x'' , rendent z négatif; car les facteurs $x - x'$, $x - x''$, sont de signes contraires.

2^o. Lorsque les racines x' , x'' , sont égales, on a $z = a(x - x')^2$, et il devient évident que z reste constamment positif, lorsque x croît sans interruption depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

3^o. Quand les racines x' , x'' , sont imaginaires, on peut toujours ramener le trinome à la forme (1) $z = a[(x - a)^2 + c^2]$.

On voit que z reste constamment positif, pour des valeurs réelles quelconques de x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

REMARQUE. Dans ce dernier cas, la relation (1) fait voir qu'il existe toujours une valeur réelle de x qui rend le trinome le plus petit possible. Cette valeur est $x = a$; elle donne $a^2 c^2$ pour le MINIMUM de z .

Par exemple, soit $z = x^2 - 6x + 84$,
cela revient à $z = (x - 3)^2 + 25$.

La valeur $x = 3$ donne 25 pour le MINIMUM de z .

108. Lorsque le premier terme d'un trinôme $-ax^2 + bx + c$ est négatif, il se présente trois cas :

1°. Si les racines x' , x'' de l'équation $-ax^2 + bx + c = 0$, sont réelles et inégales, en désignant le trinôme par z , on aura

$$z = -a(x - x')(x - x'') = a(x - x')(x'' - x).$$

Cette égalité démontre que toute valeur de x comprise entre x' et x'' rend z positif, car $x - x'$ et $x'' - x$ sont de même signe ; tandis que toute valeur de x , non comprise entre x' et x'' , rend z négatif, puisque $x - x'$ et $x'' - x$ deviennent de signes contraires.

REMARQUE. Il existe toujours une valeur finie de x qui fournit la plus grande valeur positive de z ; car la somme des facteurs positifs $x - x'$, $x'' - x$, étant constante, on obtiendra cette valeur de x en posant

$$x - x' = x'' - x \text{ (n° 102)}; \text{ d'où } x = \frac{1}{2}(x' + x'').$$

Le MAXIMUM de z sera $a\left(\frac{x'' - x'}{2}\right)^2$.

2°. Si les racines x' , x'' , sont égales, on aura

$$z = -a(x - x')^2.$$

Cela démontre que toutes les valeurs réelles de x rendent z négatif, à l'exception de la valeur $x = x'$ qui donne $z = 0$.

3°. Enfin, si les racines x' , x'' , sont imaginaires, on aura

$$z = -a[(x - \alpha)^2 + C^2],$$

et par conséquent, toute valeur réelle de x rendra constamment z négatif.

109. On peut déterminer directement les valeurs réelles de x qui fournissent la plus grande ou la plus petite valeur positive du trinôme $\pm ax^2 + bx + c$, sans qu'il soit nécessaire de décomposer ce trinôme en deux facteurs.

A cet effet, on égale le trinôme proposé à une indéterminée z , on en déduira x en fonction de z ; et x devant être réel, il sera facile de découvrir le *maximum* ou le *minimum* de z .

$$1^{\circ}. \text{ Soit } +ax^2 + bx + c = z.$$

$$\text{On en tire } x = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4az}).$$

x devant être réel et z étant supposé positif, z ne peut avoir une limite que lorsque $b^2 - 4ac$ est une quantité négative $-a^2$; dans ce cas, les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, sont imaginaires, et on a

$$x = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{4ax - a^2}).$$

Il devient évident que l'hypothèse $4az = a^2$, fournit la plus petite valeur $\frac{a^2}{4a}$ de z ; la valeur correspondante de x est $-\frac{b}{2a}$.

$$2^{\circ}. \text{ Soit } -ax^2 + bx + c = z.$$

$$\text{On en tire } x = \frac{1}{2a} (b \pm \sqrt{b^2 + 4ac - 4az}).$$

Ces valeurs de x doivent être réelles, et l'on suppose que z est positif. Par conséquent, z ne peut avoir une limite que lorsque $b^2 + 4ac$ est positif, c'est-à-dire quand les racines de l'équation $-ax^2 + bx + c = 0$, sont réelles; et dans ce cas, l'hypothèse $b^2 + 4ac - 4az = 0$, fournit la plus grande valeur positive $\frac{b^2 + 4ac}{4a}$ de z ; la valeur correspondante de x est $x = \frac{b}{2a}$.

CHAPITRE IV.

Des Puissances et des Racines. Des Combinaisons.

110. La $n^{\text{ième}}$ puissance d'une quantité est le produit de n facteurs égaux à cette quantité (page 8).

Pour indiquer une puissance d'une quantité, on renferme cette quantité entre parenthèses, et on place l'exposant de cette puissance à droite de la parenthèse et un peu au-dessus.

Ainsi, $(a^p)^n$ marque la $n^{\text{ième}}$ puissance de a^p , et $(a + b + c)^n$ désigne la $n^{\text{ième}}$ puissance du trinome $a + b + c$.

On fait quelquefois usage des double parenthèses. Par exemple, pour représenter la cinquième puissance de

$$(a + b)^3 - (a - b)^3 - c, \text{ on écrit } \{(a + b)^3 - (a - b)^3 - c\}^5.$$

§ 1^{er}. *Puissances et Racines des monomes.*

111. 1°. On obtient la $n^{\text{ième}}$ puissance d'une quantité affectée d'un exposant, en multipliant l'exposant par n ; car

$$(a^3)^3 = a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3} = a^9,$$

$$(a^p)^n = a^p \times a^p \times a^p \times \dots \times a^p = a^{p+p+p+\dots+p} = a^{pn}.$$

2°. Pour élever un produit à une puissance, il suffit d'élever chaque facteur à cette puissance; car un produit ne changeant pas de valeur dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications, on a

$$(abc)^3 = abc \times abc \times abc = aaabbbccc = a^3b^3c^3,$$

$$(ab)^n = ab \times ab \times ab \times \dots \times ab = (aaaa\dots)(bbb\dots) = a^n b^n.$$

3°. Pour former la $n^{\text{ième}}$ puissance du produit de plusieurs

quantités affectées d'exposants, on élève à la $n^{\text{ième}}$ puissance le coefficient numérique qui peut affecter ce produit, et on multiplie chaque exposant par n . Cela résulte de (2°) et (1°).

Ainsi, $(3a^2b^5)^4 = 3^4(a^2)^4(b^5)^4 = 81a^8b^{20}$.

4°. On trouve la $n^{\text{ième}}$ puissance d'une fraction en élevant séparément le numérateur et le dénominateur à cette puissance; car

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots \times \frac{a}{b} = \frac{aaa\dots a}{bbb\dots b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

5°. Toute puissance de degré pair d'une quantité positive ou négative est positive; toute puissance de degré impair d'une quantité a le signe de cette quantité. Cela se déduit des propriétés du n° 16 (1°, 2° et 3°). Par exemple,

$$(+3)^4 = +81, (-3)^4 = +81, (+2)^3 = +8, (-2)^3 = -8.$$

Il en résulte qu'aucune quantité élevée à une puissance de degré pair ne peut donner un résultat négatif.

Racines des monomes.

112. La racine $n^{\text{ième}}$ d'une quantité étant le facteur qui, élevé à la $n^{\text{ième}}$ puissance, reproduit cette quantité (page 8), il en

résulte que la $n^{\text{ième}}$ puissance de $\sqrt[n]{a}$ est a .

Nous démontrerons par la suite qu'un radical a autant de valeurs qu'il y a d'unités dans son indice. Nous ne considérerons ici que les valeurs arithmétiques des radicaux, c'est-à-dire les valeurs réelles positives de ces radicaux (n° 83).

Pour revenir des puissances à leurs racines, il suffit de renverser les règles du n° 111.

1°. On obtient la racine $n^{\text{ième}}$ d'une quantité affectée d'un exposant, en divisant l'exposant par n .

Ainsi, $\sqrt[n]{a^n} = a$, $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$.

2°. Pour trouver la racine $n^{\text{ième}}$ d'un produit, il suffit d'extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de chaque facteur.

Ainsi, $\sqrt[n]{a^3 b^3 c^3} = \sqrt[n]{a^3} \sqrt[n]{b^3} \sqrt[n]{c^3} = abc$,
 $\sqrt[n]{a^n b^n} = \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{b^n} = ab$,
 $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$.

On peut démontrer directement cette dernière propriété; car la $n^{\text{ième}}$ puissance du produit $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$ étant.... $(\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n \times (\sqrt[n]{c})^n$, ou $a \times b \times c$, il s'ensuit que la quantité $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$ exprime la racine $n^{\text{ième}}$ de $a \times b \times c$; de sorte que

$$\sqrt[n]{a \times b \times c} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}.$$

3°. Pour obtenir la racine $n^{\text{ième}}$ du produit de plusieurs quantités affectées d'exposans, on extrait la racine $n^{\text{ième}}$ du coefficient numérique, et on divise chaque exposant par n . Cela résulte de (2°) et (1°).

Ainsi, $\sqrt[4]{81a^8b^{12}} = \sqrt[4]{81} \sqrt[4]{a^8} \sqrt[4]{b^{12}} = 3a^2b^3$.

4°. On trouve la racine $n^{\text{ième}}$ d'une fraction en prenant séparément la racine $n^{\text{ième}}$ du numérateur et du dénominateur.

Ainsi, $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a}{b}$,

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a}{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

113. Quand tous les exposans des quantités qui sont sous un

radical ne sont pas divisibles par l'indice de ce radical, l'extraction indiquée ne peut pas s'effectuer exactement; on réduit alors le radical à sa plus simple expression, en faisant sortir de dessous le radical tous les facteurs qui ont des racines exactes. Ainsi,

$$\sqrt[3]{40a^4b^8} = \sqrt[3]{2^3a^3b^6 \times 5ab^2} = \sqrt[3]{2^3a^3b^6} \times \sqrt[3]{5ab^2} = 2ab^2\sqrt[3]{5ab^2}.$$

Tant qu'on ne donne pas des valeurs particulières à a et b , on ne peut pas réduire le radical à une forme plus simple.

En général : Pour *réduire un radical du $n^{\text{ième}}$ degré à sa plus simple expression*, on décompose en ses facteurs premiers le coefficient numérique du monome placé sous le radical; on divise ensuite par n tous les exposans des facteurs monomes, ce qui fournit des quotiens entiers et des restes correspondans moindres que n . Il est alors facile de décomposer la quantité placée sous le radical en deux facteurs, dont l'un ne renferme que des exposans divisibles par l'indice n du radical, et dont l'autre renferme des exposans moindres que n . La racine $n^{\text{ième}}$ du 1^{er} facteur, multipliée par la racine indiquée du second facteur, détermine la plus simple expression algébrique du radical proposé.

EXEMPLE. Soit $\sqrt[3]{6400b^{17}c^{13}}.$

On décompose 6400 en ses facteurs premiers, d'après la méthode indiquée (*Arith.*, n° 48). On trouve que $6400 = 2^8 \times 5^2$; de sorte que

$$\sqrt[3]{6400b^{17}c^{13}} = \sqrt[3]{2^8 \times 5^2 \times b^{17} \times c^{13}}.$$

On divise les exposans 8, 17, 13, par 3, ce qui fournit les quotiens entiers 2, 5, 4 et les restes 2, 2, 1. On en déduit que

$$8 = 3 \times 2 + 2, \quad 17 = 3 \times 5 + 2, \quad 13 = 3 \times 4 + 1.$$

$$2^8 = 2^{3 \times 2 + 2} = 2^{3 \times 2} \times 2^2, \quad b^{17} = b^{3 \times 5 + 2} = b^{3 \times 5} \times b^2,$$

$$c^{13} = c^{3 \times 4 + 1} = c^{3 \times 4} \times c.$$

Le radical devient

$$\sqrt[3]{(2^1 \times 1^3 \times 5^3 \times c^3 \times 4)} \times (2^2 \times 5^2 \times b^2 c), \text{ ou } \\ \sqrt[3]{2^3 \times 1^3 \times 5^3 \times c^3 \times 4} \times \sqrt[3]{2^2 \times 5^2 \times b^2 c}.$$

Ce qui se réduit à $2^2 b^2 c^4 \sqrt[3]{100 b^2 c}$.

Pour faire sortir un facteur de dessous un radical du $n^{\text{ième}}$ degré, il suffit d'extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de ce facteur; et réciproquement, lorsqu'on veut faire passer sous un radical du $n^{\text{ième}}$ degré un facteur placé hors de ce radical, on élève le facteur à la $n^{\text{ième}}$ puissance; car

$$\sqrt[n]{a^{pn}} \times b = \sqrt[n]{a^{pn}} \times \sqrt[n]{b} = a^p \sqrt[n]{b}, \text{ et } a^p \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{pn}} \times b.$$

Par exemple,

$$\sqrt[3]{a^6 b^3} = a^2 \sqrt[3]{b^3} \text{ et } a^2 \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{(a^2)^3 b^3} = \sqrt[3]{a^6 b^3}.$$

114. La plupart des extractions de racines ne pouvant pas se faire exactement, et le calcul des valeurs approchées des racines incommensurables étant très long, on a cherché à effectuer, sur les quantités soumises aux signes des radicaux, les opérations indiquées sur les racines de ces quantités; on réduit ensuite les derniers résultats à leurs plus simples expressions algébriques, par la méthode du n° 113.

Lorsque les quantités placées sous des radicaux du même degré sont les mêmes, on dit que ces radicaux sont semblables, et quand ces deux conditions ne sont pas remplies, les radicaux sont dissemblables. Cela posé:

1°. L'addition et la soustraction des radicaux semblables s'effectuent sur les coefficients de ces radicaux; car on peut regarder le radical comme une certaine unité qui est répétée un nombre de fois marqué par le coefficient de chaque radical. Ainsi,

$$8\sqrt[4]{a} + 5\sqrt[4]{a} = 13\sqrt[4]{a}, \quad 2b\sqrt[4]{a} - 3c\sqrt[4]{a} = (2b - 3c)\sqrt[4]{a}.$$

2°. Quand des radicaux réduits à leur plus simple expres-

sion sont dissemblables, on ne peut qu'indiquer l'addition et la soustraction.

Ainsi, la somme des radicaux

$$2a\sqrt[3]{ab^3}, 5a\sqrt[3]{ab} \text{ est } 2a\sqrt[3]{ab^3} + 5a\sqrt[3]{ab},$$

et leur différence est $2a\sqrt[3]{ab^3} - 5a\sqrt[3]{ab}$.

3°. Pour multiplier entre eux des radicaux du même degré, il suffit de former le produit des quantités qui sont sous les radicaux, et de mettre ce produit sous un radical du même degré; car on a démontré (page 221, 2°), que

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \times b \times c};$$

Cette règle générale donne

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{10a^2b^3} \times \sqrt[3]{4a^3b^3} &= \sqrt[3]{40a^5b^6} = 2ab^2\sqrt[3]{5ab^2}, \\ 2a\sqrt[5]{3a^3b^3} \times 3b^3c\sqrt[5]{7a^3b^3d} &= 6ab^3c\sqrt[5]{21a^6b^{10}d} = 6a^2b^4c\sqrt[5]{21d}. \end{aligned}$$

4°. La division de deux radicaux du même degré l'un par l'autre s'effectue en indiquant la division des quantités placées sous ces radicaux et en mettant le quotient sous un radical du

même degré; car la $n^{\text{ième}}$ puissance de $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ étant $\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}$ ou $\frac{a}{b}$,

la quantité $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ exprime la racine $n^{\text{ième}}$ de $\frac{a}{b}$; de sorte que

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\sqrt[3]{40a^4b^3}}{\sqrt[3]{10a^2b^4}} = \sqrt[3]{\frac{40a^4b^3}{10a^2b^4}} = \sqrt[3]{4a^2b^{-1}} = b^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{4a^2},$$

$$\frac{5\sqrt[3]{40a^4b^3}}{7\sqrt[3]{10a^2b^4}} = \frac{5}{7}\sqrt[3]{\frac{40a^4b^3}{10a^2b^4}} = \frac{5}{7}b^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{4a^2}.$$

5°. La valeur arithmétique d'un radical ne change pas, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre, l'indice du radical et les exposans de la quantité qui est placée sous le radical.

En effet, soit $\sqrt[m]{ca^p b^q} = a$, (c désigne le coefficient numérique), on aura

$$a^m = ca^p b^q.$$

Élevant les deux membres à la $n^{\text{ième}}$ puissance, on trouve

$$a^{mn} = c^n a^{pn} b^{qn}; \text{ d'où } a = \sqrt[mn]{c^n a^{pn} b^{qn}}.$$

Les deux valeurs arithmétiques de a devant être égales entre elles, on a

$$\sqrt[m]{ca^p b^q} = \sqrt[mn]{c^n a^{pn} b^{qn}} \quad \text{et} \quad \sqrt[mn]{c^n a^{pn} b^{qn}} = \sqrt[m]{ca^p b^q}.$$

Ce qui démontre les deux propriétés énoncées.

REMARQUE. La multiplication par n des exposans de la quantité placée sous le radical, revient à élever cette quantité à la $n^{\text{ième}}$ puissance, et la division de ces exposans par n revient à extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de la quantité placée sous le radical.

6°. Pour réduire plusieurs radicaux au même indice, sans changer leurs valeurs arithmétiques, on multiplie l'indice de chaque radical et les exposans de la quantité placée sous ce radical, par le produit des indices des autres radicaux.

Ainsi, les radicaux $\sqrt[3]{a^5 b}$, $\sqrt[4]{a^3 b}$, $\sqrt[5]{a b}$, réduits au même indice, deviennent

$$\sqrt[60]{a^{16} b^8}, \quad \sqrt[60]{a^{18} b^8}, \quad \sqrt[60]{a^{12} b^{12}}.$$

Les radicaux $\sqrt[3]{5ab^3}$, $\sqrt[3]{7a^3 b}$, réduits au même indice, deviennent

$$\sqrt[6]{5^2 a^3 b^6}, \quad \sqrt[6]{7^2 a^3 b^3}, \quad \text{ou} \quad \sqrt[6]{125 a^3 b^6}, \quad \sqrt[6]{49 a^3 b^3}.$$

REMARQUE. Lorsque les indices des radicaux proposés ont un facteur commun, on simplifie le calcul en prenant pour indice commun, le plus petit nombre divisible par chacun de ces indices.

Par exemple, soient les radicaux

$$\sqrt[5]{ab}, \sqrt[3]{ab^2}, \sqrt[4]{ab^3}, \sqrt[6]{3ab^5}, \sqrt[8]{2ab^5}.$$

Le plus petit nombre divisible par les indices 2, 3, 4, 6, 8, étant 24 (Arith., n° 51, page 47), on trouvera que les radicaux proposés réduits au plus petit indice commun, sont

$$\sqrt[24]{a^{12}b^{12}}, \sqrt[24]{a^{16}b^{16}}, \sqrt[24]{a^{18}b^{18}}, \sqrt[24]{3^4a^4b^{20}}, \sqrt[24]{2^3a^3b^{15}}.$$

7°. Pour multiplier ou pour diviser des radicaux de degrés différents, on les réduit d'abord au plus petit indice commun, et on leur applique ensuite la règle qui a été donnée (page 224, 3° et 4°).

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{a^5} \times \sqrt[15]{4ab^7} &= \sqrt[30]{a^{25}} \times \sqrt[30]{16a^2b^{14}} = \sqrt[30]{16a^{27}b^{14}}, \\ \frac{\sqrt[30]{16a^{27}b^{14}}}{\sqrt[15]{4ab^7}} &= \frac{\sqrt[30]{16a^{27}b^{14}}}{\sqrt[30]{16a^2b^{14}}} = \sqrt[30]{a^{25}} = \sqrt[6]{a^5}. \end{aligned}$$

8°. On obtient la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un radical, en élevant la quantité qui est sous le radical à cette puissance, ou en divisant l'indice de ce radical par n .

En effet, on trouve la $n^{\text{ième}}$ puissance de $\sqrt[n]{a}$ en formant le produit de n facteurs égaux à $\sqrt[n]{a}$. Or, d'après le principe qui a été démontré (page 224, 3°), le produit

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \dots \dots \dots$$

est égal à $\sqrt[n]{a \times a \times a \dots}$, ou à $\sqrt[n]{a^n}$,

car a est n fois facteur sous le radical $\sqrt[n]{a \times a \times a \dots}$.

$$\text{Donc (1)... } (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}.$$

Il résulte de la propriété exprimée par cette dernière identité, que

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}.$$

Or, d'après le principe établi (page 225, 5°), on a

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a}. \text{ Donc (2) } \dots (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a}.$$

Les identités (1) et (2) démontrent les propriétés énoncées.

REMARQUE. Pour former la $n^{\text{ième}}$ puissance de la quantité monome placée sous le radical, on élève le coefficient numérique de ce monome à cette puissance, et on multiplie tous les exposans par n ; ce qui est toujours possible.

On trouve de cette manière que

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{7a^3b^3})^3 &= \sqrt[3]{7^3a^9b^9} = \sqrt[3]{49a^3b^3} = ab^3\sqrt[3]{49ab}, \\ (\sqrt[5]{7a^5b^5})^5 &= \sqrt[5]{7^5a^{25}b^{25}} = ab^5\sqrt[5]{7b}. \end{aligned}$$

9°. Pour trouver la racine $n^{\text{ième}}$ d'un radical, on extrait la racine $n^{\text{ième}}$ de la quantité qui est sous le radical, ou on multiplie l'indice du radical par n . Cela résulte du principe précédent.

On peut démontrer directement ces propriétés. En effet, si a désigne la racine $n^{\text{ième}}$ de $\sqrt[n]{a}$, la $n^{\text{ième}}$ puissance de a sera

$$\text{égale à } \sqrt[n]{a}, (n^{\circ} 112). \text{ Donc } a^n = \sqrt[n]{a}.$$

La racine $m^{\text{ième}}$ de a étant a^m , la $m^{\text{ième}}$ puissance de a^m ou a^{mn} , doit être égale à a , (n° 112). Donc

$$a^{mn} = a; \text{ d'où } a = \sqrt[mn]{a}, (n^{\circ} 112).$$

La racine $n^{\text{ième}}$ de $\sqrt[m]{a}$ est donc $\sqrt[mn]{a}$.

Par conséquent, la racine $n^{\text{ième}}$ de $\sqrt[m]{a^n}$ est $\sqrt[mn]{a^n}$, ou $\sqrt[m]{a}$.

Ce qui démontre les propriétés énoncées.

REMARQUE. Pour obtenir la racine $n^{\text{ième}}$ du monome placé sous le radical, on extrait la racine $n^{\text{ième}}$ du coefficient numé-

rique de ce monome, et on divise tous les exposans des facteurs monomes par n . Quand ces deux opérations ne peuvent pas s'effectuer exactement, on obtient la racine $n^{\text{ième}}$ du radical en multipliant son indice par n .

On trouve de cette manière, que la racine cubique de

$$\sqrt[5]{8a^3b^6} \text{ est } \sqrt[5]{2ab^2}, \text{ car } \sqrt[3]{8a^3b^6} = 2ab^2,$$

et que la racine cinquième de $\sqrt[6]{7a^2b^7}$ est $\sqrt[30]{7a^2b^7}$.

Pour obtenir la racine quatrième de $2ab^2\sqrt[5]{7ab^2c}$, on fait d'abord passer le facteur $2ab^2$ sous le radical, en l'élevant à la 5^e puissance (page 223); le radical proposé devient

$$\sqrt[5]{32a^5b^{10} \times 7ab^2c} \text{ ou } \sqrt[5]{224a^6b^{12}c},$$

et sa racine quatrième est $\sqrt[20]{224a^6b^{12}c}$.

Pour indiquer la racine $n^{\text{ième}}$ de $\sqrt[m]{a}$, on écrit $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. De sorte que

$$(1) \dots \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Quand l'indice d'un radical est le produit de plusieurs facteurs, on obtient la valeur de ce radical, en extrayant successivement les racines des degrés marqués par ces facteurs; cela résulte de la formule (1).

Par exemple, le nombre 6 étant le produit de 2 par 3, on obtient la racine 6^e de 64 en prenant la racine 2^e de la racine 3^e de 64, ou en prenant la racine 3^e de la racine 2^e de 64.

115. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les valeurs arithmétiques des radicaux; de sorte que chaque radical n'avait qu'une seule valeur. Mais, il résulte des propriétés énoncées dans le n° 111 (5°) que lorsqu'on a égard aux signes + et —, un radical peut avoir deux valeurs réelles; car d'après ces propriétés :

1°. Toute racine de degré pair d'une quantité positive, a deux valeurs réelles égales et de signes contraires. Ainsi,

$$\sqrt[4]{16} = \pm 2, \sqrt[6]{a^{12}} = \pm a^2, \sqrt[4]{16a^{12}b} = \pm 2a^3\sqrt[4]{b}.$$

2°. La racine de degré pair d'une quantité négative n'a aucune valeur réelle; car toute puissance paire d'une quantité positive ou négative, est une quantité positive. On dit par ce motif que cette racine est *imaginaire*.

Ainsi, $\sqrt[4]{-16}$ est *imaginaire*.

3°. Toute racine de degré impair d'une quantité positive ou négative a une seule valeur réelle, qui est de même signe que la quantité.

Ainsi, $\sqrt[3]{+8} = +2, \sqrt[3]{-8} = -2,$

$$\sqrt[3]{8a^3} = 2a, \sqrt[3]{-8a^3} = -2a.$$

4°. Un radical de degré impair conserve sa valeur, lorsqu'on change à la fois le signe placé hors du radical et le signe de la quantité qui est sous le radical. Cela résulte de (3°).

Ainsi,

$$+\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{+8} = -2, -\sqrt[3]{-8} = +\sqrt[3]{+8} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

116. On a démontré (n° 112, 1°) que pour extraire la racine $n^{ième}$ de a^m , il suffit de diviser l'exposant m par n .

Quand le quotient est un nombre entier q , la racine $n^{ième}$ de a^m est a^q .

Lorsque m n'est pas divisible par n , on ne peut pas obtenir la valeur exacte de la racine demandée, et au lieu d'indiquer cette racine par le radical $\sqrt[n]{a^m}$, on peut affecter a de l'exposant fractionnaire $\frac{m}{n}$. De sorte que $\sqrt[n]{a^m}$ et $a^{\frac{m}{n}}$ indiquent également la racine $n^{ième}$ de a^m .

Il en résulte que la $n^{ième}$ puissance de chacune des quantités $\sqrt[n]{a^m}, a^{\frac{m}{n}}$ est a^m .

Par exemple, 7 n'étant pas divisible par 4, la racine quatrième de a^7 n'est pas exacte; mais en indiquant la division de 7 par 4, l'exposant de a dans la racine cherchée, devient un nombre fractionnaire $\frac{7}{4}$; de sorte que $\sqrt[4]{a^7}$ et $a^{\frac{7}{4}}$ indiquent également la racine quatrième de a^7 .

117. L'emploi des exposans fractionnaires étant très commode dans les calculs, nous allons démontrer que *les règles relatives aux exposans entiers, conviennent aux exposans fractionnaires*.

Nous prouverons d'abord qu'on a

$$(1) \dots a^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m} + \frac{q}{n}}, \quad a^{\frac{p}{m}} : a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m} - \frac{q}{n}}, \quad \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^n = a^{\frac{pn}{m}}.$$

En effet, les principes établis (n° 114, 7°, 3° et 4°), donnent

$$(2) \dots \sqrt[p]{a^p} \times \sqrt[q]{a^q} = \sqrt[pq]{a^{p+q}}, \quad \sqrt[p]{a^p} : \sqrt[q]{a^q} = \sqrt[pq]{a^{p-q}}, \quad \left(\sqrt[p]{a^p}\right)^n = \sqrt[pn]{a^{pn}},$$

et la transformation de ces radicaux en exposans fractionnaires conduit aux relations (1).

Par exemple, la relation

$$\sqrt[p]{a^p} \times \sqrt[q]{a^q} = \sqrt[pq]{a^{p+q}},$$

conduit à

$$a^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pn+qm}{mn}} = a^{\frac{pn}{mn} + \frac{qm}{mn}} = a^{\frac{p}{m} + \frac{q}{n}}.$$

La formule (3) $\dots \frac{1}{a^a} = a^{-a}$ convient au cas où a désigne un

nombre fractionnaire quelconque. En effet; soit $\frac{p}{m} - \frac{q}{n} = a$, on aura

$$a^{\frac{p}{m}} : a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m} - \frac{q}{n}} = a^a, \quad a^{\frac{q}{n}} : a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{q}{n} - \frac{p}{m}} = a^{-a}.$$

Multipliant ces équations membre à membre, et observant que le produit des premiers membres se réduit à l'unité, on aura la relation

$$1 = a^n \times a^{-n}; \text{ d'où } \frac{1}{a^n} = a^{-n} \text{ et } \frac{1}{a^{-n}} = a^n;$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

On en déduirait, comme dans le n° 34, que les formules (1) sont vraies pour des exposans fractionnaires négatifs.

Les formules (1) et (3) convenant à des exposans commensurables quelconques, le principe du n° 13, démontre qu'elles conviennent également à des exposans incommensurables.

REMARQUE. La notation des *exposans fractionnaires* est due à *Descartes*. Cette notation est la plus naturelle et la plus commode, parce que l'analogie qui existe entre les exposans entiers et les exposans fractionnaires, permet d'appliquer les mêmes règles à ces deux classes d'exposans. Au contraire, le signe *radical*, n'ayant aucun rapport avec l'opération qui engendre les radicaux, il a fallu des raisonnemens particuliers pour découvrir les règles relatives au calcul des radicaux.

En général : la notation qui offre le plus d'avantages, est toujours celle qui dérive immédiatement de la nature de l'opération que l'on veut indiquer.

118. L'emploi des exposans fractionnaires et négatifs, fournit le moyen d'ordonner les polynomes qui contiennent des radicaux monomes. Pour ordonner le polynome,

$$9\sqrt[5]{a} + \frac{4}{a} + \sqrt[3]{a^7} + \frac{5}{a\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + 2\sqrt[6]{a^3} + 7,$$

par rapport aux puissances décroissantes de a , on transforme d'abord les radicaux en exposans fractionnaires; on fait disparaître a des dénominateurs au moyen de la formule $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$; on réduit tous les exposans à leur plus petit dénominateur commun, et on ordonne ensuite suivant les puissances décroissantes de a ; ce qui donne

$$a^{\frac{14}{6}} + 2a^{\frac{5}{6}} + 9a^{\frac{3}{6}} + 7a^0 + a^{-\frac{4}{6}} + 4a^{-\frac{6}{6}} + 5a^{-\frac{8}{6}}.$$

119. Toutes les puissances entières positives des quantités

plus grandes que l'unité, sont plus grandes que l'unité et ont des valeurs d'autant plus grandes, que ces puissances sont plus élevées. Les valeurs des puissances entières positives des quantités moindres que l'unité, sont moindres que l'unité, et sont d'autant plus petites, que les puissances sont plus élevées; car en supposant $a > 1$, $c < 1$, on a (*Aritk.*, page 56, 3^e remarque)

$$a \times a > a, \text{ ou } a^2 > a; a^2 \times a > a^2, \text{ ou } a^3 > a^2; \text{ etc.,} \\ c \times c < c, \text{ ou } c^2 < c; c^2 \times c < c^2, \text{ ou } c^3 < c^2; \text{ etc.}$$

120. On peut toujours donner à l'exposant n une valeur finie assez grande, pour que a^n soit plus grand qu'une quantité donnée δ , et que c^n soit moindre qu'une quantité donnée θ .

Pour démontrer ces propriétés, nous prouverons d'abord que n désignant un nombre entier positif, on a toujours

$$(1 + \gamma)^n > 1 + n\gamma.$$

La formule (1) du n° 29 (page 33), conduit à l'identité

$$(1) \dots \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1.$$

Si l'on suppose $x > 1$, chacun des termes x^{n-1} , x^{n-2} , ... x , sera plus grand que 1; le 2^e membre de l'identité (1) étant composé de n termes, sera donc plus grand que n . Donc

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} > n; \text{ d'où } x^n > 1 + n(x - 1).$$

Faisant $x = 1 + \gamma$, l'inégalité $x^n > 1 + n(x - 1)$ devient $(1 + \gamma)^n > 1 + n\gamma$.

Cela posé : 1^o. soit $a = 1 + \gamma$.

Pour obtenir la valeur de n qui rend $a^n > \delta$, il suffit de satisfaire à la condition $1 + n\gamma > \delta$; car $(1 + \gamma)^n$ ou a^n étant plus grand que $1 + n\gamma$, on aura à plus forte raison $a^n > \delta$.

Or, l'inégalité $1 + n\gamma > \delta$ donne $n > \frac{\delta - 1}{\gamma}$.

Par conséquent, toute valeur entière de n plus grande que la quantité finie $\frac{\delta - 1}{\gamma}$, rendra a^n plus grand que δ .

2°. Soit $\zeta < 1$. On pourra mettre ζ sous la forme $\frac{1}{\alpha}$, α désignant une quantité plus grande que l'unité. L'inégalité

$$\zeta^n < \theta \text{ deviendra } \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n < \theta, \frac{1}{\alpha^n} < \theta, \alpha^n > \frac{1}{\theta},$$

et α étant plus grand que l'unité, on a vu (1°) comment on détermine les valeurs finies de n qui rendent $\alpha^n > \frac{1}{\theta}$.

D'après cette discussion, si l'on représente par α une quantité quelconque plus grande que l'unité, et par ζ une quantité positive moindre que l'unité; lorsque l'exposant n croît indéfiniment en s'approchant de l'infini, la valeur de α^n augmente indéfiniment et tend vers l'infini, tandis qu'au contraire ζ^n diminue en s'approchant indéfiniment de zéro. Enfin, à la limite, lorsque $n = \infty$, on a $\alpha^n = \infty$, $\zeta^n = 0$.

121. Lorsqu'on extrait d'un nombre positif des racines dont les degrés croissent indéfiniment, les valeurs arithmétiques de ces racines approchent indéfiniment de l'unité.

Il s'agit de faire voir qu'on peut toujours prendre un indice n assez grand pour que $\sqrt[n]{a}$ diffère d'aussi peu qu'on voudra de l'unité.

1^{er} Cas. Soit $a > 1$, on aura $a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$.

Nous observerons d'abord que la valeur de $\sqrt[n]{a}$ est plus grande que l'unité; car élevée à la $n^{\text{ième}}$ puissance, elle doit donner une quantité a plus grande que l'unité.

D'ailleurs, quand n augmente, $\sqrt[n]{a}$ diminue; c'est-à-dire qu'on a

$$(1) \dots \sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a},$$

car en réduisant les radicaux au même indice, l'inégalité (1) devient

$$\sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} < \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}}; \text{ d'où } a^n < a^{n+1},$$

et on a vu (n° 119) que cette dernière inégalité est vraie.

Cela posé : puisque $\sqrt[n]{1+a} > 1$, on a $\sqrt[n]{1+a} = 1 + b$;
 d'où $1 + a = (1 + b)^n$. Or $(1 + b)^n > 1 + nb$ (n° 120) ,
 donc $1 + a > 1 + nb$; donc $b < \frac{a}{n}$ et $1 + b < 1 + \frac{a}{n}$.

Par conséquent, $\sqrt[n]{1+a} < 1 + \frac{a}{n}$.

Cela démontre la propriété énoncée ; car a étant donné , on peut toujours prendre n assez grand pour que $\frac{a}{n}$ soit aussi petit qu'on voudra.

2° Cas. Soit $a < 1$.

Nous observerons d'abord que la valeur de $\sqrt[n]{a}$ sera moindre que l'unité ; car élevée à la $n^{\text{ième}}$ puissance , elle doit donner un nombre a moindre que l'unité.

D'ailleurs , quand n augmente ; $\sqrt[n]{a}$ augmente ; car l'inégalité

$$\sqrt[n+1]{a} > \sqrt[n]{a} \text{ conduit à } a^n > a^{n+1},$$

et l'on a démontré (n° 119) que cette dernière inégalité est vraie , quand $a < 1$.

Cela posé : le nombre a étant moindre que 1 , on peut le mettre sous la forme $\frac{1}{1+a}$, a désignant une quantité positive. De sorte que

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{1+a}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{1+a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}.$$

Or , on a démontré dans le 1^{er} cas que l'on peut toujours prendre n assez grand pour que $\sqrt[n]{1+a}$ diffère aussi peu qu'on voudra de l'unité ; la valeur correspondante de $\sqrt[n]{a}$ jouira donc de la même propriété.

Il résulte de cette discussion que a désignant un nombre positif quelconque, plus grand ou plus petit que l'unité, la valeur de $\sqrt[n]{a}$ se réduit à l'unité quand l'indice n devient infini.

REMARQUE. On peut déduire de ce qui précède, que la valeur de a^m se réduit à l'unité, quand l'exposant m devient zéro; car en faisant

$$m = \frac{1}{n}, \quad \text{d'où} \quad a^m = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},$$

on voit que si n augmente et approche indéfiniment de $+\infty$, l'exposant m diminuera et approchera indéfiniment de zéro, et $\sqrt[n]{a}$ ou a^m approchera indéfiniment de l'unité; de sorte qu'à la limite, $a^0 = 1$.

Nous sommes parvenus par d'autres considérations à la relation $a^0 = 1$, (page 42, 1°).

§. II. Puissances des Polynomes. Combinaisons.

122. La multiplication donne le moyen de déterminer les puissances entières positives des polynomes, car il suffit de former le produit d'autant de facteurs égaux au polynome donné, qu'il y a d'unités dans l'indice de la puissance.

Ainsi, en multipliant $x + a$ par $x + a$, le produit $x^2 + 2ax + a^2$ exprime la *deuxième puissance* ou le *quarré* de $x + a$. Si l'on multiplie $x^2 + 2ax + a^2$ par $x + a$, le produit $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ sera la *troisième puissance* ou le *cube* de $x + a$. Et ainsi de suite.

Ce procédé ayant l'inconvénient de faire dépendre une puissance de toutes les précédentes, nous allons chercher une formule pour calculer directement la $m^{\text{ième}}$ puissance du binome $x + a$, lorsque m désigne un nombre entier positif quelconque. Nous en déduirons la $m^{\text{ième}}$ puissance d'un polynome.

Les premières puissances de $x + a$ suffiraient pour faire connaître la loi des exposans de x et de a dans le développement

de $(x + a)^m$; mais on n'aperçoit pas la loi des coefficients numériques, parce que ces coefficients résultent des réductions qu'entraîne l'égalité des facteurs.

Pour éviter ces réductions, nous chercherons d'abord la forme générale du produit de m binômes $x + a, x + b, x + c$, etc. Quand ce produit sera connu, nous en déduirons la $m^{\text{ième}}$ puissance de $x + a$ en supposant que les m seconds termes a, b, c , etc., deviennent égaux à a .

123. Si l'on multiplie entre eux les binômes $x + a, x + b, x + c$, etc., on trouvera que le produit de $x + a$ par $x + b$ est

$$x^2 + (a + b)x + ab,$$

que celui des facteurs $x + a, x + b, x + c$, est

$$x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc.$$

Multipliant ce dernier produit par $x + d$, on verra que le produit des facteurs $x + a, x + b, x + c, x + d$, est

$x^4 + a$	$x^3 + ab$	$x^2 + abc$	$x + abcd$ (*).
$+ b$	$+ ac$	$+ abd$	
$+ c$	$+ ad$	$+ acd$	
$+ d$	$+ bc$	$+ bcd$	
	$+ bd$		
	$+ cd$		

Et ainsi de suite.

On en déduit, par analogie, que dans le produit de plusieurs binômes $x + a, x + b, x + c$, etc., l'exposant de x dans le 1^{er} terme est égal au nombre des binômes, et les exposans de x dans les termes suivans diminuent successivement d'une unité, jusqu'au dernier terme qui ne renferme pas x , et qui peut être considéré comme le coefficient de x^0 , car $x^0 = 1$. La loi des coefficients de x n'est pas moins évidente; le coefficient du 1^{er} terme est l'unité, celui du 2^e terme est la somme des seconds

(*) Dans cette expression, le coefficient de x^3 est $a + b + c + d$; celui de x^2 est $ab + ac + ad + bc + bd + cd$, et celui de x est $abc + abd + acd + bcd$. On fera souvent usage de cette notation.

termes des binomes, le coefficient du 3^e terme est la somme de tous les produits deux à deux de ces seconds termes; le coefficient du 4^e terme est la somme de tous les produits trois à trois des seconds termes des binomes; et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme qui est le produit de tous les seconds termes des binomes.

Pour démontrer que cette loi est générale, il suffit de faire voir que si elle est vraie pour m binomes, elle sera encore vraie pour $m + 1$ binomes; car ayant été vérifiée pour quatre binomes, elle conviendra au produit de cinq binomes: partant de ce dernier produit, la loi indiquée sera vraie pour six binomes; et ainsi de suite.

Cela posé: quand la loi assignée convient au produit des m binomes $x + a, x + b, \dots, x + k$, ce produit est de la forme

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{n-1} x^{m-n+1} + p_n x^{m-n} + \dots + p_m.$$

p_1 représente la somme des m seconds termes; p_2 désigne la somme de leurs produits 2 à 2; et en général, p_n exprime la somme de tous les produits n à n des m seconds termes.

Multipliant ce polynome par $x + l$, on trouve que le produit des $m + 1$ binomes, $x + a, x + b, \dots, x + k, x + l$, est

$$x^{m+1} + (p_1 + l)x^m + \dots + (p_n + lp_{n-1})x^{m-n+1} + \dots + lp_m.$$

La loi des exposans de x n'a pas changé; car l'exposant de x dans le 1^{er} terme est égal au nombre $m + 1$ des facteurs binomes, et les exposans de x dans les termes suivans diminuent successivement d'une unité, jusqu'au dernier terme qui ne contient pas x , et qui peut être considéré comme affecté de x^0 .

La loi des coefficients n'a pas changé. En effet; dans le produit des m binomes $x + a, x + b, \dots, x + k$, le coefficient p_n du $(n + 1)^{i\text{me}}$ terme, étant la somme des produits n à n des m seconds termes $a, b, \dots, k$, il en résulte que dans le produit des $m + 1$ binomes $x + a, x + b, \dots, x + k, x + l$, le coefficient $(p_n + lp_{n-1})$, du terme de même rang, est la somme des produits n à n des $m + 1$ seconds termes $a, b, \dots, k, l$;

car p_n exprime la somme des produits n à n dans lesquels l n'entre pas, et p_{n-1} étant la somme des produits $n-1$ à $n-1$ des m seconds termes, $a, b, \dots, k$, le produit de p_{n-1} par l , donne les produits n à n dans lesquels l entre; de sorte que $p_n + lp_{n-1}$ est la somme des produits n à n des $m+1$ seconds termes $a, b, \dots, k, l$. Par conséquent, si la loi énoncée a lieu pour m binomes, elle conviendra au produit de $m+1$ binomes; cette loi est donc générale.

124. Lorsque les m seconds termes $a, b, c, \dots, k$, sont égaux à α , le produit

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_n x^{m-n} + \dots + p_m,$$

des m binomes $x+a, x+b, \dots, x+k$, devient la $m^{\text{ième}}$ puissance de $x+\alpha$; il s'agit donc de trouver les valeurs correspondantes des coefficients $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

Le coefficient p_1 de x^{m-1} , qui exprimait la somme des m seconds termes $a, b, \dots, k$, devient $\alpha + \alpha + \text{etc.}$, ou α répété m fois, ou αm .

Le coefficient p_2 qui exprimait la somme des produits deux à deux des m seconds termes $a, b, \dots, k$, devient $\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 + \text{etc.}$, c'est-à-dire α^2 répété autant de fois qu'il y avait de produits deux à deux; désignant ce nombre inconnu par b_2 , on a $p_2 = \alpha^2 \times b_2$.

Notant $b_3, b_4, \dots, b_n$, les nombres des produits différens de m lettres prises 3 à 3, 4 à 4, $\dots$, n à n , on voit que la $m^{\text{ième}}$ puissance de $x+\alpha$ est

$$x^m + m\alpha x^{m-1} + b_2 \alpha^2 x^{m-2} + b_3 \alpha^3 x^{m-3} + \dots + b_n \alpha^n x^{m-n} + \dots + \alpha^m.$$

La question est donc réduite à trouver les inconnues $b_2, b_3, \dots, b_n$; leur détermination dépend de la *théorie des combinaisons*, que nous allons exposer, en nous bornant à ce qui nous est ici nécessaire.

125. Les divers arrangemens qu'on peut former en disposant des quantités différentes; 2 à 2, ou 3 à 3, ou etc., sont les *combinaisons* 2 à 2, ou 3 à 3, ou etc., de ces quantités.

Ainsi, les *combinaisons* 2 à 2, de a, b, c , sont ab, ac, ba, bc, ca et cb .

Les quantités a, b, c , multipliées 2 à 2, ne donnent que trois produits différens; car les produits ba, ca, cb , sont respectivement égaux aux produits ab, ac, bc .

Lorsque toutes les quantités que l'on combine entrent à la fois dans chaque arrangement, ces combinaisons prennent le nom de *permutations*.

Ainsi, les *permutations* du produit abc sont

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Ces six permutations ont la même valeur numérique ($n^{\circ} 12$).

Cela posé :

1^o. Occupons-nous d'abord des *combinaisons* de m lettres.

Pour former toutes les *combinaisons* 2 à 2, on met successivement à la suite de chaque lettre, chacune des $m - 1$ autres; de sorte que chaque lettre occupant la 1^{re} place, détermine $m - 1$ combinaisons; le nombre total des combinaisons 2 à 2 de m lettres est donc m fois $(m - 1)$.

Par exemple, soit $m = 4$; on trouve que le nombre des combinaisons 2 à 2 de 4 lettres est 4×3 ou 12. Et en effet, ces combinaisons sont

$ab, ac, ad; ba, bc, bd; ca, cb, cd; da, db, dc$.

Connaissant les combinaisons 2 à 2 de m lettres, on en déduit les combinaisons 3 à 3 des mêmes lettres en plaçant successivement à la suite de chacune des combinaisons 2 à 2, chacune des $m - 2$ autres lettres; l'une quelconque des combinaisons 2 à 2, donnant $m - 2$ combinaisons 3 à 3, les $m(m - 1)$ combinaisons 2 à 2 de m lettres, fourniront $m(m - 1)$ fois $(m - 2)$ combinaisons 3 à 3.

On trouve de cette manière que les quatre lettres a, b, c, d , prises 3 à 3, fournissent les 24 combinaisons

$abc, acb, adb, bac, bca, bda, cab, cba, cda, dab, dba, dca, abd, acd, adc, bad, bcd, bdc, cad, cbd, cdb, dac, dbc, dcab$.

Les combinaisons 4 à 4 se déduiraient semblablement des combinaisons 3 à 3; on trouverait que leur nombre est égal à $m(m - 1)(m - 2)(m - 3)$. Et ainsi de suite.

2°. Passons aux *permutations*.

Deux lettres a, b , donnent les deux permutations ab, ba .

Pour former les permutations $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, de trois lettres a, b, c , on place successivement à la suite de chaque lettre, les permutations des 2 autres lettres; de sorte que chaque lettre occupant la 1^{re} place donne 2 permutations de 3 lettres; les 3 lettres fourniront donc 3 fois 2, ou 6 permutations.

Pour en déduire les permutations de 4 lettres, on met successivement à la suite de chaque lettre, chacune des 2×3 ou 6 permutations des 3 autres lettres; le nombre des permutations de 4 lettres est donc 4 fois 2×3 , ou $2 \times 3 \times 4$, ou 24; et en effet, ces permutations ainsi formées sont

$abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb,$
 $bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca,$
 $cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba,$
 $dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba.$

On verrait de même que le nombre des permutations de 5 lettres est $2 \times 3 \times 4 \times 5$ ou 120. Et ainsi de suite.

3°. Le nombre des *produits* de m quantités prises 2 à 2, ou 3 à 3, ou etc., se déduit de ce qui précède. En effet :

m quantités donnent $m(m-1)$ combinaisons 2 à 2; or un produit ab fournit deux permutations ab, ba ; le nombre des produits 2 à 2 est donc $\frac{1}{2} m(m-1)$ ou $\frac{m(m-1)}{1 \times 2}$.

De même, m quantités prises 3 à 3, déterminent.....
 $m(m-1)(m-2)$ combinaisons, et chaque produit de 3 facteurs fournit $1 \times 2 \times 3$ permutations; le nombre des produits 3 à 3 est donc $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3}$.

Et ainsi de suite:

Par exemple, soit $m=4$; on trouve que le nombre de produits 2 à 2 de quatre quantités est $\frac{4 \times 3}{1 \times 2}$ ou 6, que celui des produits 3 à 3 est $\frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3}$ ou 4.

126. D'après les lois indiquées par les formules précédentes, on voit qu'en désignant par c_n le nombre des combinaisons n à n de m lettres, par p_n le nombre des permutations de n lettres, et par b_n le nombre des produits n à n de m lettres, on aura

$$(1) \dots c_n = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+2)(m-n+1),$$

$$(2) \dots p_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n,$$

$$(3) \dots b_n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+2)(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \times n}.$$

On peut démontrer directement ces formules, sans avoir recours à l'analogie. En effet : supposons que l'on combine m lettres.

1°. Le nombre c_n des combinaisons n à n serait facile à déterminer si l'on pouvait le faire dépendre du nombre c_{n-1} des combinaisons $n-1$ à $n-1$; par la même raison, c_{n-1} dépendrait successivement de c_{n-2} , de c_{n-3} , ..., de c_2 , de c_1 , et il est évident que le nombre c_1 des combinaisons de m lettres prises une à une, est m .

La question se réduit donc à trouver la relation générale qui existe entre c_n et c_{n-1} .

Pour déduire les combinaisons n à n , des combinaisons $n-1$ à $n-1$, il suffit de mettre successivement à la suite de chaque combinaison de $n-1$ lettres, chacune des $m-(n-1)$ lettres qui n'entrent pas dans cette combinaison; de sorte qu'en plaçant successivement à la suite d'une combinaison de $n-1$ lettres, chacune des $m-(n-1)$ autres lettres, on obtient les $m-n+1$ combinaisons n à n , qui commencent par cette combinaison de $n-1$ lettres. Chacune des combinaisons $n-1$ à $n-1$, fournit donc $m-(n-1)$ ou $m-n+1$ combinaisons n à n ; les c_{n-1} combinaisons $n-1$ à $n-1$, donnent donc c_{n-1} fois $m-n+1$ combinaisons n à n ; et comme on obtient ainsi toutes les combinaisons n à n , la relation cherchée est

$$(4) \dots c_n = (m-n+1) c_{n-1}.$$

Pour obtenir une valeur de c_n , qui ne dépende que des seules quantités m , n , on remplace successivement n , par n , $n-1$,

$n = 2, \dots, 3$ et 2; la relation (4) donne

$$\begin{aligned} c_n &= (m - n + 1) c_{n-1}, \\ c_{n-1} &= (m - n + 2) c_{n-2}, \\ &\vdots \\ c_3 &= (m - 2) c_2, \\ c_2 &= (m - 1) c_1. \end{aligned}$$

Pour éliminer $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_3, c_2$ et c_1 , on multiplie ces équations membre à membre, et on remplace c_1 par sa valeur m ; ce qui conduit à

$$c_n = (m - n + 1) (m - n + 2) \dots (m - 2) (m - 1) m.$$

Les facteurs de c_n écrits dans un ordre inverse, donnent la formule (1).

2°. Les *permutations* n'étant que des combinaisons dans lesquelles toutes les lettres entrent à la fois, le nombre p_n des permutations de n lettres, peut se déduire du nombre c_n des combinaisons n à n de m lettres, en faisant $m = n$ dans la valeur de c_n ; ce qui donne la formule (2).

3°. Enfin, pour trouver toutes les combinaisons n à n de m lettres, il suffit de prendre les produits n à n , et de les permuter de toutes les manières possibles. Or, chaque produit de n lettres donne p_n permutations; les b_n produits n à n déterminent donc b_n fois p_n combinaisons n à n ; mais c_n désigne le dernier nombre de combinaisons; donc $p_n \times b_n = c_n$.

On en déduit la valeur (3) de b_n en substituant les valeurs (1), (2) de c_n et p_n .

REMARQUE. La formule (3) $b_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$

détermine le nombre des produits réellement différents qu'on peut former avec m quantités prises n à n . Or, ce nombre est nécessairement entier. Le produit de n nombres entiers consécutifs quelconques, $m, m - 1, \dots, m - n + 1$, est donc exactement divisible par le produit des n premiers nombres entiers, $1, 2, 3, \dots, n$. Nous donnerons par la suite une démonstration directe de cette propriété remarquable.

127. Si l'on donne successivement à n les valeurs 2, 3, etc., la formule (3) conduira aux relations

$$b_1 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \quad b_2 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc.}$$

La substitution de ces valeurs dans l'expression

$$x^m + m a x^{m-1} + b_1 a^2 x^{m-2} + b_2 a^3 x^{m-3} + \text{etc.},$$

de $(x+a)^m$, conduit à la formule

$$(2) \dots (x+a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \text{etc.},$$

qui est connue sous le nom de *formule du binôme de NEWTON*; elle sert à calculer directement toutes les puissances entières positives d'un binôme.

EXEMPLE. Soit $m=5$. On trouve

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

Si l'on veut en déduire la cinquième puissance du binôme $2y^3 - 3y$, on fera $x=2y^3$, $a=-3y$; et l'on trouvera que cette puissance est

$$32y^{15} - 240y^{13} + 720y^{11} - 1080y^9 + 810y^7 - 243y^5.$$

Si T_{n+1} désigne le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme du développement de $(x+a)^m$, c'est-à-dire le terme qui en a n avant lui, on aura

$$(5) \dots T_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1) \cdot n} a^n x^{m-n}.$$

T_{n+1} est le *terme général* du développement de $(x+a)^m$, parce qu'il détermine les termes de ce développement, à partir du 2^e, en donnant successivement à n les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, etc.

La $m^{\text{ième}}$ puissance de $x+a$, contient $m+1$ termes; le dernier terme est a^m . En effet, lorsqu'on suppose $n=m$ dans l'expression (5) de T_{n+1} , on trouve

$$T_{m+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (m-1) \cdot m} a^m x^0 = a^m.$$

Ce $(m+1)^{\text{ième}}$ terme est le dernier du développement de $(x+a)^m$; car en assignant à n des valeurs entières plus grandes

que m , un des facteurs du numérateur de T_{n+1} se réduit à zéro.

128. *Chaque terme peut se déduire du précédent; car lorsqu'on change n en $n+1$, la relation (5) devient*

$$(6) \dots T_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \times \frac{(m-n)}{(n+1)} a^{n+1} x^{m-n-1},$$

et la comparaison des formules (5), (6), conduit à cette règle générale: *Pour déduire un terme quelconque du précédent, multipliez le coefficient numérique du terme précédent par l'exposant de x dans ce terme, diminuez l'exposant de x d'une unité, augmentez celui de a d'une unité, et divisez par l'exposant de a ainsi augmenté d'une unité; le résultat sera le terme demandé.*

Tous les termes du développement de $(x+a)^m$ peuvent ainsi se déduire du premier terme x^m .

On trouve de cette manière que dans le développement de $(x+a)^5$, le 1^{er} terme étant x^5 , les termes suivans sont

$$5x^4a, \frac{5 \times 4x^3a^2}{2} \text{ ou } 10x^3a^2, \frac{10 \times 3x^2a^3}{3} \text{ ou } 10x^2a^3, \\ \frac{10 \times 2x^1a^4}{4} \text{ ou } 5x^1a^4, \frac{5 \times 1x^0a^5}{5} \text{ ou } 1 \times x^0a^5 \text{ ou } a^5.$$

Le terme $1 \times x^0a^5$ est le dernier; car d'après la loi énoncée, le terme suivant contiendrait en facteur l'exposant zéro de x .

Le développement de $(x+a)^5$, ainsi formé, est donc

$$x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5.$$

On peut remarquer que les coefficients numériques des termes également distans du premier terme et du dernier sont égaux.

129. En général: *Dans le développement de $(x+a)^m$, les coefficients des termes également distans du premier terme et du dernier sont égaux.*

1^{re} DÉMONSTRATION. Le développement de $(x+a)^m$ est de la forme

$$(1) \dots x^m + Aax^{m-1} + Baa^2x^{m-2} + \dots + B'a^{m-2}x^2 + A'a^{m-1}x + a^m,$$

les coefficients $A, B, \dots, B', A'$, sont des fonctions de m , indépendantes de x et de a .

La $m^{\text{ième}}$ puissance de $x + a$ devant rester la même quand on change à la fois x en a et a en x , si l'on fait ce changement dans (1), le résultat

$$a^m + Axa^{m-1} + Bx^2a^{m-2} + \dots + B'x^{m-2}a^2 + A'x^{m-1}a + x^m,$$

devra être composé des mêmes termes que le polynôme (1). De sorte que les coefficients des mêmes puissances de x seront égaux dans ces deux polynômes. On a donc $A = A'$, $B = B'$, etc. Ce qui démontre la propriété énoncée.

2° DÉMONSTRATION. Le développement de $(x + a)^m$ contenant $m + 1$ termes, le terme qui en a n après lui est précédé de $m - n$ termes. Or, dans ce développement, le terme qui en a n avant lui, est de la forme $b_n a^n x^{m-n}$. (page 238), et b_n exprime le nombre des produits n à n de m lettres. Pour en déduire le terme qui en a n après lui, c'est-à-dire $m - n$ avant lui, il suffit de changer n en $m - n$ dans $b_n a^n x^{m-n}$; ce terme est donc $b_{m-n} a^{m-n} x^n$, et son coefficient b_{m-n} exprime le nombre des produits $m - n$ à $m - n$ de m lettres. Or, en divisant successivement le produit de m lettres par chacun des b_n produits n à n , les b_n quotiens sont les produits des m lettres prises $m - n$ à $m - n$; le nombre b_{m-n} des produits $m - n$ à $m - n$, de m lettres est donc égal au nombre b_n des produits n à n de ces m lettres. Les coefficients b_{m-n} , b_n , des termes également distans des extrêmes sont donc égaux.

3° DÉMONSTRATION. Dans le développement de $(x + a)^m$, le coefficient du terme qui en a n avant lui est

$$b_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \times n}.$$

Pour en déduire le coefficient du terme qui en a n après lui, c'est-à-dire $m - n$ avant lui, il suffit de changer n en $m - n$, et par suite $m - n$ en n ; ce qui donne

$$b_{m-n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-n-1)(m-n)}.$$

Si l'on réduit ces deux fractions au même dénominateur, en ayant soin d'écrire les facteurs des dénominateurs de b_n et b_{m-n} dans un ordre inverse, afin que les facteurs des nouveaux numérateurs diminuent successivement d'une unité, on trouvera que ces numérateurs sont

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)(m-n+1) \times (m-n)(m-n-1)\dots 3.2.1}{m(m-1)(m-2)\dots (n+2) \times (n+1) \times n \times (n-1)\dots 3.2.1},$$

et ils sont égaux, car ils expriment tous deux le produit des m nombres entiers consécutifs $1, 2, 3, \dots, m$. Ce qui démontre la propriété énoncée.

130. La somme de tous les coefficients contenus dans le développement de $(x+a)^m$, est égale à 2^m ; car d'après la propriété du n° 129, le développement de $(x+a)^m$ pouvant se mettre sous la forme

$$1x^m + mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \dots + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} x^2 + ma^{m-1} x + 1a^m,$$

si l'on fait $x=1$, $a=1$, on trouve que

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \dots + \frac{m(m-1)}{1.2} + m + 1.$$

Par exemple, la somme des coefficients contenus dans le développement de $(x+a)^5$ est

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1, \text{ ou } 32, \text{ ou } 2^5.$$

131. Pour obtenir le développement de $(x-a)^m$, il suffit de changer $+a$ en $-a$, dans la valeur de $(x+a)^m$; les puissances paires de a restent positives; les puissances impaires de a deviennent négatives, et l'on trouve

$$(x-a)^m = x^m - mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

Selon que l'exposant m est un nombre pair ou impair, le dernier terme est $+a^m$ ou $-a^m$.

1^{er} EXEMPLE. Soit $m=4$. On trouve

$$(x-a)^4 = x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4.$$

On en déduit que la quatrième puissance de $a^3 - \frac{3b^4}{4c} a$ est

$$a^{12} - \frac{3b^4}{c} a^7 + \frac{27b^4}{8c^2} a^6 - \frac{27b^6}{16c^2} a^5 + \frac{81b^8}{256c^2} a^4.$$

2^e EXEMPLE. Soit $m=5$. On trouve

$$(x - a)^5 = x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5.$$

On en déduit que la cinquième puissance de $2x^3 - 3x$ est

$$32x^{15} - 240x^{13} + 720x^{11} - 1080x^9 + 810x^7 - 243x^5.$$

132. Toutes les puissances des polynomes peuvent se déduire de la formule du binome

$$(x + a)^m = x^m + m ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \dots + a^m.$$

En effet; lorsqu'on change a en $a + \zeta$, cette formule donne

$$(x + a + \zeta)^m = x^m + m(a + \zeta)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (a + \zeta)^2 x^{m-2} + \dots + (a + \zeta)^m.$$

Or, la formule du binome déterminera les puissances 2, 3, ..., m , du binome $a + \zeta$; on trouvera donc ainsi le développement de $(x + a + \zeta)^m$.

Si l'on change dans ce dernier développement, ζ en $\zeta + \gamma$, on obtiendra la $m^{i\text{ème}}$ puissance de $x + a + \zeta + \gamma$. Et ainsi de suite.

On trouvera de cette manière que la sixième puissance du trinome $x^2 + x + 1$ est

$$x^{12} + 6x^{11} + 21x^{10} + 50x^9 + 90x^8 + 126x^7 + 141x^6 + 126x^5 + 90x^4 + 50x^3 + 21x^2 + 6x + 1.$$

§ III. Puissances et Racines des nombres.

133. La multiplication suffit pour former les puissances entières positives des nombres; nous allons chercher à revenir de ces puissances à leurs racines.

Nous avons vu en Arithmétique comment on extrait la racine quarrée et la racine cubique des nombres. Nous observerons

seulement ici que l'Algèbre conduit très simplement aux règles, qui ont été données en Arithmétique (n^{os} 127, 132, 145 et 150), relativement à la composition du quarré et du cube d'un nombre formé de dizaines et d'unités, ainsi que d'une somme composée de deux parties; car la multiplication algébrique donne

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 \times b + 3a \times b^2 + b^3,$$

et ces formules démontrent les règles indiquées.

134. Le procédé à suivre pour extraire la racine *m^{ième}* d'un nombre entier quelconque, se déduit de la composition des deux premiers termes $p^m + mp^{m-1} \times q$, du développement de la *m^{ième}* puissance de $p + q$.

Par exemple, soit proposé d'extraire la racine cinquième d'un nombre entier.

On observe d'abord que la cinquième puissance de 10 étant 100000, les racines cinquièmes des nombres moindres que 100000 sont moindres que 10.

Les cinquièmes puissances des nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

sont

1, 32, 243, 1024, 3125, 7776, 16807, 32768, 59049.

On en déduit les plus petites valeurs entières approchées des racines cinquièmes des nombres moindres que 100000.

Par exemple, 64 tombant entre 32 et 243, c'est-à-dire entre 2^5 et 3^5 , la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[5]{64}$ est 2.

Pour extraire la racine cinquième d'un nombre entier *a* plus grand que 100000, on désigne le nombre des dizaines de la racine par *a*, et le chiffre des unités par *b*; la racine demandée est $10a + b$, et la formule

$$(p + q)^5 = p^5 + 5p^4q + \text{etc.}; \text{ donne}$$

$$a = (10a + b)^5 = 100000a^5 + 5a^4b \times 10000 + \text{etc.}$$

$$= a^5 \text{ centaines de mille} + 5a^4b \text{ dizaines de mille} + \text{etc.}$$

La cinquième puissance des a dizaines de la racine se trouvant dans les centaines de mille de a , si l'on représente le nombre de ces centaines de mille par δ , je dis que la plus petite valeur entière approchée γ de $\sqrt[5]{\delta}$ exprime les dizaines de $\sqrt[5]{a}$; car a étant compris entre γ^5 et $(\gamma + 1)^5$ centaines de mille, on a

$$a > \gamma^5 \times 10^5, \quad a < (\gamma + 1)^5 \times 10^5;$$

d'où $\sqrt[5]{a} > \gamma \times 10, \quad \sqrt[5]{a} < (\gamma + 1) \times 10.$

La racine cinquième de a tombant entre γ et $\gamma + 1$ dizaines, cette racine contient γ dizaines; de sorte que $\gamma = a$.

La question est ainsi réduite à déterminer la racine cinquième d'un nombre δ qui contient cinq chiffres de moins que a .

Raisonnant d'une manière semblable sur δ , on est conduit à diviser le nombre donné a , en tranches de cinq chiffres, à partir de la droite; la dernière tranche peut renfermer moins de cinq chiffres, elle contient la cinquième puissance du 1^{er} chiffre à gauche de la racine; la TABLE des cinquièmes puissances des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, donne ce 1^{er} chiffre; et ensuite chacune des autres tranches fournit un chiffre de la racine demandée.

EXEMPLE. Calculer la racine cinquième de 6436343.

On divise ce nombre en tranches de cinq chiffres à partir de la droite; le nombre 2 des tranches indique que la racine a deux chiffres.

La première tranche à gauche 64, tombant entre 32 et 243, c'est-à-dire entre 2^5 et 3^5 , le chiffre a des dizaines de la racine cherchée est 2.

Cela est d'ailleurs évident, car 6436343 tombant entre 2^5 et 3^5 centaines de mille, c'est-à-dire entre $2^5 \times 10^5$ et $3^5 \times 10^5$, la racine cinquième de 6436343 est comprise entre 2×10 et 3×10 , c'est-à-dire entre 2 et 3 dizaines.

Retranchant 2^5 de 6436343, le reste est 3236343; on a

$$3236343 = (10a + b)^5 - a^5 \text{ centaines de mille} = 5a^4b \text{ dizaines de mille} + \text{etc.}$$

Le terme $5a^4b$ ne peut donc faire partie que des 323 dizaines de mille du reste 3236343.

Or, 323 contient $5a^4b$, plus le nombre de dizaines de mille qui peut se trouver dans la somme des autres parties de $(10a+b)^5$, et $5a^4 = 5 \times 2^4 = 80$; divisant donc 323 par 80, les 4 unités du quotient exprimeront le chiffre b des unités de la racine, ou un chiffre trop grand. La cinquième puissance de 24 étant plus grande que 6436343, le chiffre 4 est trop fort. Diminuant ce chiffre d'une unité, et retranchant 23^5 de 6436343, le reste zéro fait voir que la racine demandée est 23.

On trouvera de même que la racine cinquième de 7015833, contient 23 unités; mais le dernier reste au lieu d'être zéro, sera 579490. Ce reste est égal à $7015833 - 23^5$; de sorte que la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[5]{7015833}$ est 23.

On verra d'une manière semblable, comment on peut extraire les racines de tous les degrés des nombres entiers.

135. Occupons-nous des racines des nombres décimaux et des fractions.

Le produit de plusieurs nombres décimaux contenant autant de décimales qu'il y en a dans tous ses facteurs, la $m^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre N qui renferme n décimales, contient $m \times n$ décimales.

Par conséquent, pour trouver la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre décimal, à moins d'une unité décimale du $n^{\text{ième}}$ ordre, on doit préparer ce nombre de manière qu'il renferme $m \times n$ décimales; on calcule la plus petite valeur entière approchée de la racine $m^{\text{ième}}$ du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans ce nombre ainsi préparé, et on sépare n décimales sur la droite de cette valeur approchée.

EXEMPLE. Calculer la racine cinquième de 0,0007015833 247, à moins d'un centième d'unité, c'est-à-dire avec deux décimales.

Il suffit de conserver 2 fois 5 ou 10 décimales; ce qui donne 0,0007015833. Supprimant la virgule, on cherche la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[5]{7015833}$, qui est 23. La racine cherchée est donc 0,23.

On peut s'assurer que 0,00070.15833 247 tombe entre les cinquièmes puissances de 0,23 et 0,24.

On trouvera de même, que la racine cinquième de 70,15833 71424 est exactement 2,34.

La racine $m^{\text{ième}}$ d'une fraction peut s'obtenir en extrayant séparément la racine $m^{\text{ième}}$ du numérateur et du dénominateur (n° 112, 4°).

Par exemple,

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}.$$

Lorsque la racine $m^{\text{ième}}$ du dénominateur n'est pas exacte, on réduit le calcul à extraire une seule racine, au moyen de la formule

$$(1) \dots \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{ab^{m-1}}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{b}.$$

Si δ désigne la racine $m^{\text{ième}}$ de ab^{m-1} à moins d'une unité,

la valeur de $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ sera comprise entre $\frac{\delta}{b}$ et $\frac{\delta+1}{b}$; de sorte que chacune des fractions $\frac{\delta}{b}$, $\frac{\delta+1}{b}$, exprimera la racine $m^{\text{ième}}$ de $\frac{a}{b}$ à moins de $\frac{1}{b}$ d'unité.

EXEMPLE. Calculer la racine cinquième de $\frac{401}{3}$.

La formule (1) donne

$$\sqrt[5]{\frac{401}{3}} = \frac{\sqrt[5]{401 \times 3^4}}{3} = \frac{\sqrt[5]{32481}}{3}.$$

Le nombre 32481 tombant entre 16807 et 32768, c'est-à-dire entre 7^5 et 8^5 (page 248), la racine cherchée est $\frac{7}{3}$ à moins de $\frac{1}{3}$ d'unité.

Pour évaluer en décimales la racine $m^{\text{ième}}$ d'une fraction $\frac{a}{b}$, on prend la racine $m^{\text{ième}}$ du quotient de a par b , en ayant soin de calculer m fois plus de décimales au quotient qu'on ne veut en obtenir à la racine.

EXEMPLE. Déterminer la racine cinquième de $\frac{11113}{11}$ à moins d'un centième d'unité, c'est-à-dire avec deux décimales.

On cherche d'abord le quotient de 11113 par 11, avec 5 fois 2 ou 10 décimales; ce qui donne 1010,2727272727. On calcule la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[5]{10102727272727}$, qui est 398. Séparant deux décimales, la racine demandée est 3,98.

Pour trouver la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre $\frac{a}{b}$ à moins de $\frac{a}{c}$ d'unité, on pose

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{a}{c} x; \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[m]{\frac{ac^m}{bx^m}}.$$

On cherche la plus petite valeur entière approchée N du quotient de ac^m par bx^m , et on calcule la plus petite valeur entière approchée n de $\sqrt[m]{N}$. La racine demandée est $\frac{an}{c}$; car d'après les calculs indiqués, on a

$$x > n, \quad x < n + 1; \quad \text{donc} \quad \frac{a}{c} x > \frac{an}{c}, \quad \frac{a}{c} x < \frac{a(n+1)}{c},$$

$$\text{Or, } \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{a}{c} x; \quad \text{donc} \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} > \frac{an}{c}, \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} < \frac{an}{c} + \frac{a}{c}$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} \text{ est donc comprise entre } \frac{an}{c} \text{ et } \frac{an}{c} + \frac{a}{c}.$$

§ IV. Extraction des racines des quantités littérales.

136. L'extraction de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un monome a , n'offre aucune difficulté; car en désignant par c le coefficient numérique et par d la partie littérale, on a

$$a = cd, \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{d}.$$

On vient de donner le moyen d'extraire la racine $n^{\text{ième}}$ du nombre c , et l'on a vu (n° 112) comment on trouve la racine $n^{\text{ième}}$ du monome d .

En voici des exemples,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{262144a^{15}b^{12}c^3} &= \sqrt[3]{262144} \times \sqrt[3]{a^{15}b^{12}c^3} = 64a^5b^4c, \\ \sqrt[5]{243a^{15}b^5} &= 3a^3b \sqrt[5]{a^5}, \quad \sqrt[5]{6436343a^{10}b^5} = 23a^2b^5. \end{aligned}$$

137. La composition du développement de $(p + q)^m$ fournit le moyen de revenir d'une puissance quelconque d'un polynome à sa racine.

Nous supposons que tous les polynomes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre; de sorte que par *premier terme* d'un polynome, il faudra toujours entendre le terme de ce polynome qui renferme la plus forte puissance de cette lettre.

On serait conduit à des raisonnemens et à des calculs analogues, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre.

EXEMPLE. Soit proposé d'extraire la racine cubique de

$$33a^8 + 8a^6 - 36a^5 - 9a + 66a^4 - 63a^3 + 1.$$

On ordonne ce polynome par rapport aux puissances décroissantes de a , on dispose le calcul de la manière suivante:

$$\begin{array}{l|l}
 P = 8a^6 - 36a^5 + 66a^4 - 63a^3 + 33a^2 - 9a + 1 & 2a^3 - 3a + 1 = \sqrt[3]{P} \\
 R = P - (2a^3)^3 = -36a^5 + 66a^4 - 63a^3 + 33a^2 - 9a + 1 & \\
 R' = P - (2a^3 - 3a)^3 = 12a^4 - 36a^3 + 33a^2 - 9a + 1 & \begin{array}{l} \sqrt[3]{8a^6} = 2a^2, \text{ 1}^{\text{er}} \text{ terme de } \sqrt[3]{P} \\ 3(2a^3)^2 = 12a^4 \\ -\frac{36a^5}{12a^4} = -3a, \text{ 2}^{\text{e}} \text{ terme de } \sqrt[3]{P} \\ +\frac{12a^4}{12a^4} = +1, \text{ 3}^{\text{e}} \text{ terme de } \sqrt[3]{P}. \end{array} \\
 R'' = P - (2a^3 - 3a + 1)^3 = 0. &
 \end{array}$$

et on dit : le cube d'un polynome étant le produit de trois facteurs égaux à ce polynome, le 1^{er} terme $8a^6$ du cube, est le cube du 1^{er} terme p de la racine demandée (n° 19) ; le 1^{er} terme de cette racine est donc $\sqrt[3]{8a^6}$ ou $2a^2$; nommant r la somme des autres termes de la racine, le plus fort exposant de a dans r est moindre que 2, et en désignant par P le polynome proposé, on a $P = (2a^3 + r)^3$. Or,

$$(p + r)^3 = p^3 + 3p^2r + 3pr^2 + r^3 = p^3 + (3p^2 + 3pr + r^2) \times r.$$

Remplaçant p par $2a^3$, on voit que

$$P = 8a^6 + \{ 3(2a^3)^2 + 3(2a^3)r + r^2 \} \times r.$$

Retranchant $8a^6$ de P , le reste est

$$R = \{ 3(2a^3)^2 + 3(2a^3)r + r^2 \} \times r = -36a^5 + 66a^4 - \text{etc.}$$

Les exposants de a dans r étant moindres que 2, le terme affecté du plus fort exposant de a dans le facteur

$$3(2a^3)^2 + 3(2a^3)r + r^2, \text{ est } 3(2a^3)^2 \text{ ou } 12a^4.$$

Le 1^{er} terme, $-36a^5$ de R est donc le produit de $12a^4$ par le 1^{er} terme de r ; divisant donc $-36a^5$ par $12a^4$, le quotient $-3a$ exprime le 1^{er} terme de r , c'est-à-dire le 2^e terme de la racine demandée.

Pour trouver les autres termes, on retranche de P le cube de $2a^3 - 3a$; ce qui donne le 2^e reste

$$R' = P - (2a^3 - 3a)^3 = 12a^4 - 36a^3 + 33a^2 - 9a + 1.$$

Or, en regardant $2a^3 - 3a$ comme la 1^{re} partie de la racine cherchée, et r' comme la 2^e partie, on a

$P = (2a^3 - 3a + r')^3 = (2a^3 - 3a)^3 + 3(2a^3 - 3a)^2 r' + 3(2a^3 - 3a)r'^2 + r'^3$;
donc $R' = \{3(2a^3 - 3a)^2 + 3(2a^3 - 3a)r' + r'^2\} \times r' = 12a^4 - 36a^2 + \text{etc.}$

Le plus fort exposant de a dans r' étant moindre que 1, le 1^{er} terme $12a^4$ de R' exprime le produit de $3(2a^3)^2$ par le 1^{er} terme de r' ; divisant donc $12a^4$ par $3(2a^3)^2$, le quotient $+1$ est le 1^{er} terme de r' , c'est-à-dire le 3^e terme de la racine cherchée. Retranchant de P le cube de $2a^3 - 3a + 1$, le reste zéro indique que la racine demandée est $2a^3 - 3a + 1$.

138. Des raisonnemens analogues aux précédens fourniront le moyen d'*extraire la racine m^{ième} d'un polynome quelconque P*. En effet, soit $a + b + c + d + \text{etc.}$, le polynome P ordonné suivant les puissances décroissantes d'une lettre x , et désignons par $\alpha + \zeta + \gamma + \delta + \text{etc.}$, sa racine $m^{\text{ième}}$, ordonnée par rapport à la même lettre; on aura

$$(\alpha + \zeta + \gamma + \delta + \text{etc.})^m = a + b + c + d + \text{etc.}$$

Quand la $m^{\text{ième}}$ puissance de $\alpha + \zeta + \gamma + \delta + \text{etc.}$ sera développée et ordonnée suivant les puissances décroissantes de x , le *premier terme* de ce développement devra être identiquement égal à a ; le 2^e terme sera égal à b ; et ainsi de suite.

Pour trouver les termes α , ζ , γ , etc., de la racine, on dispose le calcul de la manière suivante:

$$\begin{array}{l|l} P = a + b + c + d + \text{etc.} & \sqrt[m]{a + \frac{b}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}} + \text{etc.}} \\ \hline -a & \\ \hline 1^{\text{er}} \text{ reste } R_1 = b + c + d + \text{etc.} = ma^{m-1} \times \zeta + \text{etc.} & \\ 2^{\text{e}} \text{ reste } R_2 = P - (a + \zeta)^m = p + \text{etc.} = ma^{m-1} \gamma + \text{etc.} & \alpha = \sqrt[m]{a}, \zeta = \frac{b}{ma^{m-1}} = \frac{b}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}, \\ & \gamma = \frac{p}{ma^{m-1}}. \end{array}$$

La $m^{\text{ième}}$ puissance d'un polynome étant le produit de m facteurs égaux à ce polynome, il résulte du principe du n° 19, que le terme de cette puissance qui contient le plus fort exposant de la lettre, par rapport à laquelle on a ordonné, est la $m^{\text{ième}}$ puissance du 1^{er} terme de la racine.

D'après cette propriété, le premier terme a du polynome P exprimant la $m^{\text{ième}}$ puissance du premier terme a de la racine cherchée, on a

$$a = a^m, \text{ d'où } a = \sqrt[m]{a}.$$

On obtiendra donc le premier terme a de la racine demandée, en prenant la racine $m^{\text{ième}}$ du premier terme a du polynome proposé.

Pour trouver le 2^e terme c de la racine, on développe la $m^{\text{ième}}$ puissance de $a + c + \gamma + \delta + \text{etc.}$, en regardant $c + \gamma + \text{etc.}$ comme un seul terme; ce qui donne

$$a^m + ma^{m-1}(c + \gamma + \text{etc.}) + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}(c + \gamma + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$$

Ce polynome devant être identiquement égal à

$$a + b + c + d + \text{etc.},$$

si l'on retranche de part et d'autre de ces deux polynomes les quantités égales a^m, a , les restes

$$(1) \dots ma^{m-1}(c + \gamma + \text{etc.}) + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}(c + \gamma + \text{etc.})^2 + \text{etc.},$$

$$b + c + d + \text{etc.}$$

seront égaux. Le terme du polynome (1) qui contiendra la plus forte puissance de x , sera donc égal au 1^{er} terme b du reste $b + c + d + \text{etc.}$

Or, il est facile de voir que ce terme est $ma^{m-1}c$. En effet, d'après ce qui a été démontré précédemment, les termes affectés des plus forts exposans de x dans

$$(c + \gamma + \text{etc.}), (c + \gamma + \text{etc.})^2, \dots, (c + \gamma + \text{etc.})^n,$$

sont respectivement

$$c, \quad c^2, \dots, \quad c^n;$$

les termes qui renferment les plus forts exposans de x dans les produits

$$a^{m-1}(c + \gamma + \text{etc.}), a^{m-2}(c + \gamma + \text{etc.})^2, \dots, a^{m-n}(c + \gamma + \text{etc.})^n,$$

sont donc

$$\alpha^{m-1} \times \zeta, \quad \alpha^{m-2} \times \zeta^2, \dots, \alpha^{m-n} \times \zeta^n.$$

Tout se réduit donc à démontrer que l'exposant de x dans $\alpha^{m-1}\zeta$ est plus fort que dans $\alpha^{m-n}\zeta^n$. Cela deviendra évident si l'on observe que

$$\begin{aligned} \alpha^{m-1}\zeta &= \alpha^{m-n}\zeta \times \alpha^{n-1}, \\ \alpha^{m-n}\zeta^n &= \alpha^{m-n}\zeta \times \zeta^{n-1}; \end{aligned}$$

car l'exposant de x dans α étant plus fort que dans ζ , l'exposant de x dans α^{n-1} est plus grand que dans ζ^{n-1} .

Le terme du polynome (1) qui renferme la plus forte puissance de x est donc $m\alpha^{m-1}\zeta$. Ce terme devant être égal au 1^{er} terme b du 1^{er} reste $b + c + \text{etc.}$, on obtiendra le 2^e terme ζ de la racine demandée, en divisant b par $m\alpha^{m-1}$.

Ainsi, pour obtenir le 2^e terme de la racine $m^{i\text{ème}}$ du polynome $a + b + c + \text{etc.}$, il suffit de retrancher de ce poly-

nome la $m^{i\text{ème}}$ puissance a du 1^{er} terme $\sqrt[m]{a}$ de cette racine, et de diviser le 1^{er} terme b du reste $R_1 = b + c + \text{etc.}$, par

m fois la $(m-1)^{i\text{ème}}$ puissance du 1^{er} terme $\sqrt[m]{a}$ de la racine;

le quotient $\frac{b}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}$ exprime le 2^e terme ζ de la racine. De

sorte que

$$\alpha = \sqrt[m]{a}, \quad \zeta = \frac{b}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}.$$

Connaissant les deux premiers termes α , ζ de la racine, pour trouver le 3^e terme γ , on commencera par retrancher du polynome donné $a + b + c + \text{etc.}$, la $m^{i\text{ème}}$ puissance de $(\alpha + \zeta)$; cela donnera un 2^e reste R_2 . Soit p le 1^{er} terme de ce reste, c'est-à-dire le terme affecté de la plus forte puissance de x . Le reste R_2 sera égal à

$$(2) \dots m(\alpha + \zeta)^{m-1}(\gamma + \delta + \text{etc.}) + \frac{m(m-1)}{2}(\alpha + \zeta)^{m-2}(\gamma + \delta + \text{etc.})^2 + \text{etc.},$$

car en regardant $\alpha + \zeta$ comme le 1^{er} terme d'un binôme, et $\gamma + \delta + \text{etc.}$ comme le 2^e terme de ce binôme, la $m^{\text{ième}}$ puissance de $(\alpha + \zeta) + (\gamma + \delta + \text{etc.})$ devient

$$(\alpha + \zeta)^m + m(\alpha + \zeta)^{m-1}(\gamma + \delta + \text{etc.}) + \text{etc.},$$

et cette puissance est égale au polynome donné $a + b + c + \text{etc.}$

On prouvera, comme on l'a fait pour le polynome (1), que le terme affecté de la plus forte puissance de x dans la valeur (2) du 2^e reste R_2 , est $m\alpha^{m-1} \times \gamma$. Ce terme devant être égal au 1^{er} terme p du 2^e reste, on obtiendra le 3^e terme γ de la racine demandée, en divisant le 1^{er} terme p du 2^e reste, par m fois la $(m-1)^{\text{ième}}$ puissance du 1^{er} terme α de la racine.

Connaissant les trois premiers termes $\alpha + \zeta + \gamma$ de la racine $\alpha + \zeta + \gamma + \delta + \text{etc.}$, on trouvera le 4^e terme δ , en retranchant d'abord du polynome donné $a + b + c + \text{etc.}$, la $m^{\text{ième}}$ puissance de $\alpha + \zeta + \gamma$, et en divisant le 1^{er} terme du reste par $m\alpha^{m-1}$; et ainsi de suite.

On peut démontrer directement que lorsqu'on a trouvé plusieurs termes de la racine, le premier des termes suivants s'obtient en retranchant du polynome proposé la $m^{\text{ième}}$ puissance de la somme des termes déjà obtenus, et en divisant ensuite le 1^{er} terme du reste par m fois la $(m-1)^{\text{ième}}$ puissance du 1^{er} terme de la racine.

En effet; soit A la somme des termes qu'on a déjà obtenus à la racine, et B la somme des termes qui restent à trouver; le polynome donné $a + b + c + \text{etc.}$, sera égal à la $m^{\text{ième}}$ puissance de $A + B$, qui est

$$A^m + mA^{m-1}B + \frac{m(m-1)}{2}A^{m-2}B^2 + \text{etc.}$$

Retranchant A^m du polynome proposé P , on obtiendra un reste; le terme T de ce reste qui contiendra la plus forte puissance de x , sera nécessairement égal au terme du reste

$$mA^{m-1}B + \frac{m(m-1)}{2}A^{m-2}B^2 + \text{etc.},$$

qui renferme la plus forte puissance de x ; et il est facile de

voir que ce terme est le produit de $m\alpha^{m-1}$ par le 1^{er} terme de B. En effet; le 1^{er} terme de A étant α , si l'on désigne par ϵ le 1^{er} terme de B, il résulte du principe du n° 19, que les termes affectés des plus forts exposans de x dans les produits

$$A^{m-1} \times B, \quad A^{m-2} \times B^2, \dots, \quad A^{m-n} \times B^n, \dots$$

sont respectivement

$$\alpha^{m-1} \times \epsilon, \quad \alpha^{m-2} \times \epsilon^2, \quad \alpha^{m-n} \times \epsilon^n, \dots$$

Tout se réduit donc à faire voir que le plus fort exposant de x dans $\alpha^{m-1} \times \epsilon$ est plus grand que dans $\alpha^{m-n} \times \epsilon^n$. Cela deviendra évident, si l'on observe que

$$\begin{aligned} \alpha^{m-1} \times \epsilon &= \alpha^{m-n} \times \alpha^{n-1} \times \epsilon, \\ \alpha^{m-n} \times \epsilon^n &= \alpha^{m-n} \times \epsilon^{n-1} \times \epsilon, \end{aligned}$$

car l'exposant de x dans α étant plus grand que dans ϵ , l'exposant de x dans α^{n-1} est plus grand que dans ϵ^{n-1} . Ce qui démontre le principe énoncé.

139. On en déduit cette règle générale : *Pour extraire la racine $m^{i\text{ème}}$ d'un polynome P , ordonnez-le suivant les puissances décroissantes d'une lettre x . Concevez la racine ordonnée de la même manière, et disposez les calculs comme il a été indiqué (page 255). La racine $m^{i\text{ème}}$ du 1^{er} terme de P , sera le 1^{er} terme α de la racine demandée. Retranchiez α^m de P ; le 1^{er} terme du reste, divisé par $m\alpha^{m-1}$, donnera le 2^e terme ϵ de la racine cherchée. Retranchiez $(\alpha + \epsilon)^m$ de P ; le 1^{er} terme du reste que vous obtiendrez, divisé par $m\alpha^{m-1}$, fournira le 3^e terme γ de la racine. Et ainsi de suite.*

Dans tout le cours de ces opérations, s'il n'y a pas de faute de calcul, la $m^{i\text{ème}}$ puissance de la partie de la racine déjà obtenue, ajoutée au reste correspondant, fournira une somme égale au polynome P ; car chaque reste est égal au polynome proposé, diminué de la $m^{i\text{ème}}$ puissance de la somme des termes qu'on a obtenus à la racine.

EXEMPLE. Trouver la racine cinquième de

$$810x^7 + 32x^{13} - 240x^{13} - 243x^3 + 720x^{11} - 1080x^9.$$

On ordonne suivant les puissances décroissantes de x , et on effectue le calcul de la manière suivante :

$$\begin{array}{r|l}
 P = 32x^{15} - 240x^{13} + 720x^{11} - 1080x^9 + 810x^7 - 243x^5 & 2x^3 - 3x \\
 \hline
 1^{\text{er}} \text{ reste } R_1 = -240x^{13} + 720x^{11} - 1080x^9 + 810x^7 - 243x^5 & \\
 2^{\text{e}} \text{ reste } R_2 = P - (2x^3 - 3x)^5 = 0. &
 \end{array}$$

La racine cinquième du 1^{er} terme $32x^{15}$ du polynôme P , donne le 1^{er} terme $2x^3$ de la racine cherchée. Retranchant $(2x^3)^5$ ou $32x^{15}$ du polynôme proposé P , on obtient le 1^{er} reste $R_1 = -240x^{13} + \text{etc.}$; la division du 1^{er} terme $-240x^{13}$ de ce reste, par $5(2x)^4$ ou par $80x^4$, fournit le 2^e terme $-3x$ de la racine cherchée. On retranche de P la cinquième puissance de $2x^3 - 3x$; le reste R_2 étant zéro, on voit que $2x^3 - 3x$ exprime la racine cinquième du polynôme proposé.

On trouvera de même que la racine quatrième de

$$a^8 - \frac{3b^2}{c} a^7 + \frac{27b^4}{8c^2} a^6 - \frac{27b^6}{16c^3} a^5 + \frac{81b^8}{256c^4} a^4 \text{ est } a^2 - \frac{3b^2}{4c} a,$$

et que la racine sixième de

$$\begin{aligned}
 & x^{12} + 6x^{11} + 21x^{10} + 50x^9 + 90x^8 + 126x^7 \\
 & + 141x^6 + 126x^5 + 90x^4 + 50x^3 + 21x^2 + 6x + 1, \\
 & \text{est } x^2 + x + 1.
 \end{aligned}$$

140. Lorsqu'on parvient à un terme ω de la racine, tel que l'exposant de x dans ω^m est moindre que dans le dernier terme du polynôme donné P dont on cherche la racine $m^{\text{ième}}$, on est certain que la racine cherchée est *irrationnelle*, c'est-à-dire qu'elle ne peut être exprimée exactement par un nombre fini de termes; car d'après le principe du n° 19, la $m^{\text{ième}}$ puissance du dernier terme de la racine devant être égale au dernier terme du polynôme donné P , il en résulte qu'un polynôme P et sa racine $m^{\text{ième}}$ étant ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une lettre x , cette racine, lorsqu'elle est exacte, ne peut renfermer aucun exposant de x moindre que la $m^{\text{ième}}$ partie de l'exposant de x dans le dernier terme du polynôme proposé.

CHAPITRE V.

Proportions, Progressions, Fractions continues et Logarithmes.§ 1^{er}. Des Proportions géométriques.

141. LA théorie des proportions ayant été traitée complètement en Arithmétique, nous nous bornerons à faire voir combien l'emploi de l'Algèbre simplifie les démonstrations qui y sont relatives.

1°. Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; car la proportion

$$a : b :: c : d \text{ exprime que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

et en chassant les dénominateurs, cette égalité donne

$$a \times d = b \times c.$$

2°. Quand le produit de deux nombres est égal au produit de deux autres nombres, ces quatre nombres forment une proportion dans laquelle les deux facteurs d'un des produits sont les extrêmes, et les deux autres facteurs sont les moyens; car l'égalité $a \times d = b \times c$ donne

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \text{ d'où } a : b :: c : d.$$

3°. Le quatrième terme d'une proportion est égal au produit des moyens divisé par le premier terme; et chaque moyen s'obtient en divisant le produit des extrêmes par l'autre moyen; car la proportion

$$a : b :: c : d \text{ exprime que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

et cette équation donne

$$d = \frac{bc}{a}, \quad b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b}.$$

4°. La moyenne géométrique entre deux nombres est égale à la racine quarrée du produit de ces deux nombres; car en désignant par x la moyenne géométrique entre a et b , on a

$$a : x :: x : b; \text{ d'où } \frac{a}{x} = \frac{x}{b}, \quad x^2 = ab, \quad x = \sqrt{ab}.$$

5°. Il résulte de (2°) qu'on peut faire subir à une proportion toutes les transformations qui n'altèrent pas l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens.

Ainsi, l'égalité $a \times d = b \times c$,

fournit les huit proportions,

$$a : b :: c : d, \quad a : c :: b : d, \quad d : b :: c : a, \quad d : c :: b : a, \\ b : a :: d : c, \quad b : d :: a : c, \quad c : d :: a : b, \quad c : a :: d : b.$$

Les quatre premières proportions démontrent que si quatre nombres sont en proportion, ils le seront encore lorsqu'on transposera les moyens ou les extrêmes.

Les quatre autres proportions font voir qu'une proportion n'est pas troublée, quand on met les extrêmes à la place des moyens, et les moyens à la place des extrêmes.

La proportion $a : b :: c : d$ donnant

$$b : d :: a : c,$$

on voit que dans toute proportion, le rapport du 1^{er} conséquent au 2^e conséquent, est égal au rapport du 1^{er} antécédent au 2^e antécédent.

6°. On peut multiplier un extrême et un moyen par un même nombre, sans que la proportion cesse d'exister; car la propor-

tion $a : b :: c : d$, revient à $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; d'où

$$\frac{a}{b} = \frac{cm}{dm}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{bm}{dm},$$

et ces dernières égalités conduisent aux proportions

$$a : b :: cm : dm, a : c :: bm : dm.$$

7°. Quand deux proportions ont un rapport commun, les deux autres rapports forment une proportion; car les proportions $a : b :: c : d, a : b :: c' : d'$,

expriment que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{c'}{d'}$; d'où

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}; \text{ ce qui donne } c : d :: c' : d'.$$

8°. Lorsque deux proportions ont les mêmes antécédens ou les mêmes conséquens, les quatre autres termes forment une proportion; car les proportions

$$a : b :: c : d, a : b' :: c : d',$$

donnent $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{b'} = \frac{c}{d'}$; d'où

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{b'}{d'}, b : d :: b' : d',$$

et les proportions

$$a : b :: c : d, a' : b :: c' : d, \text{ donnent}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a'}{b} = \frac{c'}{d}; \text{ d'où } \frac{b}{d} = \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, a : c :: a' : c'.$$

9°. Le 1^{er} antécédent plus ou moins un certain nombre de fois son conséquent, est à ce conséquent, comme le 2^e antécédent plus ou moins le même nombre de fois son conséquent, est à ce conséquent; car la proportion

$$a : b :: c : d \text{ exprime que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

et cette équation donne successivement

$$\frac{a}{b} \pm n = \frac{c}{d} \pm n, \frac{a \pm nb}{b} = \frac{c \pm nd}{d}; \text{ d'où}$$

$$a \pm nb : b :: c \pm nd : d.$$

10°. Le 1^{er} antécédent plus ou moins un certain nombre de fois son conséquent, est au 2^e antécédent plus ou moins le même nombre de fois son conséquent, comme le 1^{er} conséquent est au 2^e conséquent, et comme le 1^{er} antécédent est au 2^e antécédent.

En effet; la proportion $a : b :: c : d$,

donne $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; d'où $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$.

On a vu (9°) que $\frac{a \pm nb}{b} = \frac{c \pm nd}{d}$.

Donc $\frac{a \pm nb}{b \pm nd} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$; et par suite

$$a \pm nb : c \pm nd :: b : d, \quad a \pm nb : c \pm nd :: a : c.$$

11°. Le 1^{er} antécédent plus un certain nombre de fois son conséquent, est au 2^e antécédent plus le même nombre de fois son conséquent, comme le 1^{er} antécédent moins un nombre quelconque de fois son conséquent, est au 2^e antécédent moins le même nombre de fois son conséquent; car la proportion

$a : b :: c : d$ donne $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; d'où

$$\frac{a}{b} + n = \frac{c}{d} + n, \quad \frac{a + nb}{b} = \frac{c + nd}{d}, \quad \frac{a + nb}{c + nd} = \frac{b}{d},$$

$$\frac{a}{b} - m = \frac{c}{d} - m, \quad \frac{a - mb}{b} = \frac{c - md}{d}, \quad \frac{a - mb}{c - md} = \frac{b}{d}.$$

Donc $\frac{a + nb}{c + nd} = \frac{a - mb}{c - md}$, $a + nb : c + nd :: a - mb : c - md$.

12°. Le 1^{er} antécédent plus ou moins un certain nombre de fois le 2^e antécédent, est au 1^{er} conséquent plus ou moins le même nombre de fois le 2^e conséquent, comme chaque antécédent est à son conséquent; car d'après (5°), la proportion

$$a : b :: c : d \text{ donne } a : c :: b : d,$$

et il résulte de (10°) que cette dernière proportion conduit à

$$a \pm nc : b \pm nd :: c : d :: a : b.$$

13°. *Le 1^{er} antécédent plus un certain nombre de fois le 2^e antécédent, est au 1^{er} conséquent plus le même nombre de fois le 2^e conséquent, comme le 1^{er} antécédent moins un nombre quelconque de fois le 2^e antécédent, est au 1^{er} conséquent moins le même nombre de fois le 2^e conséquent; car, d'après (5°), la proportion*

$$a : b :: c : d \text{ donne } a : c :: b : d,$$

et il résulte de (11°) que cette dernière proportion conduit à

$$a + nc : b + nd :: a - mc : b - md.$$

14°. *Dans une suite de rapports égaux, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent. En effet, soient*

$$a : b :: c : d :: c' : d'; \text{ on aura}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} = q; \text{ d'où } a = bq, c = dq, c' = d'q,$$

$$a + c + c' = bq + dq + d'q = (b + d + d')q; \frac{a + c + c'}{b + d + d'} = q = \frac{a}{b}.$$

Donc $a + c + c' : b + d + d' :: a : b.$

142. Si l'on fait $m = 1$, $n = 1$, dans (9°), (10°), (11°), (12°), (13°), il en résultera les propriétés suivantes :

1°. *Le 1^{er} antécédent plus ou moins son conséquent, est à ce conséquent, comme le 2^e antécédent plus ou moins son conséquent, est à ce conséquent.*

2°. *Le 1^{er} antécédent plus ou moins son conséquent, est au 2^e antécédent plus ou moins son conséquent, comme le 1^{er} conséquent est au 2^e conséquent, et comme le 1^{er} antécédent est au 2^e antécédent.*

3°. *La somme des deux premiers termes, est à la somme des deux autres, comme la différence des deux premiers termes est à la différence des deux autres.*

4°. *La somme ou la différence des antécédens, est à la somme ou à la différence des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent.*

5°. *La somme des antécédens est à la somme des consé-*

quens, comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens.

143. Lorsqu'on multiplie les termes de plusieurs proportions les uns par les autres et par ordre, les quatre produits forment une proportion. En effet, les proportions

$$a : b :: c : d, \quad a' : b' :: c' : d', \quad a'' : b'' :: c'' : d'',$$

expriment que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}, \quad \frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''}.$

Multipliant ces équations membre à membre, il vient

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''} = \frac{c}{d} \times \frac{c'}{d'} \times \frac{c''}{d''}, \quad \text{ou} \quad \frac{ad'a''}{bb'b''} = \frac{cc'c''}{dd'd''};$$

et cette dernière équation démontre que

$$ad'a'' : bb'b'' :: cc'c'' : dd'd''.$$

144. Les puissances et les racines semblables de quatre nombres en proportion, forment une nouvelle proportion; car

la proportion $a : b :: c : d$ donne $\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$

et cette équation conduit à

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}, \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}; \quad \text{d'où}$$

$$a^m : b^m :: c^m : d^m, \quad \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

145. PROBLÈME. Partager un nombre donné a en trois parties proportionnelles aux nombres donnés ζ, γ, δ .

1^{re} SOLUTION. Soient x, y et z , les trois parties demandées; leur somme devra être égale à a , et elles devront satisfaire aux proportions

$$x : y :: \zeta : \gamma, \quad x : z :: \zeta : \delta.$$

Ces proportions donnant

$$y = \frac{\gamma x}{\zeta}, \quad z = \frac{\delta x}{\zeta},$$

on voit que les inconnues x, y, z , dépendent des équations

$$x + y + z = a, \quad y = \frac{\gamma x}{c}, \quad z = \frac{\delta x}{c}.$$

Pour déterminer x, y et z , on substitue les valeurs $\frac{\gamma x}{c}$, $\frac{\delta x}{c}$, de y et z , dans la 1^{re} équation; ce qui donne

$$x + \frac{\gamma x}{c} + \frac{\delta x}{c} = a.$$

Chassant le dénominateur c , il vient

$$cx + \gamma x + \delta x = ac, \quad \text{ou} \quad (c + \gamma + \delta)x = ac.$$

On en déduit
$$x = \frac{ac}{c + \gamma + \delta}.$$

Substituant cette valeur de x dans celles de y et z , on trouve

$$y = \frac{a\gamma}{c + \gamma + \delta}, \quad z = \frac{a\delta}{c + \gamma + \delta}.$$

Ces valeurs de x, y, z , sont les mêmes que celles qu'on a obtenues (page 76); et en effet, pour trouver les gains x, y, z correspondans aux mises c, γ, δ , il suffit de partager le gain total a en parties proportionnelles aux mises c, γ, δ .

2^e SOLUTION. Les trois parties demandées devant être proportionnelles aux nombres c, γ, δ , si la 1^{re} est représentée par cx , la 2^e sera γx , la 3^e sera δx ; et la somme de ces trois parties devant être a , on aura

$$cx + \gamma x + \delta x = a; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a}{c + \gamma + \delta}.$$

Multipliant successivement cette valeur de x par c , par γ et par δ , les produits exprimeront les parties demandées.

§ II. Des Progressions.

146. Nous avons fait connaître en Arithmétique, les propriétés des progressions qui sont nécessaires pour établir la théorie des logarithmes. Mais, l'emploi de l'Algèbre devenant indis-

pensable, lorsqu'on veut résoudre les différens problèmes relatifs aux progressions, nous allons maintenant compléter cette théorie.

Des Progressions arithmétiques ou par différence.

147. La progression arithmétique est formée d'une suite de termes tels, qu'en retranchant de chaque terme celui qui le précède, on obtient une différence constante. Cette différence est la raison de la progression.

Désignant donc par a le 1^{er} terme et par d la raison, le 2^e terme sera $a + d$, le 3^e sera $a + 2d$, ..., et le $n^{\text{ième}}$ sera $a + (n - 1)d$. L'ensemble de ces termes s'écrit ainsi

$$\div a. (a + d). (a + 2d). (a + 3d). \text{etc.}$$

Suivant que la valeur de la raison, d , est positive ou négative, la progression est croissante ou décroissante.

Si l'on représente le nombre des termes par n , leur somme par s et le dernier terme par ω , on aura

$$(1) \dots \omega = a + (n - 1)d, \\ s = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + \{a + (n - 1)d\}.$$

La formule (1) fait voir qu'un terme d'un rang quelconque est égal au premier terme augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.

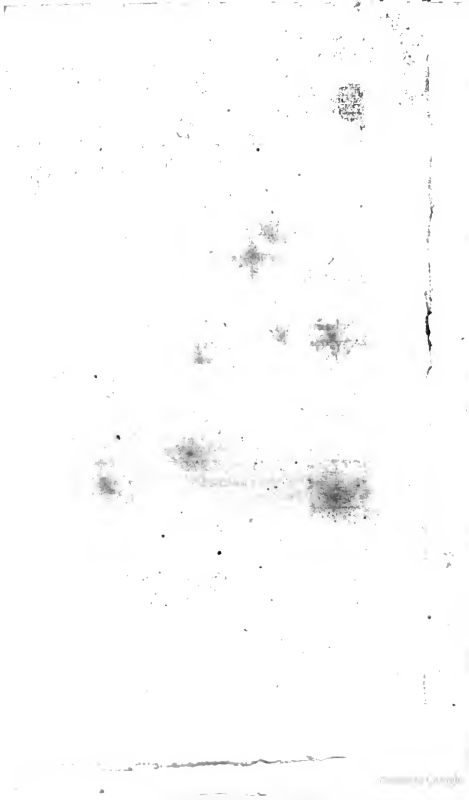
Il est facile d'obtenir une expression plus simple de s . En effet, la valeur de s peut se mettre sous les deux formes

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (\omega - 2d) + (\omega - d) + \omega, \\ s = \omega + (\omega - d) + (\omega - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a.$$

Ajoutant ces équations membre à membre, et observant que la somme de deux termes du même rang se réduit à $a + \omega$, on voit que $2s$ est égal à n fois $(a + \omega)$. De sorte que

$$(1) \dots \omega = a + (n - 1)d \quad \text{et} \quad (2) \dots s = \frac{1}{2} n(a + \omega).$$

148. Les équations (1), (2), donnent le moyen de résoudre ce problème général : Connaissant trois des cinq quantités a ,



Formules relatives aux progressions arithmétiques.

Données.	Inconnues.	VALEURS DES INCONNUES.
a, d, n	u, s	$u = a + (n-1)d, s = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}.$
s, d, n	a, u	$a = \frac{2s - n(n-1)d}{2n}, u = \frac{2s + n(n-1)d}{2n}.$
u, d, n	a, s	$a = u - (n-1)d, s = \frac{1}{2}n\{2u - (n-1)d\}.$
a, u, n	s, d	$s = \frac{1}{2}n(a + u), d = \frac{u - a}{n-1}.$
a, s, n	u, d	$u = \frac{2s}{n} - a, d = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}.$
u, s, n	a, d	$a = \frac{2s}{n} - u, d = \frac{2(ns - s)}{n(n-1)}.$
a, u, d	n, s	$n = \frac{u - a}{d} + 1, s = \frac{(u + a)(u - a + d)}{2d}.$
a, s, d	n, u	$n = \frac{(d - 2a) \pm \sqrt{(d - 2a)^2 + 8ds}}{2d}, u = a + (n-1)d.$
u, d, s	n, a	$n = \frac{(d + 2u) \pm \sqrt{(d + 2u)^2 - 8ds}}{2d}, a = u - (n-1)d.$
a, u, s	n, d	$n = \frac{2s}{a + u}, d = \frac{(u + a)(u - a)}{2s - (u + a)}.$

d, n, a, s , qui entrent dans une progression arithmétique, déterminer les deux autres.

Cette question fournit dix problèmes particuliers dont les solutions n'offrent aucune difficulté; car on a toujours deux équations pour déterminer les deux parties inconnues, et les équations à résoudre sont du premier ou du second degré. On ne peut admettre que les valeurs entières positives du nombre n des termes. Les formules relatives à ces problèmes sont réunies dans le tableau ci-joint.

1^{er} PROBLÈME. Insérer m moyens arithmétiques entre deux nombres donnés, a, s ; c'est-à-dire, placer m termes entre a et s , de manière que les $m + 2$ termes qui en résulteront forment une progression arithmétique.

Pour être en état de calculer ces moyens arithmétiques, il suffit de déterminer la raison d de la progression cherchée. Or, on connaît le 1^{er} terme a , le dernier terme s , et le nombre n des termes qui est égal à $m + 2$; la relation $s = a + (n - 1) d$ devient donc

$$s = a + (m + 1) d; \quad \text{d'où} \quad d = \frac{s - a}{m + 1}.$$

Cette formule démontre que pour obtenir la raison de la progression demandée, il suffit de prendre la différence entre les deux nombres donnés, et de diviser cette différence par le nombre des moyens arithmétiques augmenté de 1. (Arith., page 208.)

Il en résulte que si l'on insère successivement un même nombre de moyens arithmétiques entre le 1^{er} et le 2^e terme d'une progression arithmétique, entre le 2^e terme et 3^e, etc., l'ensemble de tous ces termes formera une nouvelle progression arithmétique; car en représentant par d la raison de la progression donnée et par m le nombre des moyens arithmétiques que l'on insère entre deux termes consécutifs quelconques de cette progression, la raison qui régnera entre les moyens arithmétiques que l'on insère sera constante et égale à $\frac{d}{m + 1}$. De sorte que l'ensemble de tous les termes ainsi formés déterminera une nouvelle progression arithmétique.

2^e PROBLÈME. *Connaissant, a, s et d , trouver n et ω .*

On élimine ω entre les équations

$$(1) \dots \omega = a + (n-1)d, \quad (2) \dots s = \frac{n}{2}(a + \omega),$$

ce qui conduit à l'équation du second degré

$$dn^2 + (2a-d)n = 2s. \quad \text{On en tire}$$

$$(3) \dots n = \frac{d-2a \pm \sqrt{(d-2a)^2 + 8ds}}{2d}.$$

La formule (3) fournit deux valeurs de n ; et la substitution de ces valeurs dans l'équation (1) donne les valeurs correspondantes de ω . Pour que le problème soit possible, il suffit et il faut que n soit un nombre entier positif.

1^{er} EXEMPLE. Soient $a = +9$, $d = -2$, $s = 21$.

La formule (3) donne $n = +3$, $n = +7$; les valeurs correspondantes de ω , déduites de l'équation (1), sont $+5$ et -3 ; ce qui détermine deux progressions.

Les termes de la première sont $+9$, $+7$, $+5$;
ceux de la seconde sont $+9$, $+7$, $+5$, $+3$, $+1$, -1 , -3 .

2^e EXEMPLE. Soient $a = 3$, $d = 2$, $s = 24$.

On trouvera $n = 4$, $n = -6$.

La seule progression qui satisfasse à la question est donc

$$\div 3. 5. 7. 9.$$

3^e PROBLÈME. *Connaissant ω, s, d , trouver n et a .*

L'équation (1) donne $a = \omega - (n-1)d$.

La substitution de cette valeur de a dans (2) conduit à

$$dn^2 - (d + 2\omega)n + 2s = 0; \quad \text{d'où}$$

$$n = \frac{d + 2\omega \pm \sqrt{(d + 2\omega)^2 - 8ds}}{2d}.$$

Cette formule déterminera les valeurs de n , et ensuite la subs-

titution de ces valeurs de n dans la relation $a = s - (n - 1)d$, fera connaître les valeurs correspondantes de a .

EXEMPLE. Soient $s = 9$, $d = 2$, $s = 21$.

On trouve $n = 3$, $n = 7$.

Les valeurs correspondantes de a sont $+5$ et -3 .

Cela fournit deux progressions arithmétiques qui satisfont à la question.

Les termes de la première sont $+5$, $+7$, $+9$;

ceux de la seconde sont -3 , -1 , $+1$, $+3$, $+5$, $+7$, $+9$.

Des Progressions géométriques ou par quotient.

149. La progression géométrique ou par quotient est formée d'une suite de termes tels, qu'en divisant chaque terme par celui qui le précède, le quotient reste constant; ce quotient est la raison de la progression.

Désignant donc par a le 1^{er} terme et par q la raison, le 2^e terme sera aq , le 3^e sera aq^2 , ..., et le $n^{\text{ième}}$ sera aq^{n-1} . L'ensemble de ces termes s'écrit ainsi

$$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \text{etc.}$$

Suivant que la raison q est plus grande ou plus petite que l'unité, la progression est croissante ou décroissante.

Si l'on représente le nombre des termes par n , leur somme par s , et le dernier terme par a , on aura

$$(1) \dots a = aq^{n-1}, (3) \dots s = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}.$$

La formule (1) fait voir qu'un terme quelconqué s'obtient en multipliant le premier terme par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent.

Il est facile d'obtenir une valeur plus simple de s ; car la relation (3) donne

$$s = a + q(a + aq + \dots + aq^{n-3} + aq^{n-2}),$$

et d'ailleurs $a + aq + \dots + aq^{n-3} + aq^{n-2} = s - aq^{n-1}$;

donc $s = a + q(s - aq^{n-1})$.

Cette dernière équation conduit à

$$(2) \dots s = \frac{a(q^n - 1)}{(q - 1)}.$$

150. Les équations (1) et (2) fournissent la solution de ce problème général : *Connaissant trois des cinq quantités a, q, n, u, s , qui entrent dans une progression géométrique, déterminer les deux autres*. Cela conduit aux dix questions suivantes, analogues à celles du n° 148.

1^{er} PROBLÈME. *Connaissant a, q, n , trouver u et s .*

Les formules

$$(1) \dots u = aq^{n-1}, \quad (2) \dots s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1},$$

donnent les valeurs des inconnues u et s .

2^e PROBLÈME. *Connaissant s, q, n , trouver a et u .*

L'équation (2), qui ne renferme que la seule inconnue a , fournit la valeur de a ; cette valeur substituée dans l'équation (1), conduit à la valeur de u . On trouve ainsi,

$$(3) \dots a = \frac{s(q - 1)}{q^n - 1}, \quad (4) \dots u = \frac{s(q - 1)q^{n-1}}{(q^n - 1)}.$$

3^e PROBLÈME. *Connaissant u, q et n , trouver s et a .*

La formule (1) détermine a ; et la substitution de cette valeur de a dans (2), donne s . On trouve...

$$(5) \dots a = \frac{u}{q^{n-1}}, \quad (6) \dots s = \frac{(q^n - 1)u}{(q - 1)q^{n-1}}.$$

4^e PROBLÈME. *Connaissant a, u et n , déterminer q et s .*

L'équation (1) donne (7)..... $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$.

Cette valeur de q substituée dans (2), déterminerait s . Mais on peut abréger ce calcul; car l'équation (1) donnant $uq = aq^n$, la formule (2) devient $s(q - 1) = uq - a$.

Mettant la valeur (7) de q , dans cette dernière équation, et

multipliant ensuite les deux membres par $\sqrt[n-1]{a}$, on trouve

$$\left(\sqrt[n-1]{s} - \sqrt[n-1]{a}\right)s = s\sqrt[n-1]{s} - a\sqrt[n-1]{a}; \text{ d'où (8)... } s = \frac{s\sqrt[n-1]{s} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{s} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

La formule (7) donne le moyen d'insérer m moyens géométriques entre deux nombres donnés a, s , car il suffit de trouver la raison q d'une progression géométrique dont le 1^{er} terme est a , dont le dernier terme est s , et dont le nombre n des

termes est $m + 2$. La relation $q = \sqrt[n-1]{\frac{s}{a}}$ devient $q = \sqrt[m+1]{\frac{s}{a}}$.

Par conséquent : Pour obtenir la raison de la progression demandée, il suffit de calculer le quotient des deux nombres donnés, divisés l'un par l'autre, et d'extraire de ce quotient la racine du degré marqué par le nombre des moyens géométriques augmenté d'une unité.

Il en résulte que, si l'on insère successivement un même nombre de moyens géométriques entre le 1^{er} et le 2^e terme d'une progression géométrique, entre le 2^e et le 3^e terme, etc., l'ensemble de tous ces termes forme une nouvelle progression géométrique; car en désignant par q la raison de la progression donnée et par m le nombre des moyens géométriques que l'on insère entre deux termes consécutifs quelconques de cette progression, la raison qui régnera entre les moyens géométriques sera constante et égale à $\sqrt[m+1]{q}$. De sorte que l'ensemble de tous les termes ainsi formés déterminera une nouvelle progression géométrique.

5^e PROBLÈME. Connaissant a, s, n , trouver q et s .

L'équation (2)... $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$

ne renfermant que la seule inconnue q , il paraîtrait naturel d'en faire usage pour trouver q . Mais, on obtiendrait ainsi une valeur de q étrangère à la question. En effet, l'équation (2) re-

vient à

$$(3) \dots s(q-1) = a(q^n - 1).$$

On satisfait à cette dernière équation en posant $q=1$; chacun des n termes de la progression se réduit à a ; de sorte que la somme s de ces n termes devient égale à an . La valeur $q=1$ ne satisfait donc à la question que dans le cas particulier où $s=an$.

Lorsque s n'est pas égal à an , la valeur $q=1$ déduite de (3), ne convient pas. Pour concevoir comment cette valeur étrange de q a été introduite, on observe que la formule (3) peut se déduire de la relation primitive

$$s = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}),$$

en multipliant les deux membres par $q-1$; car d'après la formule (1), (page 33), le polynome $q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1$, exprimant le quotient de $q^n - 1$ par $q - 1$, la multiplication indiquée conduit à

$$s(q-1) = a(q^n - 1).$$

Or, en multipliant les deux membres par $q-1$, on introduit nécessairement la valeur $q=1$, qui réduit $q-1$ à zéro. L'équation qui ne détermine que les valeurs convenables de q , est donc

$$s = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

Pour la résoudre, on la met sous la forme

$$(4) \dots q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q = \frac{s}{a} - 1.$$

Lorsqu'on aura trouvé q , au moyen de l'équation (4), les valeurs correspondantes de s se déduiront de la relation $s = aq^{n-1}$.

L'équation (4) étant du $(n-1)^{\text{me}}$ degré, les méthodes qui ont été exposées jusqu'ici ne donnent le moyen de la résoudre que lorsque n est égal à 2 ou à 3.

EXEMPLE. Soient, $a=5$, $s=35$, $n=3$.

L'équation (4) devient $q^2 + q = 6$; d'où $q=2$, $q=-3$.

Les valeurs correspondantes de s , déduites de la relation $s = aq^{n-1}$, sont $+20$ et $+45$; ce qui détermine les deux pro-

gressions

$$\div 5 : 10 : 20, \quad \div 5 : -15 : +45.$$

6^e PROBLÈME. Connaissant u , s , n , trouver q et a .Pour déterminer q , on pourrait éliminer a entre les équations

$$u = aq^{n-1}, \quad s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1};$$

ce qui conduirait à l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(s - u)q^n - sq^{n-1} + u = 0.$$

Mais, d'après ce qu'on a vu dans la question précédente, cette dernière équation admettrait la valeur étrangère $q = 1$. Pour obtenir l'équation qui ne renferme que les valeurs convenables de q , on élimine a entre les équations

$$u = aq^{n-1}, \quad s = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}),$$

ce qui fournit l'équation du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré

$$(5) \dots (s - u)q^{n-1} - u(q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q^2 + q + 1) = 0.$$

Lorsque n sera égal à 2 ou à 3, on pourra tirer q de l'équation (5), et ensuite la relation $u = aq^{n-1}$ fournira les valeurs correspondantes de a .

EXEMPLE. Soient, $u = 20$, $s = 35$, $n = 3$.

L'équation (5) devient

$$15q^2 - 20(q + 1) = 0, \quad \text{ou} \quad 3q^2 - 4q - 4 = 0.$$

On en tire $q = 2$, $q = -\frac{2}{3}$.

Les valeurs correspondantes de a , déduites de $u = aq^{n-1}$, sont $+5$ et $+\frac{45}{8}$.

Cela fournit les deux progressions

$$\div 5 : 10 : 20, \quad \div +45 : 30 : +20.$$

Nous avons supposé dans les six problèmes précédens que le nombre n des termes était donné.

Lorsque n est inconnu, les équations

$$(1) \dots s = aq^{n-1}, \quad (2) \dots s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1},$$

conduisent à une équation de la forme $a^n = C$, dans laquelle a et C sont des nombres connus. Pour résoudre cette équation, il suffit de prendre les logarithmes des deux membres; car d'après ce qui a été démontré (*Arithmétique*, page 213, 4^o), le logarithme de a^n étant égal à n fois le logarithme de a , on aura

$$n \times \log a = \log C, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log C}{\log a}.$$

7^e PROBLÈME. Connaissant s , a et q , trouver s et n .

La relation (1) donne $aq = aq^n$; la substitution de cette valeur de aq^n dans (2), conduit à

$$s = \frac{aq - a}{q - 1}.$$

Cette formule détermine s en fonction des données a , q .

Pour calculer n , on tire de (1)

$$q^{n-1} = \frac{s}{a}.$$

On prend les logarithmes des deux membres de cette équation, ce qui conduit à

$$(n - 1) \times \log q = \log s - \log a;$$

car on a démontré (*Arithmétique*, page 213, 2^o) que

$$\log \left(\frac{s}{a} \right) = \log s - \log a.$$

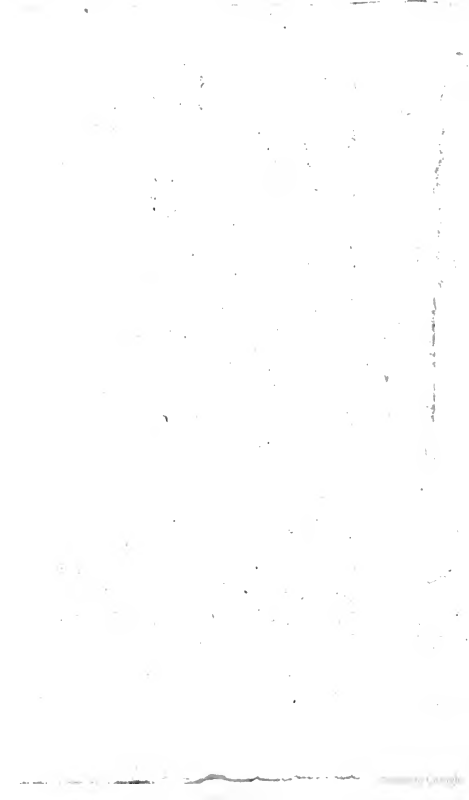
On en déduit

$$n - 1 = \frac{\log s - \log a}{\log q}, \quad n = 1 + \frac{\log s - \log a}{\log q}.$$

8^e PROBLÈME. Connaissant q , s et a , trouver s et n .

L'équation $s = \frac{aq - a}{q - 1}$ donne

$$s = \frac{a + (q - 1)s}{q};$$



Formules relatives aux progressions géométriques.

Données.	Inconnues.	VALEURS DES INCONNUES.
a, q, n	u, s	$u = aq^{n-1}, s = \frac{a(q^n - 1)}{(q - 1)}$
s, q, n	a, u	$a = \frac{s(q - 1)}{q^n - 1}, u = \frac{s(q - 1)q^{n-1}}{q^n - 1}$
u, q, n	a, s	$a = \frac{u}{q^{n-1}}, s = \frac{(q^n - 1)u}{(q - 1)q^{n-1}}$
a, u, n	q, s	$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}, s = \frac{u \sqrt[n-1]{a} - a \sqrt[n-1]{u}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$
a, s, n	q, u	$q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1 = \frac{s}{a}, u = aq^{n-1}$
u, s, n	q, a	$(s - u)q^{n-1} - u(q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q^2 + q + 1) = 0, a = \frac{u}{q^{n-1}}$
a, u, q	s, n	$s = \frac{uq - a}{q - 1}, n = 1 + \frac{lu - la}{lq}$
a, s, q	u, n	$u = \frac{a + s(q - 1)}{q}, n = \frac{l(sq - s + a) - la}{lq}$
u, q, s	a, n	$a = uq - s(q - 1), n = 1 + \frac{l(u) - l(uq + s - sq)}{lq}$
a, u, s	q, n	$q = \frac{s - a}{s - u}, n = 1 + \frac{l(u) - l(a)}{l(s - a) - l(s - u)}$

substituant cette valeur de u dans $u = aq^{n-1}$, on parvient à

$$q^n = \frac{sq - s + a}{a}; \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log(sq - s + a) - \log a}{\log q}.$$

9^e PROBLÈME. *Connaissant u , q et s , trouver a et n .*

La relation $s = \frac{uq - a}{q - 1}$ donne

$$a = uq - s(q - 1);$$

substituant cette valeur de a dans $u = aq^{n-1}$, il vient

$$q^{n-1} = \frac{u}{uq + s - sq}, \quad \text{d'où} \quad n - 1 = \frac{\log u - \log(uq + s - sq)}{\log q}.$$

10^e PROBLÈME. *Connaissant u , a , s ; trouver q et n .*

La relation $s = \frac{uq - a}{q - 1}$ donne

$$q = \frac{s - a}{s - u};$$

mettant cette valeur de q dans $u = aq^{n-1}$, on parvient à

$$\left(\frac{s - a}{s - u}\right)^{n-1} = \frac{u}{a}; \quad \text{d'où} \quad (n - 1) \log \left(\frac{s - a}{s - u}\right) = \log \left(\frac{u}{a}\right),$$

$$n - 1 = \frac{\log u - \log a}{\log(s - a) - \log(s - u)}.$$

Les formules qui servent à résoudre les dix problèmes précédents, se trouvent réunies dans le *Tableau* ci-contre.

151. PROBLÈME. *Calculer la somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante prolongée à l'infini.*

La formule $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ revient à $s = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$; d'où

$$(1) \dots s = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

La progression étant décroissante, la raison q est moindre que l'unité. Lorsque, a et q ne changeant pas, n augmente indéfiniment, q^n et $\frac{aq^n}{1 - q}$ diminuent en approchant indéfiniment

de zéro (n° 120, 2°), la valeur de s approche indéfiniment de la constante $\frac{a}{1-q}$; de sorte qu'on peut toujours prendre assez de termes pour que leur somme diffère de cette constante d'une quantité moindre que toute grandeur donnée. Enfin, à la limite, quand la progression se prolonge à l'infini, n est infiniment grand, $\frac{aq^n}{1-q}$ se réduit à zéro, et la somme de tous les termes est rigoureusement égale à $\frac{a}{1-q}$.

La somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante prolongée à l'infini, est donc égale au premier terme de cette progression divisé par l'unité moins la raison.

On trouve de cette manière que la fraction décimale périodique 0,272727 etc., est égale à $\frac{27}{99}$; car elle est équivalente à la somme de tous les termes de la progression indéfinie

$$\frac{27}{100} : \frac{27}{100^2} : \frac{27}{100^3} : \frac{27}{100^4} : \text{etc.},$$

dans laquelle $a = \frac{27}{100}$, $q = \frac{1}{100}$; et par suite $s = \frac{27}{99}$.

§ III. Des Fractions continues.

152. On nomme FRACTION CONTINUE une expression composée d'un nombre entier et d'une fraction qui a pour numérateur un nombre entier, et pour dénominateur un nombre entier plus une fraction; et ainsi de suite.

Nous ne considérerons ici que des fractions continues de la forme particulière

$$(1) \dots q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \text{etc.},$$

dans lesquelles $q, q', q'', \text{etc.}$, désigneront des nombres entiers positifs.

Les quantités $q, q + \frac{1}{q'}, q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''}$, etc., peuvent se mettre sous la forme de fractions ordinaires. En effet :

$$q = \frac{q}{1}, \quad q + \frac{1}{q'} = \frac{qq' + 1}{q'}.$$

Changeant dans la dernière égalité, q' en $q' + \frac{1}{q''}$, et multipliant les deux termes de la fraction qui en résulte par q'' , on trouve

$$q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} = \frac{(qq' + 1)q'' + q}{q'q'' + 1};$$

et ainsi de suite.

Les fractions ordinaires

$$\frac{q}{1}, \frac{qq' + 1}{q'}, \frac{(qq' + 1) \times q'' + q}{q' \times q'' + 1}, \text{ etc.},$$

ont reçu le nom de *fractions convergentes* ou de *réduites*, parce qu'elles *approchent* de plus en plus de la valeur de la fraction continue totale, et qu'elles sont *réduites* à leurs plus simples expressions (n^{os} 155 et 157).

Les nombres entiers $q, q', q'',$ etc., sont les *quotiens incomplets*; on verra (n^o 161) la raison de cette dénomination.

153. La comparaison des trois premières réduites conduit, par analogie, à cette règle générale :

Pour obtenir les réduites successives qui correspondent à la fraction continue (1), écrivez les quotiens incomplets $q', q'', q''',$ etc., par ordre, sur une ligne horizontale; calculez les deux premières réduites $\frac{q}{1}, \frac{qq' + 1}{q'}$; posez-les sous q' et q'' ; multipliez les deux termes de la 2^e réduite par q'' ; les produits, augmentés respectivement des deux termes de la 1^{re} réduite, donneront le numérateur et le dénominateur de la 3^e réduite. Pour obtenir la 4^e réduite, multipliez les deux termes de la 3^e par q''' ; les produits augmentés respectivement des deux termes de la 2^e réduite, donneront le numérateur et le dénominateur de la 4^e ré-

duite. Posez la 4^e réduite sous q^{14} ; la 5^e réduite se déduira de même des deux précédentes. Et ainsi de suite.

Cette loi ayant été vérifiée pour les trois premières réduites, il suffit de faire voir que, si elle a lieu pour trois réduites successives $\frac{C}{a}$, $\frac{C'}{a'}$, $\frac{C''}{a''}$, la réduite suivante $\frac{C'''}{a'''}$, se déduira des deux précédentes d'après la même loi.

Soient γ , γ' , γ'' , les derniers quotiens incomplets contenus dans les réduites $\frac{C'}{a'}$, $\frac{C''}{a''}$, $\frac{C'''}{a'''}$; il faut prouver que, si

$$(2) \dots \frac{C''}{a''} = \frac{C'\gamma' + C}{a'\gamma' + a}, \quad \text{on aura} \quad (3) \dots \frac{C'''}{a'''} = \frac{C''\gamma'' + C'}{a''\gamma'' + a'}.$$

Or, on obtient $\frac{C'''}{a'''}$ en remplaçant dans (2), γ' par $\gamma' + \frac{1}{\gamma''}$; et par hypothèse $C'' = C'\gamma' + C$, $a'' = a'\gamma' + a$.

Effectuant ce changement dans (2), et multipliant les deux termes de la fraction qui en résulte par γ'' , on trouve

$$\frac{C''}{a''} = \frac{(C'\gamma' + C)\gamma'' + C'}{(a'\gamma' + a)\gamma'' + a'} = \frac{C''\gamma'' + C'}{a''\gamma'' + a'}.$$

La formule (3) n'est donc qu'une conséquence de la formule (2). Ce qui démontre le principe énoncé.

154. Les relations $C'' = C'\gamma' + C$, $a'' = a'\gamma' + a$, font voir que les numérateurs et les dénominateurs des réduites successives sont d'autant plus grands que ces réduites sont plus éloignées de la première.

REMARQUE. La quantité positive γ' n'étant jamais moindre que l'unité, on voit que C'' ne peut être moindre que $C' + C$, et que a'' n'est jamais moindre que $a' + a$. Par conséquent, lorsque la fraction continue se prolonge indéfiniment, il est toujours possible de trouver une réduite assez éloignée de la première, pour que son numérateur et son dénominateur soient aussi grands qu'on voudra.

155. Les réduites successives sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction continue totale; elles en approchent de plus en plus. En effet, soient

$$x = q + \frac{1}{q'} + \dots + \frac{1}{y'} + \frac{1}{y''} + \text{etc.}, \quad \text{et} \quad \frac{c''}{a''} = q + \frac{1}{q'} + \dots + \frac{1}{y'}.$$

On voit que, pour déduire x de $\frac{c''}{a''}$, il suffit de changer y' en $y' + \frac{1}{y''} + \text{etc.}$ dans la valeur de $\frac{c''}{a''}$; posant donc

$$y' + \frac{1}{y''} + \text{etc.} = y,$$

on obtiendra x en changeant y' en y dans l'expression $\frac{c'y' + c}{a'y' + a}$ de $\frac{c''}{a''}$; ce qui donnera

$$(4) \dots x = \frac{c'y + c}{a'y + a}, \quad \text{et} \quad y > 1.$$

L'équation (4) exprime la relation qui existe entre la fraction continue totale x et les termes de deux réduites consécutives quelconques $\frac{c}{a}$, $\frac{c'}{a'}$. Pour comparer les grandeurs de ces fractions, on met en évidence les différences entre x et chacun des réduites. Or, (4) donne

$$a'xy + ax = c'y + c, \quad y(a'x - c') = c - ax,$$

$$(5) \dots a'y \left(x - \frac{c'}{a'} \right) = a \left(\frac{c}{a} - x \right).$$

$a'y$ et a étant positifs, la relation (5) démontre que les différences $x - \frac{c'}{a'}$, $\frac{c}{a} - x$, sont toujours de même signe; la valeur de la fraction continue totale x est donc comprise entre deux réduites consécutives quelconques $\frac{c}{a}$, $\frac{c'}{a'}$.

Par exemple, si $\frac{c}{a} > x$, il faudra que $\frac{c'}{a'} < x$.

La formule (5) prouve en outre que la réduite $\frac{c'}{a'}$ approche plus de la fraction continue totale x , que la réduite précé-

dente $\frac{c}{a}$; c'est-à-dire que

$$x - \frac{c'}{a'} < \frac{c}{a} - x,$$

car les inégalités $a' > a$, $y > 1$, donnant

$$a'y > a,$$

la relation (5) exige que le multiplicateur $x - \frac{c'}{a'}$ de $a'y$ soit moindre que le multiplicateur $\frac{c}{a} - x$ de a .

REMARQUE. La 1^{re} réduite $\frac{q}{1}$ étant moindre que la fraction continue totale x , les réduites de rang impair sont trop petites et les réduites de rang pair sont trop grandes; et d'ailleurs comme elles approchent de plus en plus de x , les réduites de rang impair vont en augmentant, tandis que celles de rang pair vont en diminuant.

156. La différence entre deux réduites consécutives quelconques $\frac{c}{a}$, $\frac{c'}{a'}$, est une fraction ordinaire qui a l'unité pour numérateur.

En effet, lorsque $\frac{c}{a}$ est de rang pair, on a

$$\frac{c}{a} > x, \frac{c'}{a'} < x, \frac{c''}{a''} > x; \text{ donc } \frac{c}{a} > \frac{c'}{a'} \text{ et } \frac{c''}{a''} > \frac{c'}{a'}.$$

La formule (2), (page 280), donne

$$\frac{c''}{a''} - \frac{c'}{a'} = \frac{c'y' + c}{a'y' + a} - \frac{c'}{a'} = \frac{a'c - ac'}{(a'y' + a)a'}; \text{ or, } \frac{c}{a} - \frac{c'}{a'} = \frac{a'c - ac'}{aa'}.$$

Les différences entre les réduites consécutives ont donc des numérateurs égaux. Mais, la différence $\frac{1}{q}$ entre les deux premières réduites, a l'unité pour numérateur; le principe est donc démontré. Par conséquent, $a'c - ac' = 1$.

157. Les fractions convergentes, formées d'après la règle du

n° 153, sont irréductibles; car si elles ne l'étaient pas, il existerait un facteur commun δ entre les deux termes α , ζ d'une réduite $\frac{\zeta}{\alpha}$; or, $\alpha'\zeta - \alpha\zeta' = 1$; δ diviserait le premier membre $\alpha'\zeta - \alpha\zeta'$; δ devrait donc diviser le second membre 1; ce qui n'est pas possible.

158. Lorsqu'on prend une réduite au lieu de la fraction continue totale, l'erreur est moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de cette réduite.

En effet, la valeur de la fraction continue totale x étant comprise entre deux réduites consécutives quelconques $\frac{\zeta}{\alpha}$, $\frac{\zeta'}{\alpha'}$, l'erreur ϵ , commise en prenant $\frac{\zeta}{\alpha}$ au lieu de x , est moindre que la différence $\frac{1}{\alpha\alpha'}$ entre ces réduites.

$$\text{Or, } \frac{1}{\alpha^2} > \frac{1}{\alpha\alpha'}, \text{ car } \alpha' > \alpha; \text{ donc } \epsilon < \frac{1}{\alpha^2}.$$

159. Pour obtenir la valeur d'une fraction continue, à moins de $\frac{\gamma}{\delta}$ d'unité, il suffit de prendre une réduite telle que son dénominateur soit plus grand que la racine carrée de $\frac{\delta}{\gamma}$; car l'erreur commise en prenant la réduite $\frac{\zeta}{\alpha}$ au lieu de la fraction continue totale, étant moindre que $\frac{1}{\alpha^2}$, il ne s'agit que de satisfaire à l'inégalité $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{1}{\alpha^2}$; d'où $\alpha > \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$.

Pour remplir cette dernière condition, on continue les calculs du n° 153, jusqu'à ce qu'on parvienne à une réduite dont le dénominateur α surpasse la plus petite valeur entière approchée de la racine carrée de $\frac{\delta}{\gamma}$.

REMARQUE. Lorsque la fraction continue se prolonge indéfini-

ment, on peut toujours calculer sa valeur avec autant d'exactitude qu'on veut; car il résulte de la remarque du n° 154, qu'on parviendra toujours à une réduite dont le dénominateur sera plus grand que la racine quarrée de $\frac{\delta}{\gamma}$.

*160. Une réduite quelconque $\frac{c'}{a'}$ exprime la valeur de la fraction continue totale x , plus exactement que toute fraction $\frac{b}{a}$ dont le dénominateur serait moindre que a' .

Cette propriété ayant été démontrée (n° 155) quand $\frac{b}{a}$ est une des réduites, il suffit de considérer le cas où $\frac{b}{a}$ n'est pas une des réduites.

Soit $\frac{c}{a}$ la réduite qui précède $\frac{c'}{a'}$; et supposons

$$a < a', \quad \frac{c}{a} > \frac{c'}{a'} \quad (*).$$

Je dis d'abord que la valeur de $\frac{b}{a}$ ne peut tomber entre $\frac{c}{a}$ et $\frac{c'}{a'}$; car si elle y tombait, on aurait

$$\frac{c}{a} - \frac{b}{a} < \frac{c}{a} - \frac{c'}{a'}; \quad \text{d'où} \quad \frac{ac - ba}{aa} < \frac{ac' - ac'}{aa'}.$$

Or, $ac' - ac' = 1$ (n° 156); donc

$$\frac{ac - ba}{aa} < \frac{1}{aa'}.$$

Cette dernière inégalité donne $ac - ba < \frac{a}{a'}$.

Or par hypothèse $\frac{a}{a'} < 1$; on aurait donc $ac - ba < 1$.

(*) On ferait des raisonnemens analogues si $\frac{c}{a} < \frac{c'}{a'}$.

Cette dernière inégalité ne peut subsister; car a , b , x et c étant des nombres entiers, il faudrait que l'on eût

$$ac - bx = 0, \text{ d'où } \frac{b}{a} = \frac{c}{x};$$

ce qui est contre l'hypothèse.

La fraction $\frac{b}{a}$ n'est donc jamais comprise entre $\frac{c}{a}$ et $\frac{c'}{a'}$.

On en déduit aisément que la réduite $\frac{c'}{a'}$ diffère moins de x que la fraction $\frac{b}{a}$.

En effet, soit toujours $\frac{c}{a} > \frac{c'}{a'}$;

on aura $x < \frac{c}{a}$, $x > \frac{c'}{a'}$.

La fraction $\frac{b}{a}$ ne pouvant pas tomber entre $\frac{c}{a}$ et $\frac{c'}{a'}$, il faut que $\frac{b}{a}$ soit moindre que $\frac{c'}{a'}$ ou plus grand que $\frac{c}{a}$.

1°. Si $\frac{b}{a} < \frac{c'}{a'}$, on aura

$$\frac{c}{a} > x, \quad x > \frac{c'}{a'}, \quad \frac{c'}{a'} > \frac{b}{a};$$

ce qui s'écrit ordinairement de cette manière abrégée,

$$\frac{c}{a} > x > \frac{c'}{a'} > \frac{b}{a}.$$

La relation $\frac{c'}{a'} > \frac{b}{a}$ donne

$$x - \frac{c'}{a'} < x - \frac{b}{a}.$$

2°. Si $\frac{b}{a} > \frac{c}{a}$, on aura

$$\frac{b}{a} > \frac{c}{a} > x > \frac{c'}{a'}.$$

La relation $\frac{b}{a} > \frac{c}{a}$ donne

$$\frac{b}{a} - x > \frac{c}{a} - x.$$

Or, on a vu (n° 155), que

$$x - \frac{c'}{a'} < \frac{c}{a} - x;$$

donc à plus forte raison,

$$x - \frac{c'}{a'} < \frac{b}{a} - x.$$

La différence entre $\frac{c'}{a'}$ et x est donc toujours moindre que la différence entre $\frac{b}{a}$ et x ; ce qui démontre la propriété énoncée.

161. *Pour exprimer une quantité quelconque x en fraction continue, calculez d'abord la plus petite valeur entière approchée q de x ; faites $x = q + \frac{1}{y}$; y sera plus grand que 1. Cherchez la plus petite valeur entière approchée q' de y , et posez $y = q' + \frac{1}{z}$. Déterminez la plus petite valeur entière approchée q'' de z ; et ainsi de suite. La valeur de x sera exprimée par la fraction continue (1) (page 278). Selon que x sera commensurable ou incommensurable, cette fraction continue se terminera ou ne se terminera pas.*

1^{er} EXEMPLE. Convertir une fraction ordinaire $\frac{b}{a}$ en fraction continue.

On divise b par a , ce qui fournit un quotient entier q et un reste $r < a$; q exprime la valeur entière approchée de $\frac{b}{a}$; et l'on a

$$\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a} = q + \frac{1}{y}; \text{ d'où } y = \frac{a}{r}, \quad y > 1.$$

Divisant a par r , on obtient un quotient entier q' et un reste $r' < r$; q' étant la plus petite valeur entière approchée de y , on a

$$y = \frac{a}{r} = q' + \frac{r'}{r} = q' + \frac{1}{z}; \text{ d'où } z = \frac{r}{r'}, \quad z > 1.$$

Continuant les calculs jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste nul, la fraction $\frac{b}{a}$ sera exprimée par la fraction continue (1) (page 278); et il est facile de voir que la fraction continue se terminera, car on arrive toujours à un reste nul.

Les *quotiens incomplets*, $q, q', q'',$ etc., sont les quotiens entiers successifs que l'on obtiendrait en cherchant le plus grand commun diviseur entre b et a .

1^{re} REMARQUE. Quand b et a sont premiers entre eux, la fraction $\frac{b}{a}$ est irréductible; les deux termes de la dernière réduite sont b et a . Lorsque b et a ont un facteur commun, la dernière fraction convergente est égale à la fraction $\frac{b}{a}$ réduite à sa plus simple expression, car les fractions convergentes sont irréductibles.

2^e REMARQUE. Lorsque les deux termes d'une fraction irréductible $\frac{b}{a}$ sont des nombres considérables, il est difficile de se former une idée de la grandeur de cette fraction. Pour obtenir des fractions plus simples, qui approchent de plus en plus de la valeur de $\frac{b}{a}$, on convertit $\frac{b}{a}$ en fraction continue, et on forme les réduites successives (n° 153). Ces réduites jouissent de la propriété demandée.

Soit la fraction irréductible $\frac{314159}{100000}$; la recherche du plus grand commun diviseur de ses deux termes donne les quotiens entiers successifs 3, 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4; on en déduit que les réduites sont

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{9208}{2931}, \frac{9563}{3044}, \frac{76149}{24239}, \frac{314159}{100000}.$$

D'après les propriétés du n° 155, les réduites de rang impair

$$\frac{3}{1}, \frac{333}{106}, \frac{9208}{2931}, \frac{76149}{24239},$$

sont moindres que la fraction donnée $\frac{314159}{100000}$, mais elles vont en augmentant, et s'en approchent de plus en plus.

Les réduites de rang pair

$$\frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \frac{9563}{3044},$$

sont plus grandes que la fraction donnée $\frac{314159}{100000}$, mais elles vont en diminuant et s'en approchent de plus en plus.

2° EXEMPLE. Exprimer la racine carrée de 101 en fraction continue.

La plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{101}$ étant 10, on fait

$$\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{y}; \text{ d'où}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{101} - 10} = \frac{1 \times (\sqrt{101} + 10)}{(\sqrt{101} - 10)(\sqrt{101} + 10)} = \frac{\sqrt{101} + 10}{101 - 100} = \sqrt{101} + 10.$$

$$\text{Or, } \sqrt{101} + 10 = 20 + \frac{1}{y}, \text{ car } \sqrt{101} = 10 + \frac{1}{y};$$

$$\text{donc } y = 20 + \frac{1}{y}.$$

Remplaçant successivement y par sa valeur $20 + \frac{1}{y}$, on

$$\text{trouvera } \sqrt{101} = 10 + \frac{1}{20 + \frac{1}{y}} = 10 + \frac{1}{20 + \frac{1}{20 + \frac{1}{y}}} \text{ etc.}$$

Tous les quotiens incomplets q', q'', q''' , etc., sont égaux à 20.

La fraction continue qui exprime $\sqrt{101}$ se prolonge indéfiniment, car $\sqrt{101}$ est incommensurable.

162. La méthode précédente fournit le moyen de *calculer la valeur de l'inconnue x dans les équations de la forme $a^x = c$, lorsque a et c sont des nombres connus.*

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation $8^x = 32$.

Pour trouver la plus petite valeur entière approchée de x , on donne successivement à x les valeurs 0, 1, 2, et l'on voit que x tombe entre 1 et 2. On pose donc

$$x = 1 + \frac{1}{y}; \text{ on sait que } y > 1.$$

Substituant cette valeur de x dans $8^x = 32$, on trouve

$$32 = 8^{1 + \frac{1}{y}} = 8 \times 8^{\frac{1}{y}}; \text{ d'où } 8^{\frac{1}{y}} = 4 \text{ et } 4y = 8.$$

Or $y > 1$, et $y = 2$ donne $4y = 8$; la valeur de y est donc comprise entre 1 et 2. On pose donc

$$y = 1 + \frac{1}{z}, \text{ et on sait que } z > 1.$$

Substituant cette valeur de y dans $4y = 8$, on trouve

$$8 = 4^{1 + \frac{1}{z}} = 4 \times 4^{\frac{1}{z}}; \text{ d'où } 4^{\frac{1}{z}} = 2 \text{ et } 2^z = 4.$$

La valeur $z = 2$ satisfaisant à l'équation $2^z = 4$, on a

$$y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad x = 1 + \frac{1}{y} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Et en effet,

$$8^{\frac{5}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = (2)^5 = 32.$$

En général, quand la valeur de x , qui satisfait à l'équation (1)... $a^x = c$, est plus grande que l'unité, la méthode précédente conduit à la valeur de x en fraction continue, et cette fraction sert à calculer x avec autant d'exactitude qu'on veut.

Quand a et c étant positifs, la valeur réelle de x n'est pas plus grande que l'unité, on ramène ce cas au précédent en transformant l'équation (1), en une autre $a^x = b$, dans laquelle z est plus grand que l'unité.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation $8^x = \frac{1}{32}$.

L'hypothèse $x = 0$, donnant une valeur trop forte de 8^x , on voit que x est moindre que zéro, c'est-à-dire que x est négatif, on pose donc $x = -z$. L'équation proposée devient

$$\frac{1}{32} = 8^{-z} = \frac{1}{8^z}; \text{ d'où } 8^z = 32.$$

Dans cette dernière équation, z étant plus grand que l'unité, on trouvera $z = \frac{5}{3}$; d'où $x = -\frac{5}{3}$.

2^e EXEMPLE. Soit l'équation $10^x = 3$.

La valeur $x = 0$, donne $10^x = 1$,
et $x = 1$, donne $10^x = 10$.

Le nombre 3 tombant entre 1 et 10, on voit que x est compris entre zéro et 1. Posant donc $x = \frac{1}{z}$, on est certain que z est plus grand que l'unité, et on a

$$3 = 10^x = 10^{\frac{1}{z}}; \text{ d'où } 3^z = 10.$$

Donnant à z les valeurs 2, 3, on voit que z tombe entre ces deux nombres; on pose donc

$$z = 2 + \frac{1}{y}.$$

Si l'on continue ces calculs, on trouvera que

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \text{etc.}$$

Pour obtenir la valeur de x à moins d'un millièmè d'unité, il faut calculer les réduites successives jusqu'à ce qu'on parvienne à une réduite $\frac{c}{a}$ telle que

$$a > \sqrt{1000}. \text{ Or } \sqrt{1000} = 31,6 \text{ etc.}$$

La réduite dont le dénominateur sera plus grand que 31 jouira donc de la propriété demandée; et comme les réduites successives, calculées d'après la règle du n° 153, sont $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{21}{44}$, etc., on prendra $x = \frac{21}{44}$. Cette valeur de x est trop forte, mais l'erreur est moindre qu'un millième d'unité; si on réduit $\frac{21}{44}$ en décimales, on trouvera $x = 0,4772$ etc.; et 0,477 exprime x à moins d'un millième d'unité, car si l'on diminuait 0,4772 etc., d'un millième d'unité, le résultat 0,4762 etc., serait trop faible. Mais il serait faux d'en conclure que la valeur exacte de x est comprise entre 0,477 et 0,476, car en poussant plus loin les calculs, on trouve $x = 0,4771$ etc.; de sorte que 0,477 est trop faible.

163. Quand a et ζ sont des nombres entiers positifs donnés, il est facile de découvrir si la valeur réelle de x qui satisfait à l'équation (1)... $x^a = \zeta$, est commensurable. En effet :

1°. Lorsque x a une valeur commensurable, on peut la représenter par $\frac{b}{a}$, b et a étant des nombres entiers premiers entre eux. L'équation (1) devient

$$\frac{b^a}{a^a} = \zeta; \text{ d'où } (2) \dots a^b = \zeta^a.$$

Tout facteur premier de a , divisera a^b ; il devra donc diviser ζ^a , ce qui exige qu'il divise ζ , (Arith., n° 47). Les facteurs premiers de ζ doivent donc être les mêmes que ceux de a .

Par conséquent, si p et q désignent les facteurs premiers de a (*), on aura nécessairement

$$a = p^m q^n, \quad \zeta = p^r q^s.$$

Substituant ces valeurs de a et ζ , l'équation (2) deviendra

(*) On suppose que a ne renferme que deux facteurs premiers p , q ; la démonstration serait la même pour tout autre nombre de facteurs.

$$p^{bm} \times q^{bn} = p^{ar} \times q^{as}.$$

Or, les facteurs premiers p , q , doivent se trouver le même nombre de fois dans chaque membre; car, par exemple, si l'on pouvait avoir $bm = ar + d$, il en résulterait

$$p^{ar+d} \times q^{bn} = p^{ar} q^{as}; \text{ d'où } p^d q^{bn} = q^{as};$$

le nombre premier p divisant $p^d q^{bn}$, devrait diviser q^{as} ; il diviserait donc q (Arith., n° 47); ce qui est impossible, puisque p et q sont deux nombres premiers.

Il faut donc que

$$bm = ar, \quad bn = as; \text{ d'où } \frac{b}{a} = \frac{r}{m} = \frac{s}{n}.$$

Les rapports $\frac{r}{m}$, $\frac{s}{n}$, doivent donc être égaux.

Ainsi, lorsque x est commensurable, les facteurs premiers de ζ sont les mêmes que ceux de a , et les rapports des exposans de ces facteurs sont égaux entre eux.

RÉCIPROQUEMENT, lorsque les facteurs premiers de a et ζ étant les mêmes, les rapports des exposans de ces facteurs sont égaux, x est commensurable et chacun de ces rapports exprime x , car en supposant

$$a = p^m q^n, \quad \zeta = p'^r q'^s, \quad x = \frac{r}{m} = \frac{s}{n},$$

on a

$$mx = r, \quad nx = s,$$

et la valeur $p^{mx} q^{nx}$ de a^x se réduit à $p'^r q'^s$, ou à ζ .

EXEMPLE. Soit l'équation $10^x = \zeta$.

Pour que x soit commensurable, il faut que ζ ne renferme que les facteurs premiers 2, 5, de 10, et qu'en outre $r = s$; d'où $\zeta = (2 \times 5)^r = 10^r$.

Le nombre ζ doit donc être une puissance entière positive ou négative de 10. Les seules valeurs de ζ qui fournissent des valeurs commensurables de x sont donc

$$1, 10, 100, 1000, \text{ etc.}, \quad \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \text{ etc.}$$

164. Les propriétés des fractions continues donnent le moyen de trouver toutes les solutions entières d'une équation

numérique du premier degré entre deux inconnues x et y .

En effet; lorsque l'équation proposée admet des valeurs entières de x et y , on peut toujours la ramener à l'une des formes

$$(1) \dots ax + by = c \quad (2) \dots ax - by = c,$$

$$(3) \dots -ax + by = c, \quad (4) \dots -ax - by = c,$$

a et b désignant des nombres entiers positifs premiers entre eux (n° 72). D'ailleurs, lorsqu'on connaît une solution entière de l'équation proposée, le principe du n° 73 fournit toutes les autres solutions entières; il suffit donc de trouver une de ces solutions. Pour y parvenir, on convertit la fraction irréductible $\frac{b}{a}$ en fraction continue, par la méthode du n° 161; on forme ensuite les réduites successives (n° 153); la dernière est $\frac{b}{a}$, et si $\frac{c}{a}$ désigne la réduite précédente, on a vu (n° 156) que $ac - ba = \pm 1$.

1°. Soit $ac - ba = 1$.

Pour ramener cette équation à l'une des formes (1), (2), (3), (4), on multiplie ses deux membres par c , ce qui donne

$$ac^2 - bca = c.$$

La comparaison de cette dernière équation avec l'équation (1), fait voir qu'on obtiendra une solution entière de l'équation (1) en posant $x = c$, $y = -ca$.

On verra de même que pour obtenir une solution entière des équations (2), (3), (4), il suffit de poser

$$\begin{array}{l} x = c \parallel x = -c \parallel x = -c \\ y = ca \parallel y = -ca \parallel y = +ca. \end{array}$$

2°. Soit $ac - ba = -1$, d'où $-ac^2 + bca = c$.

Il est facile de voir qu'on obtiendra une solution entière des équations (1), (2), (3), (4), en posant

$$\begin{array}{l} x = -c \parallel x = -c \parallel x = +c \parallel x = +c \\ y = +ca \parallel y = -ca \parallel y = +ca \parallel y = -ca. \end{array}$$

EXEMPLE. Soit l'équation $21x + 26y = 1000$.

En la comparant à l'équation (1), on a

$$a = 21, \quad b = 26, \quad c = 1000.$$

Si l'on convertit $\frac{26}{21}$ en fraction continue, on trouvera que

les réduites successives sont $\frac{1}{1}$, $\frac{5}{4}$ et $\frac{26}{21}$.

De sorte que $c = 5$, $a = 4$; d'où $ac - ba = 1$.

On obtiendra donc une solution entière de l'équation.....
 $21x + 26y = 1000$, en posant

$$x = ac = 5000, \quad y = -ca = -4000.$$

§ IV. Théorie algébrique des Logarithmes.

165. Nous avons vu en Arithmétique que pour former un système de logarithmes, il suffit de prendre deux progressions indéfinies, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro; et qu'au moyen de ces deux progressions, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, des termes de la progression géométrique, se réduisent à une addition, à une soustraction, à une multiplication, et à une division sur les termes correspondans de la progression arithmétique. Nous avons ensuite remarqué qu'en insérant assez de moyens proportionnels entre les termes des deux progressions primitives, on obtient deux nouvelles progressions dont les termes varient d'une manière presque insensible; et nous en avons conclu que ces abréviations de calcul étaient applicables à tous les nombres. Les termes de la progression arithmétique ont été nommés les LOGARITHMES des termes correspondans de la progression géométrique.

Il existe une analogie remarquable entre ces propriétés des logarithmes et les règles relatives aux exposans. Par exemple, dans la multiplication, le LOGARITHME du produit de deux nombres est égal à la somme des logarithmes de ces deux nombres, et de même l'EXPOSANT du produit de deux

puissances d'une même quantité est égal à la somme des exposans de ces puissances. Cette concordance entre les logarithmes et les exposans, a également lieu dans la division, l'élevation aux puissances, et l'extraction des racines.

166. On est donc conduit à chercher si l'on ne pourrait pas considérer les logarithmes comme des exposans.

A cet effet, nous reprendrons les progressions primitives.

$$\begin{array}{cccccccc} \div & 1 & : & 10 & : & 100 & : & 1000 & : & 10000 & : & 100000 & : & \dots \\ \div & 0 & . & 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & . & 5 & . & \dots \end{array}$$

qui ont servi à former le système de logarithmes tabulaires placé à la fin de l'Arithmétique; on voit de suite que ces progressions peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{array}{cccccccc} \div & 10^0 & : & 10^1 & : & 10^2 & : & 10^3 & : & 10^4 & : & 10^5 & : & \dots \\ & 0 & . & 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & . & 5 & . & \dots \end{array}$$

et par conséquent les logarithmes 0, 1, 2, 3, 4, etc., des nombres $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4$, etc., peuvent être considérés comme les exposans des puissances auxquelles il suffit d'élever 10 pour obtenir ces nombres; de sorte qu'en posant $10^x = y$, on obtiendrait pour y les différens termes de la progression géométrique, en donnant successivement à x les valeurs 0, 1, 2, 3, etc.

Pour étendre les propriétés dont jouissent les logarithmes à des nombres compris entre les termes de la progression géométrique primitive, on a inséré entre deux quelconques de ces termes un nombre n de moyens géométriques, dont on a obtenu les logarithmes respectifs en insérant n moyens arithmétiques entre les deux termes correspondans de la progression arithmétique. De là résultent deux nouvelles progressions, l'une géométrique, dont la raison est $\sqrt[n+1]{10} = 10^{\frac{1}{n+1}}$; l'autre, arithmétique, dont la raison est $\frac{1}{n+1}$; de sorte qu'en désignant $\frac{1}{n+1}$ par δ , on obtient les nouvelles progressions

$$\begin{array}{cccccccc} \div & 10^0 & : & 10^\delta & : & 10^{2\delta} & : & \dots & : & 10^{n\delta} & : & 10^{(n+1)\delta} & \text{ou } 10^1 & : & 10^{1+\delta} & : & 10^{1+2\delta} & \dots \\ \div & 0 & . & \delta & . & 2\delta & . & \dots & . & n\delta & . & (n+1)\delta & \text{ou } 1 & . & 1+\delta & . & 1+2\delta & \dots \end{array}$$

On voit encore que les logarithmes $0, \delta, 2\delta$, etc., des nombres $10^0, 10^\delta, 10^{2\delta}$, etc., sont les exposans des puissances auxquelles il suffit d'élever 10 pour obtenir ces nombres; et que la relation $10^x = y$ fournirait pour y les différens termes de la nouvelle progression géométrique, en donnant successivement à x les valeurs $0, \delta, 2\delta$, etc.

Le nombre n des moyens géométriques et arithmétiques que l'on insère entre deux termes consécutifs des progressions primitives étant arbitraire, on peut toujours prendre n assez grand pour que $\frac{1}{n+1}$ ou δ devienne aussi petit qu'on voudra, et par suite que les termes des deux progressions varient par degrés très rapprochés. Il est donc encore vrai de dire que les termes de la progression géométrique sont les valeurs de y fournies par la relation $y = 10^x$, en donnant à x les valeurs très rapprochées $0, \delta, 2\delta$, etc.

L'ensemble de toutes les valeurs correspondantes de x et y fournies par la relation $10^x = y$, forme un système de logarithmes; le nombre constant 10 est ce qu'on nomme la base du système.

Par conséquent, dans les tables de logarithmes placées à la fin de l'Arithmétique, la base est 10, et le logarithme d'un nombre peut être considéré comme l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base 10 pour obtenir ce nombre.

REMARQUE. Si dans la relation générale $y = 10^x$, on conçoit que x prend les valeurs successives $-\delta, -2\delta, -3\delta$, etc.; les valeurs correspondantes de y seront $10^{-\delta}, 10^{-2\delta}, 10^{-3\delta}$, etc., et pour que ces nouvelles valeurs de x et y fassent partie des progressions précédentes, il suffit de concevoir que ces progressions se prolongent indéfiniment dans les deux sens, car elles deviennent:

$$\begin{aligned} \div \dots 10^{-3\delta} : 10^{-2\delta} : 10^{-\delta} : 10^0 : 10^\delta : 10^{2\delta} : 10^{3\delta} : \dots \\ \div \dots -3\delta : -2\delta : -\delta : 0 : \delta : 2\delta : 3\delta : \dots \end{aligned}$$

167. On voit que dans le système tabulaire dont la base est 10, les logarithmes des quantités plus grandes que l'unité

sont positifs, et d'autant plus grands que ces quantités sont plus grandes; tandis que les logarithmes des quantités positives moindres que l'unité sont négatifs, et d'autant plus grands négativement que ces quantités sont plus petites.

168. Il est facile de s'assurer que tous les systèmes de logarithmes dont nous avons parlé en Arithmétique, et qui ont été fournis par des progressions,

$$\begin{array}{c} \div \dots q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : q^0 \text{ ou } 1 : q^1 : q^2 : q^3 : \dots \\ \div \dots -3\delta : -2\delta : -\delta : 0 : \delta : 2\delta : 3\delta : \dots \end{array}$$

peuvent encore se déduire de la relation $a^x = y$.

A cet effet, nous allons chercher quelle est la valeur de a qui ramène la progression géométrique à la forme

$$\div \dots a^{-3\delta} : a^{-2\delta} : a^{-\delta} : a^0 : a^{\delta} : a^{2\delta} : a^{3\delta} : \dots$$

Ce qui se réduit à satisfaire à la condition $q^m = a^{m\delta}$, d'où $q = a^{\delta}$.

La valeur cherchée de a est donc $q^{\frac{1}{\delta}}$ ou $\sqrt[\delta]{q}$.

On voit de cette manière que la table des logarithmes

$$\dots -3\delta, -2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta, 3\delta, \dots$$

des nombres correspondans

$$\dots a^{-3\delta}, a^{-2\delta}, a^{-\delta}, a^0, a^{\delta}, a^{2\delta}, a^{3\delta}, \dots$$

est absolument la même que celle qu'on déduirait de l'ensemble des solutions de l'équation $a^x = y$, en donnant à x des valeurs $\dots -3\delta, -2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta, 3\delta, \dots$; de sorte qu'en concevant δ moindre que toute quantité donnée, le logarithme x passera par tous les états de grandeur, et donnera pour y la suite de tous les nombres.

Des Logarithmes considérés comme des exposans.

169. Nous considérerons désormais les LOGARITHMES des nombres, comme les EXPOSANS des puissances auxquelles il faut élever un nombre constant nommé BASE, pour en déduire tous ces nombres.

Ainsi, en désignant par x le logarithme de y dans le système dont la base est a , et par ly le logarithme de y pris dans ce système, on a

$$y = a^x, \quad x = ly; \quad \text{d'où} \quad y = a^{ly}.$$

L'ensemble de toutes les valeurs de x et y correspondantes à une même valeur de a , forme un système de logarithmes.

Les diverses propriétés des logarithmes se déduisent avec la plus grande facilité de cette nouvelle définition. En effet; si l'on désigne par x et X les logarithmes des nombres y , Y , dans le système dont la base est a , on aura

$$y = a^x, \quad Y = a^X, \quad x = ly, \quad X = lY; \quad \text{d'où}$$

$$y \times Y = a^{x+X}, \quad \frac{y}{Y} = a^{x-X}, \quad y^m = a^{mx}, \quad \sqrt[m]{y} = a^{\frac{x}{m}}.$$

Donc

$$l(y \times Y) = x + X = ly + lY, \quad l\left(\frac{y}{Y}\right) = x - X = ly - lY,$$

$$l(y^m) = mx = mly, \quad l\sqrt[m]{y} = \frac{x}{m} = \frac{ly}{m}.$$

Par conséquent : 1°. le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs; 2°. le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur; le logarithme d'une fraction est donc égal au logarithme du numérateur, moins le logarithme du dénominateur; 3°. le logarithme de la $m^{\text{ème}}$ puissance d'une quantité s'obtient en multipliant par m le logarithme de cette quantité; 4°. le logarithme de la racine $m^{\text{ème}}$ d'un nombre s'obtient en divisant par m le logarithme de ce nombre.

1^{re} REMARQUE. Cette manière de démontrer les propriétés des logarithmes, à l'aide des exposans, paraît sans doute plus facile que celle que nous avons donnée en Arithmétique; mais on doit observer que les valeurs de x qui satisfont à l'équation $a^x = y$, étant souvent incommensurables, il aurait fallu connaître la théorie des exposans incommensurables, qui ne peut être établie qu'en Algèbre.

2^e REMARQUE. La formule $l(a^x) = x \times l a$, démontre que dans tout système de logarithmes, le logarithme de y^{lx} est identiquement égal au logarithme de a^{lx} , car d'après cette formule,

$$l(y^{lx}) = lx \times ly, \quad l(a^{lx}) = lx \times la.$$

3^e REMARQUE. Lorsque des nombres sont en progression géométrique, leurs logarithmes sont en progression arithmétique; car en prenant les logarithmes des termes a, aq, aq^2, aq^3 , etc.; d'une progression géométrique dont la raison est q , on obtient les termes, $la, la + lq, la + 2lq, la + 3lq$, etc., d'une progression arithmétique dont la raison est lq .

170. Dans tout système dont la base est positive et plus grande que l'unité, les logarithmes des quantités plus grandes que l'unité sont positifs et d'autant plus grands que ces quantités sont plus grandes; les logarithmes des quantités positives moindres que l'unité sont négatifs et d'autant plus grands négativement que ces quantités sont plus petites.

En effet; si x désigne le logarithme de y , dans le système dont la base a est plus grande que l'unité, on aura

$$y = a^x, \quad a > 1, \quad x = ly.$$

L'hypothèse $x=0$ donne $y=1$; et si x augmente d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, la valeur de y augmentera d'une manière continue depuis l'unité jusqu'à l'infini positif (n^o 120). Mais $x=ly$. On voit donc que les logarithmes des quantités plus grandes que l'unité sont positifs et d'autant plus grands que ces quantités sont plus grandes.

Pour obtenir les logarithmes des quantités positives moindres que l'unité, on fait

$$x = -z; \quad \text{d'où} \quad y = a^{-z} = \left(\frac{1}{a}\right)^z.$$

Or, z augmentant depuis zéro jusqu'à l'infini positif, la valeur $\left(\frac{1}{a}\right)^z$ de y diminue depuis l'unité jusqu'à zéro (n^o 120), car $\frac{1}{a}$ est moindre que l'unité. Les logarithmes des quantités

positives moindres que l'unité sont donc négatifs et d'autant plus grands en valeur absolue, que ces quantités sont plus petites. C'est dans ce sens qu'on dit que le logarithme de zéro est l'infini négatif.

On verrait d'une manière semblable que dans tout système dont la base est positive et moindre que l'unité, les logarithmes des quantités positives plus petites que l'unité sont positifs et d'autant plus grands que les quantités sont plus petites, et que les logarithmes des quantités positives plus grandes que l'unité sont négatifs et d'autant plus grands négativement qu'ils appartiennent à des quantités plus grandes.

On ne peut pas prendre l'unité pour base d'un système de logarithmes, car toutes les puissances de 1 étant égales à 1, les nombres plus grands ou plus petits que l'unité, n'auraient pas de logarithmes.

171. D'après la discussion précédente, lorsque dans l'équation $a^x = y$, a est positif, si x augmente d'une manière continue depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on obtiendra pour y toutes les quantités comprises entre zéro et l'infini positif.

Aucune valeur réelle de x ne pouvant rendre y négatif, les valeurs de x , correspondantes aux valeurs négatives de y , sont imaginaires.

Par conséquent, dans tout système dont la base est positive, les logarithmes des quantités positives sont réels, et les logarithmes des quantités négatives sont IMAGINAIRES.

REMARQUE. Nous supposons ici qu'on ne considère que les valeurs arithmétiques des radicaux qui correspondent aux valeurs fractionnaires de x .

Si l'on voulait admettre les valeurs réelles négatives des radicaux de degré pair, les valeurs de x correspondantes aux valeurs négatives de y ne seraient plus imaginaires.

Par exemple, soit l'équation $100^x = -10$.

La racine carrée de 100 étant $+10$ et -10 , on obtiendra une solution de l'équation proposée en faisant $x = \frac{1}{2}$, et en prenant la valeur négative -10 de $\sqrt{100}$, car $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100}$.

172. Dans tous les systèmes de logarithmes, le logarithme de la base est égal à l'unité et le logarithme de l'unité est zéro; car en désignant par x le logarithme de y dans le système dont la base est a , on a

$$y = a^x, \quad ly = x.$$

La valeur $x = 0$, donnant $y = 1$, on voit que $\log 1 = 0$,
et $x = 1$ donnant $y = a$, on voit que $\log a = 1$.

Lorsqu'on a une table de logarithmes, il est toujours facile de trouver la base relative à cette table, car le logarithme de la base étant égal à l'unité, on cherchera dans la table le nombre correspondant au logarithme 1; ce nombre sera la base demandée.

Par exemple, dans la table de logarithmes placée à la fin de l'Arithmétique, le nombre qui a pour logarithme l'unité, étant 10, la base est 10. Cela est d'ailleurs évident, car cette table a été déduite des progressions primitives

$$\begin{array}{ccccccc} \div & 1 & : & 10 & : & 100 & : & 1000 & : & \dots\dots \\ & \div & 0 & . & 1 & . & 2 & . & 3 & \dots\dots, \end{array}$$

dans lesquelles le logarithme 1, correspond au nombre 10.

173. Connaissant les logarithmes de tous les nombres dans le système dont la base est a , pour en déduire les logarithmes des mêmes nombres dans le système dont la base est A , il suffit de calculer le quotient M de la division de l'unité par le logarithme de A pris dans le système dont la base est a , et de multiplier les logarithmes donnés par le nombre constant M ; car en désignant par X le logarithme inconnu de C dans la base A , et par ℓ , ℓA , les logarithmes des nombres C , A , dans la base a , on a

$$C = A^X, \quad \ell C = \ell(A^X) = X \times \ell A;$$

$$\text{d'où} \quad X = (\ell C) \times \frac{1}{\ell A} = (\ell C) \times M.$$

Le nombre constant M est ce qu'on nomme le **MODULE** relatif à la base A .

174. Lorsque la base est un nombre entier positif, le principe du n° 163 fournit le moyen de reconnaître si le logarithme d'un nombre donné est commensurable.

On en déduit que dans le système dont la base est 10, les nombres

$$1, 10, 100, 1000, \text{ etc.}, \quad \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \text{ etc.},$$

sont les seuls dont les logarithmes soient commensurables.

175. Lorsque la base est positive, le logarithme d'un nombre positif est réel (n° 171), et les fractions continues fournissent le moyen de calculer ce logarithme avec une approximation donnée.

EXEMPLE. Calculer le logarithme de 3 dans le système dont la base est 10.

Si x désigne ce logarithme, on aura $10^x = 3$; la valeur de x sera incommensurable (n° 174), et en opérant comme il a été indiqué (pages 290 et 291), on trouvera $x = 0,477$ etc. De sorte que le logarithme de 3 est 0,477, à moins d'un millièbre d'unité; ce qui s'accorde avec le résultat qui a été obtenu (*Arith.*, page 215).

176. La table de logarithmes placée à la fin de l'Arithmétique se rapporte à la base 10; elle renferme les logarithmes à cinq décimales des nombres entiers moindres que 10000. Pour former cette table, il suffit de calculer par la méthode précédente les six premières décimales des logarithmes des nombres premiers compris entre 1 et 10000; on en déduit par de simples additions les logarithmes à 6 décimales des autres nombres entiers moindres que 10000, et on supprime ensuite la dernière décimale de manière à ne commettre que la plus petite erreur possible (*Arith.*, n° 80).

Nous avons fait voir en Arithmétique que cette table fournit le moyen de calculer par approximation le logarithme d'un nombre donné quelconque, et de trouver le nombre correspondant à un logarithme donné.

177. Les tables de logarithmes fournissent le moyen de ré-

soudre les équations à une seule inconnue, quand cette inconnue n'entre que dans les exposants.

1°. Soit $a^x = c$; en prenant les logarithmes des deux membres, il vient

$$lc = l(a^x) = xla; \text{ d'où } x = \frac{lc}{la}.$$

2°. Soit l'équation $a^{bx} = c$, dans laquelle le premier membre indique que le nombre a doit être élevé à une puissance marquée par bx . Pour trouver x , on fera

$$bx = y, \text{ d'où } x = \frac{by}{lb}.$$

L'équation proposée deviendra $a^y = c$; d'où $y = \frac{lc}{la}$.

La division de lc par la donnera y , et ensuite le quotient de ly par lb exprimera x .

EXEMPLE. Soit l'équation $5^x = 390625$.

On aura $a = 5$, $b = 2$, $c = 390625$.

On en déduira, d'après la règle indiquée,

$$y = \frac{l390625}{l5} = \frac{5,59176}{0,69897} = 8, \quad x = \frac{ly}{lb} = \frac{l8}{l2} = \frac{0,90309}{0,30103} = 3.$$

Il est facile de s'assurer que cette valeur de x satisfait à l'équation proposée, car

$$2^x = 2^3 = 8, \quad 5^3 = 390625.$$

Si l'on veut exprimer x en fonction des nombres donnés a , b , c , on observera que la relation

$$y = \frac{lc}{la}, \text{ donnant } ly = l\left(\frac{lc}{la}\right) = llc - lla \quad (*),$$

on a
$$x = \frac{llc - lla}{lb}.$$

(*) L'expression llc indique qu'après avoir trouvé le nombre n qui exprime le logarithme de c , on devra prendre le logarithme de n .

Par exemple, lorsque $c = 100$, on a $lc = 2$, $llc = l2 = 0,30103$.

3°. Soit l'équation $a^{x^2} = d$.

On fera $c^x = y$, $b^y = z$; d'où $x = \frac{ly}{lc}$, $y = \frac{lz}{lb}$.

L'équation proposée deviendra $a^z = d$, d'où $z = \frac{ld}{la}$.

Ainsi, la division de ld par la donnera z , le quotient de lz par lb exprimera y , et enfin on trouvera x en divisant ly par lc .

4°. Soit $a^x - 5a^{x-2} = 4$; on en déduit $\left(1 - \frac{5}{a^2}\right)a^x = 4$,

$$a^x = \frac{4a^2}{a^2 - 5}, \quad xla = l(4a^2) - l(a^2 - 5), \quad x = \frac{l(4a^2) - l(a^2 - 5)}{la}.$$

Si $a = 3$, on trouvera $x = 2$.

5°. Soit l'équation $a^{x-1} = 2b + \frac{3}{a^{x-1}}$.

Pour la résoudre, on observe que

$$a^{x-1} = \frac{a^x}{a}, \quad a^{x-2} = \frac{a^x}{a^2}.$$

On fait $a^x = z$, l'équation proposée devient

$$\frac{z}{a} = 2b + \frac{3a^2}{z}; \quad \text{d'où } z = a(b \pm \sqrt{b^2 + 3a}).$$

Désignant ces deux valeurs de z , par a et c , on a

$$a^x = a, \quad a^x = c; \quad \text{d'où } x = \frac{la}{la} \text{ et } x = \frac{lc}{la}.$$

6°. En général, lorsque X désigne une fonction quelconque de x , la résolution de l'équation (1)... $a^X = a$,

dépend de celle de l'équation (2)... $X = \frac{lx}{la}$.

Soient $a = 5$, $a = 625$, $X = x^2 - 5x + 10$; l'équation (2) devient $x^2 - 5x + 10 = 4$; d'où $x = 2$ et $x = 3$.

DEUXIÈME SECTION.

CHAPITRE VI.

Théorèmes et Problèmes sur les diviseurs des nombres et sur les fractions irréductibles. Théorie des différens systèmes de numération. Propriétés générales des nombres dans ces divers systèmes. Des Quotiens périodiques. Théorie du plus grand commun diviseur.

§ 1^{er}. *Théorèmes et problèmes sur les diviseurs des nombres, et sur les fractions irréductibles.*

178. Nous allons faire connaître plusieurs propriétés des diviseurs des nombres, dont quelques-unes ont été déjà démontrées en Arithmétique; la comparaison des deux modes de démonstration, confirmera ce que nous avons dit sur les avantages de l'Algèbre.

1°. *Lorsque deux nombres entiers ont un diviseur commun, leur somme et leur différence admettent le même diviseur; car les relations*

$$a = m\delta, \quad c = n\delta, \quad \text{donnent} \quad a \pm c = (m \pm n)\delta.$$

2°. *Tout nombre qui divise la somme de deux quantités et l'une de ces quantités, divise l'autre quantité; car en faisant*

$$a + c = m\delta, \quad a = n\delta,$$

on a $c = m\delta - a = m\delta - n\delta = (m - n)\delta.$

3°. *Lorsque des nombres entiers, a, b, c, d , etc., ont un fac-*

teur commun δ , tous ces nombres combinés par voie d'addition et de soustraction, fournissent des résultats qui sont divisibles par δ . Cela se déduit de (1°).

Par exemple, soient $a = a'\delta$, $b = b'\delta$, $c = c'\delta$,

on aura $a - b + c = (a' - b' + c')\delta$.

Le nombre $a - b + c$ sera donc divisible par δ .

On en déduit que tout facteur d'un nombre, divise les multiples de ce nombre.

4°. Deux nombres entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux; car d'après (1°), s'ils avaient un facteur commun δ , ce facteur diviserait leur différence 1; ce qui est absurde.

5°. Le produit de n nombres entiers consécutifs quelconques est divisible par le produit des n nombres 1, 2, 3, 4, ..., n .

En effet; l'identité

$$\begin{aligned} \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)(p+n)}{1 \cdot 2 \dots (n-1) n} &= \left(\frac{n+p}{n}\right) \times \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \\ &= \left(1 + \frac{p}{n}\right) \times \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \end{aligned}$$

donne

$$\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)(p+n)}{1 \cdot 2 \dots (n-1) n} = \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n}.$$

Cette dernière démontre que si le produit de $n-1$ nombres entiers consécutifs $p+1, p+2, \dots, p+n-1$, est divisible par le produit des $n-1$ nombres entiers 1, 2, ..., $n-1$, le reste de la division de $(p+1)(p+2)\dots(p+n)$ par $1 \times 2 \times \dots \times n$ sera le même que celui de la division de $p(p+1)\dots(p+n-1)$ par $1 \times 2 \times \dots \times n$; c'est-à-dire que si la propriété énoncée convient à $n-1$ facteurs, le reste de la division du produit de n nombres entiers consécutifs par $1 \times 2 \times \dots \times n$, ne changera pas quand chaque facteur diminuera d'une unité; le reste de la division ne changera donc pas, lorsqu'on diminuera de p unités chacun des n facteurs $p+1, p+2, \dots, p+n$; le produit $1 \times 2 \times \dots \times n$ de ces nou-

veaux facteurs étant divisible par $1 \times 2 \times \dots \times n$, on voit que si la propriété énoncée est vraie pour $n - 1$ facteurs, elle le sera également pour n facteurs; or elle convient à deux facteurs, car l'un de ces facteurs étant toujours un nombre pair, leur produit est divisible par 1×2 ; le principe est donc démontré (*).

6°. *Tout diviseur δ commun à deux nombres a, ζ , divise nécessairement les restes que l'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur entre a et ζ .* En effet, soit $a > \zeta$; on divisera a par ζ , ce qui fournira un quotient entier q et un reste $r < \zeta$. La division de ζ par r donnera un quotient entier q' et un reste $r' < r$; et ainsi de suite. On aura

$$a = \zeta q + r, \quad \zeta = r q' + r', \text{ etc.}$$

Or, δ divise a et ζ ; δ divisera donc ζq ; δ divisera donc r , car $a = \zeta q + r$.

Le nombre δ divisant ζ et r , l'égalité $\zeta = r q' + r'$ prouve que δ divisera r' ; et ainsi de suite. Ce qui démontre la propriété énoncée.

7°. *Lorsqu'on multiplie le dividende et le diviseur par un nombre, la partie entière du quotient ne change pas, et le reste est multiplié par ce nombre.* En effet, si la division de A par B fournit le quotient entier Q et le reste R , on aura

$$A = BQ + R, \quad R < B; \text{ d'où } AP = BP \times Q + RP.$$

Cette dernière égalité prouve que la division de AP par BP conduira au quotient Q et au reste RP , car RP est moindre que le diviseur BP puisque $R < B$.

8°. Il résulte de (7°) que pour obtenir les restes successifs qui seraient fournis par la recherche du plus grand commun diviseur de $A \times P$ et $B \times P$, il suffit de multiplier par P

(*) Cette dernière démonstration est de M. Mayer, ancien élève de l'École Polytechnique, actuellement Directeur d'une Institution préparatoire à cette École.

tous les restes qui correspondent à la recherche du plus grand commun diviseur de A et B .

179. Lorsqu'un nombre P divise le produit $A \times B$ de deux facteurs, s'il est premier avec A , il divisera nécessairement B .

En effet; A et P étant premiers entre eux, la recherche de leur plus grand commun diviseur conduira au reste 1 (*Arith.*, n° 42, 3°). Par conséquent, si l'on multiplie A et P par B , et si l'on cherche le plus grand commun diviseur de AB et PB , on parviendra au reste $1 \times B$ ou B (n° 178, 8°). Mais P divise AB et PB ; P divise donc le reste B ; car, d'après ce qui a été démontré (n° 178, 6°), tout diviseur commun à AB et PB divise les restes successifs que l'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur entre AB et PB .

180. Tout nombre premier qui divise un produit, divise nécessairement un des facteurs de ce produit.

En effet; soit α un nombre premier qui divise le produit P des facteurs a, b, c, d , etc.; si α est premier avec a , il faudra que α divise le produit p des autres facteurs, b, c, d , etc., de P , car $P = a \times p$. Par la même raison, α divisant le produit des facteurs b, c, d , etc., si α est premier avec b , il faudra que α divise le produit des autres facteurs c, d , etc. En continuant ainsi jusqu'aux deux derniers facteurs, on voit que si α ne divise aucun des facteurs précédents, il faudra que α divise l'un de ces deux facteurs; ce qui démontre le principe énoncé.

Tout nombre premier qui divise α^n , divise donc α .

REMARQUE. On peut en conclure qu'un nombre entier N n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers; car, par exemple, si α, ζ, γ et δ désignant des nombres premiers, on pouvait avoir

$$N = \alpha^a \zeta^c = \alpha^b \gamma^d, \text{ il en résulterait } \alpha = \frac{\gamma^d \delta}{\zeta};$$

ζ devrait donc diviser $\gamma^d \delta$; ce qui est impossible, puisque ζ ne divise aucun des facteurs γ, δ .

*181. Lorsque des nombres entiers a, ζ , sont premiers entre eux, si l'on divise par ζ les multiples $a, 2a, 3a, \dots, (\zeta - 1)a$, on obtient nécessairement les $\zeta - 1$ restes $1, 2, 3, \dots, \zeta - 1$, qui peuvent d'ailleurs se présenter dans un autre ordre. On suppose que ζ est moindre que a .

Je dis d'abord que ζ ne saurait diviser exactement aucun des produits $a \times 1, a \times 2, a \times 3, \dots, a \times (\zeta - 1)$; car ζ étant premier avec a , pour que ζ divisât un de ces produits, il faudrait que l'un des facteurs $1, 2, 3, \dots, \zeta - 1$, fût divisible par ζ (n° 179), ce qui est absurde, puisque ζ est plus grand que chacun des nombres $1, 2, 3, \dots, \zeta - 1$.

Par conséquent, si l'on divise successivement par ζ chacun des $\zeta - 1$ multiples $a, 2a, 3a, \dots, (\zeta - 1)a$, on obtiendra $\zeta - 1$ restes, et aucun de ces restes ne sera nul. Il suffit donc de prouver que les $\zeta - 1$ restes sont différens.

Or, si δ et δ' désignant des nombres entiers moindres que ζ , on pouvait obtenir deux restes égaux en divisant δa et $\delta' a$ par ζ , on aurait

$$\delta a = \zeta q + r, \quad \delta' a = \zeta q' + r.$$

Les nombres q et q' seraient entiers, et en retranchant ces équations membre à membre, il viendrait

$$(\delta - \delta')a = \zeta(q - q').$$

Le nombre ζ , qui est premier avec a , diviserait donc $(\delta - \delta')a$; ζ diviserait donc $(\delta - \delta')$, ce qui est impossible, puisque δ et δ' étant moindres que ζ , la différence entre δ et δ' est nécessairement moindre que ζ . Le principe est donc démontré.

182. 1^{re} PROBLÈME. Déterminer tous les diviseurs d'un nombre entier N .

On décompose d'abord ce nombre en ses facteurs premiers a, ζ, γ , etc. (*Arith.*, n° 48); ce qui donne

$$N = a^m \zeta^n \gamma^p \text{ etc.}$$

Les différens termes du produit P des polynomes

$$1 + a + a^2 + \dots + a^m, \quad 1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^n, \quad 1 + \gamma + \dots + \gamma^p, \text{ etc.,}$$

sont les diviseurs de N ; car tout nombre premier qui divise un produit, divisant un des facteurs (n° 180), on peut former tous les diviseurs de $\alpha^m \times \zeta^n \times \gamma^p \times \text{etc.}$, en donnant successivement à m, n, p , etc., les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., qui n'excèdent pas m, n, p , etc., et les diverses valeurs qui en résultent pour $\alpha^m \zeta^n \gamma^p$ etc., sont les termes du produit P .

Tous les termes de P ont des valeurs différentes. En effet; si deux termes pouvaient avoir la même valeur numérique, ils seraient nécessairement composés des mêmes facteurs premiers affectés d'exposans égaux chacun à chacun (remarque du n° 180); ce qui est impossible d'après la manière dont on forme les différens termes du produit P .

Le nombre des diviseurs de N est

$$(m+1) \times (n+1) \times (p+1) \times \text{etc.}$$

En effet; le facteur $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^m$, contenant $m+1$ termes, la multiplication de ce facteur, par l'un quelconque des $n+1$ termes du facteur $1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^n$, donne $m+1$ produits qui sont tous différens; le produit de ces deux facteurs renfermera donc $(m+1) \times (n+1)$ termes; ce produit, multiplié par $1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^p$, contiendra donc $(m+1)(n+1)(p+1)$ termes; et ainsi de suite.

Il résulte de ce qui précède que la somme des diviseurs de N est égale au produit

$$(1 + \alpha + \dots + \alpha^m)(1 + \zeta + \dots + \zeta^n)(1 + \gamma + \dots + \gamma^p) \text{ etc.}$$

Ce produit peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\alpha^{m+1}-1}{\alpha-1}\right) \times \left(\frac{\zeta^{n+1}-1}{\zeta-1}\right) \times \left(\frac{\gamma^{p+1}-1}{\gamma-1}\right) \text{ etc., (n° 29).}$$

1^{er} EXEMPLE. Calculer tous les diviseurs de 360.

On décompose d'abord 360 en ses facteurs premiers; ce qui donne

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \quad (\text{Arith., page 46}).$$

On effectue ensuite le produit des trois facteurs

$1 + 2 + 2^2 + 2^3, 1 + 3 + 3^2, 1 + 5.$ Les termes

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72,
5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360,

de ce produit, sont les diviseurs demandés (*Arith.*, page 47).

Tous ces diviseurs sont différens; leur nombre est égal à $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)$ ou à 24, et leur somme est égale à

$$\left(\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\right), \text{ ou à } 15 \times 13 \times 6, \text{ ou à } 1170.$$

2^e EXEMPLE. Déterminer tous les diviseurs de 1155.

La décomposition de 1155 en ses facteurs premiers donne

$$1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \quad (\text{Arith.}, \text{ page } 46);$$

et en formant le produit des quatre binomes

$$1 + 3, \quad 1 + 5, \quad 1 + 7, \quad 1 + 11,$$

on trouve que les diviseurs de 1155 sont

1, 3, 5, 15, 7, 21, 35, 105, 11, 33, 55, 165, 77, 231, 385, 1155.

3^e EXEMPLE. Trouver tous les diviseurs de 144.

En opérant comme dans les deux exemples précédens, on verra que les diviseurs demandés sont

1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 9, 18, 36, 72, 144.

REMARQUE. Cette manière de former tous les diviseurs d'un nombre est moins sujette à erreur que celle qui a été donnée (*Arith.*, n^o 49).

*183. Selon qu'un nombre entier N est un quarré ou n'est pas un quarré, le nombre δ de ses diviseurs est impair ou est pair; la réciproque est vraie. En effet, si l'on décompose le nombre donné N en ses facteurs premiers α, ζ, γ , etc., on trouvera

$$N = \alpha^m \zeta^n \gamma^p \text{ etc.},$$

et l'on aura

$$\delta = (m + 1)(n + 1)(p + 1) \text{ etc.}$$

Lorsque N est un carré, les exposans m, n, p , etc., sont pairs; aucun des facteurs $m+1, n+1, p+1$, etc., de δ , n'est donc divisible par 2; δ est donc impair.

Quand N n'est pas un carré, l'un des exposans m, n, p , etc., est impair; δ est donc pair, car un des facteurs de δ est pair. On en déduit que la réciproque est vraie.

*184. 2^e PROBLÈME. Déterminer de combien de manières différentes on peut décomposer un nombre entier positif N en deux facteurs entiers positifs.

Soit δ le nombre des diviseurs de N .

Lorsque δ est un nombre pair $2n$, le nombre N n'est pas un carré; la division de N par un nombre quelconque donne donc un quotient qui n'est pas égal au diviseur. Par conséquent, si l'on divise successivement N par ses n diviseurs $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, moindres que $\sqrt{N}$, on obtiendra n quotiens $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, plus grands que $\sqrt{N}$; on aura

$$N = q_1 \times d_1 = q_2 \times d_2 = q_3 \times d_3 = \dots = q_n \times d_n.$$

Il existera donc n produits qui seront égaux à N .

Par exemple, 360 ayant 24 diviseurs, on peut décomposer 360, en deux facteurs, des douze manières suivantes:

$$1 \times 360, 2 \times 180, 3 \times 120, 4 \times 90, 5 \times 72, 6 \times 60, \\ 8 \times 45, 9 \times 40, 10 \times 36, 12 \times 30, 15 \times 24, 18 \times 20.$$

Quand δ est un nombre impair $2n+1$, le nombre N est un carré p^2 ; divisant N par ses n diviseurs $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, moindres que p , on obtiendra n quotiens $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, plus grands que p ; de sorte que

$$N = p \times p = q_1 \times d_1 = q_2 \times d_2 = q_3 \times d_3 = \dots = q_n \times d_n.$$

Il existera donc $n+1$ produits qui seront égaux à N .

*185. 3^e PROBLÈME. Composer un nombre qui admette δ diviseurs.

Ce problème est indéterminé; car en désignant par α, ζ, γ , etc., les facteurs premiers du nombre demandé, ce nombre sera de la forme $\alpha^m \zeta^n \gamma^p$ etc.; les facteurs premiers α, ζ, γ , etc., seront

arbitraires, et les exposans inconnus, m, n, p , etc., ne seront assujettis qu'à la condition

$$(1) \dots (m+1) (n+1) (p+1) \text{ etc.} = d.$$

Si les facteurs premiers du nombre cherché doivent être les plus petits possibles, ce nombre sera nécessairement de la forme $2^m \times 3^n \times 5^p \times$, etc.

* 186. 4^e PROBLÈME. Déterminer un nombre entier N , qui soit égal à la somme de ses diviseurs (on fait abstraction du diviseur N).

Un nombre premier ne saurait jouir de la propriété demandée, car la somme de ses diviseurs est égale à l'unité.

Nous allons chercher si α et ζ , désignant des nombres premiers, on peut avoir $N = \alpha^m \times \zeta$.

La somme des diviseurs de $\alpha^m \zeta$ (en exceptant $\alpha^m \zeta$) étant

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^m) \times (1 + \zeta) - \alpha^m \zeta,$$

il faut que

$$\alpha^m \times \zeta = (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^m) \times (1 + \zeta) - \alpha^m \zeta; \text{ d'où}$$

$$(2) \dots \zeta = \frac{\alpha^m + (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1})}{\alpha^m - (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1})}.$$

Or, ζ doit être un nombre entier. Cette condition exige que le dénominateur soit l'unité; car autrement le reste de la division du numérateur de ζ , par le dénominateur, serait..... $2(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1})$, et α étant positif, ce reste ne se réduirait pas à zéro; il faut donc que

$$\alpha^m - (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1}) = 1.$$

Or, cette équation revient à

$$\alpha^m - \left(\frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1} \right) = 1, \text{ ou à } (\alpha^m - 1) (\alpha - 2) = 0.$$

Le nombre premier α devant être plus grand que l'unité, $\alpha^m - 1$ ne peut se réduire à zéro. Il faut donc que $\alpha - 2 = 0$; d'où $\alpha = 2$.

Substituant la valeur 2 de α dans l'expression de ζ , le dénominateur

minateur $a^m - (1 + a + a^2 + \dots + a^{m-1})$ se réduira nécessairement à l'unité; on aura

$$\begin{aligned} C &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{m-1} + 2^m, \\ N &= C \times a^m = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^m) \times 2^m, \end{aligned}$$

et pourvu que les nombres a, C , soient premiers, cette valeur de N jouira de la propriété demandée.

Ainsi, pour trouver des nombres qui soient égaux à la somme de leurs diviseurs, il suffit de faire la somme des nombres $1, 2, 2^2, 2^3$, etc., jusqu'à ce qu'on obtienne une somme qui soit un nombre premier, et de multiplier cette somme par la dernière puissance de 2 à laquelle on s'est arrêté; le produit satisfait à la question.

On en déduit que les valeurs de N sont 6, 28, 496, etc.; ces nombres s'appellent des nombres parfaits.

* 187. 5^e PROBLÈME. Calculer toutes les solutions entières de l'équation indéterminée $xy = N$, dans laquelle N désigne un nombre entier positif quelconque.

On décompose N en deux facteurs entiers de toutes les manières possibles (n^o 184); ce qui fournit les diverses valeurs de x et y , qui satisfont à la question.

On parvient au même résultat, en observant que l'équation

$$xy = N \text{ donnant } y = \frac{N}{x},$$

il suffit de prendre successivement pour x les diviseurs de N ; les quotiens de N par ces diviseurs expriment les valeurs correspondantes de y .

EXEMPLE. Soit l'équation $xy = 15$.

Les diviseurs de 15 étant 1, 3, 5, 15, on en déduit qu'on ne saurait décomposer 15 en deux facteurs, que des quatre manières suivantes :

$$1 \times 15, 3 \times 5, (-1) \times (-15), (-3) \times (-5).$$

6^e PROBLÈME. Trouver toutes les solutions entières de l'équation indéterminée

$$(1) \dots xy + ax + by = c,$$

dans laquelle a, b, c , sont des nombres entiers, positifs ou négatifs.

1^{re} SOLUTION. On ramène l'équation (1) à la forme

$$(2) \dots x'y' = N',$$

N' désignant un nombre entier. A cet effet, on pose

$$(3) \dots x = x' + a, \quad y = y' + b,$$

a et b sont des quantités arbitraires, dont on disposera de manière à ramener l'équation (1) à la forme (2) demandée. Substituant les valeurs (3) de x et y dans (1), il vient

$$(4) \dots x'y' + (b + a)x' + (a + b)y' = c - (ab + a^2 + b^2).$$

Pour faire disparaître les premières puissances de x' et y' , on pose

$$b + a = 0, \quad a + b = 0; \text{ d'où } b = -a, \quad a = -b.$$

Substituant ces valeurs de b et a , et représentant le nombre entier $c + ab$ par N' , l'équation (4) prend la forme (2) demandée, et les relations (3) deviennent

$$(5) \dots x = x' - b, \quad y = y' - a.$$

On cherchera toutes les valeurs entières de x' et y' , qui satisfont à l'équation (2); les valeurs correspondantes de x et y , qui fournissent les solutions entières de l'équation (1), se déduiront des relations (5).

Soit d un diviseur quelconque de N' ; le quotient de N' par d sera un nombre entier d' , et on obtiendra une solution entière de $x'y' = N'$, en prenant $x' = d$, $y' = d'$; les valeurs correspondantes de x, y , déduites de (5), qui satisfont à l'équation (1) proposée, sont $x = d - b$, $y = d' - a$.

2^e SOLUTION. On résout l'équation (1) par rapport à y , ce qui donne

$$y = \frac{-ax + c}{x + b}.$$

Divisant $-ax + c$ par $x + b$, on trouve le quotient entier $-a$ et le reste $c + ab$; de sorte qu'en faisant (comme dans la 1^{re} solution), $c + ab = N'$, on a

$$y = -a + \frac{N'}{x+b}.$$

Pour que y soit entier, il suffit et il faut que $x+b$ soit un diviseur δ de N' ; le quotient de N' par δ est un nombre entier δ' , et l'on a

$$x+b=\delta, y=-a+\delta'; \text{ d'où } x=\delta-b, y=\delta'-a.$$

Ce qui s'accorde avec la 1^{re} solution.

EXEMPLE. Soit l'équation $xy+2x+3y=9$.

En la comparant à $xy+ax+by=c$,

on a $a=2, b=3, c=9$; d'où

$$N'=15, x=\delta-3, y=\delta'-2.$$

Les diviseurs de 15 étant $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$, on donne à δ les valeurs

$+1, +3, +5, +15, -1, -3, -5, -15$,
les valeurs correspondantes de δ' sont

$+15, +5, +3, +1, -15, -5, -3, -1$;
et celles de x, y , déduites de $x=\delta-3, y=\delta'-2$, sont
 $-2, 0, +2, +12, -4, -6, -8, -18$,
 $+13, +3, +1, -1, -17, -7, -5, -3$.

188. Quand les deux termes d'une fraction $\frac{B}{A}$ n'ont pas de facteur commun, cette fraction est IRRÉDUCTIBLE; car autrement il existerait une fraction $\frac{b}{a}$, qui lui serait égale, et dont les termes a, b seraient respectivement moindres que A et B ; on aurait

$$\frac{B}{A} = \frac{b}{a}; \text{ d'où } \frac{aB}{A} = b.$$

Or, b est un nombre entier; aB serait donc divisible par A ; mais A et B sont premiers entre eux, A diviserait donc a (n° 179); ce qui est absurde, puisque a est moindre que A .

Par conséquent, toute fraction réductible à une forme plus simple, admet un plus grand commun diviseur entre ses deux termes.

189. Lorsqu'une fraction $\frac{B}{A}$ est égale à une fraction irréductible $\frac{b}{a}$, les deux termes de la première sont respectivement égaux à ceux de la seconde, multipliés par un même nombre.

En effet; l'égalité $\frac{B}{A} = \frac{b}{a}$, donne $\frac{bA}{a} = B$.

Le produit bA doit donc être divisible par a . Or, a est premier avec b ; il faut donc que a divise A (n° 179). Désignant par n le quotient de A par a , on aura $A = na$; et on en déduira $B = nb$. Ce qui démontre la propriété énoncée.

190. Quand deux fractions irréductibles sont égales entre elles, leurs numérateurs sont égaux, ainsi que leurs dénominateurs; car, autrement, une fraction irréductible serait égale à une fraction qui aurait des termes moindres; ce qui est absurde.

191. Les seules opérations qui n'altèrent pas la valeur d'une fraction, sont celles qui produisent le même effet que la multiplication et la division des deux termes de cette fraction par un même nombre.

En effet; supposons qu'après avoir effectué des opérations quelconques sur une fraction $\frac{B}{A}$, on parvienne à une fraction équivalente $\frac{B'}{A'}$; ces deux fractions seront nécessairement égales à une même fraction irréductible $\frac{b}{a}$ (n° 190). On aura

$B = bn$, $A = an$, $B' = bn'$, $A' = an'$ (n° 189); d'où

$$\frac{B}{A} = \frac{bn}{an} = \frac{b}{a} = \frac{bn'}{an'} = \frac{B'}{A'}.$$

De sorte que pour déduire de la fraction $\frac{B}{A}$, la fraction équi-

valente $\frac{B'}{A'}$, il suffit de diviser d'abord B et A par leur plus grand commun diviseur n , et de multiplier ensuite les deux termes de la fraction irréductible $\frac{b}{a}$ qui en résulte, par le plus grand commun diviseur n' de B' et A'. Ce qui démontre la propriété énoncée.

192. Lorsque la fraction $\frac{b}{a}$ est irréductible, la fraction $\frac{b^m}{a^n}$ est également irréductible; car autrement, b^m et a^n seraient divisibles par un même nombre premier π ; π diviserait donc b et a (n° 180); la fraction $\frac{b}{a}$ ne serait donc pas irréductible; ce qui est contre l'hypothèse.

Toutes les puissances d'une fraction irréductible sont donc des fractions irréductibles.

* 193. Lorsqu'on ajoute entre elles plusieurs fractions irréductibles dont les dénominateurs sont premiers entre eux, la somme est une fraction irréductible. En effet, soient $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, des fractions de cette espèce; leur somme sera

$$\frac{ab'b'' + a'bb'' + a''bb'}{bb'b''}.$$

Si cette somme n'était pas une fraction irréductible, ses deux termes seraient divisibles par un même nombre premier δ , qui diviserait l'un des facteurs b , b' , b'' , du dénominateur, le facteur b par exemple; δ diviserait donc

$$(a'bb'' + a''bb') \text{ et } ab'b'' + (a'bb'' + a''bb');$$

δ diviserait donc $ab'b''$ (n° 178, 2°); ce qui est impossible; puisque δ est premier avec chacun des nombres a , b' , b'' .

§ II. *Des différens systèmes de numération. Propriétés des nombres dans ces divers systèmes. Des quotiens périodiques. Problèmes.*

194. Dans tout système de numération, le nombre b des chiffres est ce qu'on nomme la *BASE* du système; il y a $b - 1$ chiffres significatifs qui expriment les $b - 1$ premiers nombres 1, 2, 3, 4, ..., $b - 1$; le chiffre auxiliaire 0, nommé *zéro*, n'a aucune valeur par lui-même, il sert à conserver aux chiffres significatifs la place qu'ils doivent occuper.

Pour écrire tous les nombres avec ces b chiffres, il suffit de convenir qu'en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, ses chiffres expriment des unités de b en b fois plus grandes.

Ainsi, le 1^{er} chiffre d'un nombre à partir de la droite exprime des unités simples ou du 1^{er} ordre, le 2^e chiffre exprime des unités du 2^e ordre, le 3^e des unités du 3^e ordre; etc. Chaque unité du 1^{er} ordre vaut 1, chaque unité du 2^e ordre vaut b , chaque unité du 3^e ordre vaut $b \times b$ ou b^2 ; et en général, chaque unité du $n^{\text{ième}}$ ordre vaut b^{n-1} .

Les nombres b , b^2 , b^3 , etc., sont représentés par $(10)_b$, $(100)_b$, $(1000)_b$, etc. (*). En général, l'unité suivie de n zéro vers la droite représente le nombre b^n .

Les nombres 1, 2, 3, ..., $b - 1$, sont exprimés par un seul chiffre; ajoutant l'unité à $b - 1$, on forme le nombre b , qui est représenté par $(10)_b$. Mettant successivement tous les chiffres à la première et à la seconde place, on obtient les nombres b , $b + 1$, $b + 2$, ..., $b^2 - 1$. Ajoutant 1 à $b^2 - 1$, on parvient au plus petit nombre b^2 de trois chiffres qui est représenté par $(100)_b$. Pour écrire tous les nombres b^2 , $b^2 + 1$, ..., $b^3 - 1$, il suffit de mettre successivement tous les chiffres à la 1^{re} place, à la 2^e et à la 3^e. Et ainsi de suite.

(*) Pour indiquer qu'un nombre est écrit dans le système dont la base est b , nous le placerons entre parenthèses, et nous mettrons b à droite de la parenthèse et un peu au-dessous.

Le plus petit nombre de n chiffres est l'unité suivie de $n-1$ zéro; sa valeur est b^{n-1} .

Le plus grand nombre de n chiffres vaut $b^n - 1$; car b^n exprimant l'unité suivie de n zéro, si l'on en retranche 1, le reste sera nécessairement composé de n chiffres égaux à $b - 1$.

195. Quand un nombre est écrit dans la base b , c'est-à-dire dans le système dont la base est b , pour l'écrire dans le système décimal, on multiplie le 1^{er} chiffre à droite par 1, le 2^e par b , le 3^e par b^2 ; et ainsi de suite, jusqu'au chiffre des plus hautes unités; la somme de ces produits est le nombre demandé.

Ainsi, $(275)_8 = 5 + 7 \times 8 + 2 \times 8^2 = 189$.

Lorsqu'un nombre est écrit dans le système décimal, pour l'écrire dans la base b , on le divise par b ; le reste est le 1^{er} chiffre à droite du nombre demandé, et le quotient exprime des unités du 2^e ordre; divisant ce quotient par b , le reste est le 2^e chiffre du nombre cherché, et le quotient représente des unités du 3^e ordre. Continuant ce calcul, on parvient à un quotient moindre que b , qui est le dernier chiffre du nombre demandé. Cela résulte de ce que b unités d'un ordre quelconque, valent une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

Ainsi, pour écrire 189 dans la base 8, on divise 189 par 8; ce qui donne le reste 5 et le quotient 23; divisant 23 par 8, le reste est 7 et le quotient est 2; les chiffres du nombre demandé sont 2, 7 et 5; ce nombre est donc exprimé par $(275)_8$.

Quand un nombre est écrit dans un système, pour l'écrire dans tout autre système, on exprime d'abord le nombre dans le système décimal, et on écrit ensuite ce nombre décimal dans le nouveau système.

Par exemple, pour écrire le nombre $(67)_{13}$ dans la base 11, on traduit d'abord ce nombre dans le système décimal, ce qui donne

$$(67)_{13} = 7 + 6 \times 13 = 85.$$

Il ne s'agit plus que d'écrire 85 dans la base 11; à cet effet, on divise 85 par 11, ce qui fournit le quotient 7 et le reste 8. Le résultat demandé est donc $(78)_{11}$. Ainsi, $(67)_{13} = 85 = (78)_{11}$.

196. 1^{er} PROBLÈME. *Connaissant les chiffres d'un nombre écrit dans deux systèmes différents, trouver la valeur N de ce nombre, et les bases x, y, des systèmes.*

Si les chiffres du nombre N écrit dans le premier système étant a, c, γ, etc., ceux du même nombre écrit dans le second système sont A, B, C, etc., on aura

$$N = a + cx + \gamma x^2 + \text{etc.}, \quad N = A + By + Cy^2 + \text{etc.}$$

Ces équations exprimant toutes les conditions du problème, l'une des inconnues, x, y, N, est arbitraire. Il faut seulement observer que chacune des bases x, y, doit être un nombre entier positif plus grand que le plus grand des chiffres du nombre écrit dans ce système.

Les valeurs de x et y, dépendent de l'équation

$$a + cx + \gamma x^2 + \text{etc.} = A + By + Cy^2 + \text{etc.}$$

EXEMPLE. Soit $N = (78)_x = (67)_y$. On aura

$$N = 8 + 7x, \quad N = 7 + 6y; \quad \text{d'où} \quad 8 + 7x = 7 + 6y.$$

Les solutions entières de cette dernière équation seront fournies par les formules

$$x = 6e - 1, \quad y = 7e - 1, \quad (n^o 70);$$

en donnant à e des valeurs entières arbitraires. Mais comme les bases x, y, doivent être des nombres entiers positifs respectivement plus grands que 8 et 7, on ne doit prendre que les valeurs entières de e qui satisfont aux inégalités

$$6e - 1 > 8, \quad 7e - 1 > 7; \quad \text{d'où} \quad e > 1 + \frac{1}{2}, \quad e > 1 + \frac{1}{7}.$$

On peut donc donner à e les valeurs 2, 3, 4, 5, etc.

Soit $e = 2$; on trouve $x = 11$, $y = 13$, $N = 85$;

et en effet

$$(78)_{11} = 8 + 7 \times 11 = 85, \quad (67)_{13} = 7 + 6 \times 13 = 85.$$

2^e PROBLÈME. Connaissant la valeur a d'un nombre et ses chiffres, $a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, déterminer la base x du système dans lequel ce nombre est écrit.

L'inconnue x dépend de l'équation

$$a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = a.$$

REMARQUE. Cette équation ne peut jamais admettre plus d'une valeur réelle positive de x ; car selon que x augmente ou diminue, le premier membre augmente ou diminue en même temps. La base x devant être plus grande que chacun des x chiffres qui entrent dans le système, on ne saurait admettre pour x qu'un nombre entier positif plus grand que le plus grand des chiffres donnés, $a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

EXEMPLE. Soit $(275)_x = 189$. On a

$$5 + 7x + 2x^2 = 189, \text{ d'où } x = 8 \text{ et } x = -\frac{23}{2}.$$

La base du système est donc 8.

$$\text{Et en effet } (275)_8 = 5 + 7 \times 8 + 2 \times 8^2 = 189.$$

3^e PROBLÈME. Un nombre entier N est exprimé par m chiffres dans le système dont la base est b ; combien faudra-t-il de chiffres pour l'écrire dans le système dont la base est c .

Si x désigne le nombre de chiffres cherché, on aura

$$N < b^m, \quad N < c^x, \quad N < b^{m-1}, \quad N < c^{x-1}.$$

Or, $N < b^m, \quad N < c^{x-1}$ exige que $c^{x-1} < b^m$,

et $N < b^{m-1}, \quad N < c^x$ exige que $c^x > b^{m-1}$.

Prenant les logarithmes, il vient

$$(x-1)lc < mlb, \quad xlc > (m-1)lb;$$

on en déduit

$$x < 1 + \frac{mlb}{lc}, \quad x > \frac{(m-1)lb}{lc}.$$

De sorte que x sera nécessairement égal à l'un des nombres entiers compris entre ces deux limites.

EXEMPLE. Soient $m = 100$, $h = 10$, $c = 12$.

Si l'on prend les logarithmes dans le système tabulaire, dont la base est 10, on aura $lb = 1$, et on trouvera

$$x < 93,6 \text{ etc.}, \quad x > 91,7 \text{ etc.}$$

Le nombre des chiffres cherché est donc 92 ou 93.

197. *Les méthodes exposées. (Arithmétique, n° 222) pour opérer sur les nombres duodécimaux, s'appliquent à tous les systèmes.*

On trouve ainsi, que la somme des nombres $(37)_3, (25)_3$, est $(64)_3$, que leur différence est $(12)_3$, que leur produit est $(1213)_3$, et que le quotient de $(1213)_3$ par $(37)_3$ est $(25)_3$.

Lorsqu'un nombre est écrit dans la base b , pour le multiplier par b^n , c'est-à-dire par l'unité suivie de n zéro, il suffit de mettre n zéro à sa droite; car en plaçant ces zéro, chaque chiffre avançant de n rangs vers la gauche, exprime des unités qui sont b^n fois plus grandes.

Ainsi, le produit de $(352)_7$ par $(100)_7$, est $(35200)_7$.

198. PROBLÈME. Un nombre entier N étant écrit dans la base b , déterminer le reste de la division de N par le nombre entier d , sans effectuer la division.

Si les chiffres de N sont c, c_1, c_2, c_3 , etc., on aura

$$(1) \dots\dots N = c + c_1b + c_2b^2 + c_3b^3 + \text{etc.}$$

1^{er} CAS. Quand le diviseur d est moindre que la base b , on a, $d = b - \delta$, et l'on peut mettre N sous la forme

$$N = (b - \delta)c_1 + (b^2 - \delta^2)c_2 + \text{etc.} + (c + c_1\delta + c_2\delta^2 + \text{etc.}).$$

Chacun des binômes $(b - \delta)$, $(b^2 - \delta^2)$, etc., étant divisible par $b - \delta$ (n° 29), c'est-à-dire par d , le nombre N est un multiple de d , augmenté de $(c + c_1\delta + c_2\delta^2 + c_3\delta^3 + \text{etc.})$.

La formule du binôme démontre la même propriété; car en remplaçant b par sa valeur $d + \delta$, l'expression (1) de N devient

$$(2) \dots N = c + c_1(d + \delta) + c_2(d + \delta)^2 + c_3(d + \delta)^3 + \text{etc.}$$

Or, n désignant un nombre entier positif quelconque, on a

$$(d + \delta)^n = d^n + nd^{n-1}\delta + \frac{n(n-1)}{2}d^{n-2}\delta^2 + \dots + nd\delta^{n-1} + \delta^n.$$

Le nombre $(d + \delta)^n$ est donc un multiple de d augmenté de δ^n .

Il en résulte que $(d + \delta)$, $(d + \delta)^2$, $(d + \delta)^3$, etc., sont des multiples de d augmentés respectivement de δ , δ^2 , δ^3 , etc.; et que par conséquent, l'expression (2) de N est un multiple de d augmenté de $c + c_1\delta + c_2\delta^2 + c_3\delta^3 + \text{etc.}$

Le reste de la division de N par d sera donc le même que celui de la division du nombre $(c + c_1\delta + c_2\delta^2 + \text{etc.})$ par d .

On en déduit cette règle générale : *Pour trouver le reste de la division d'un nombre entier N , par un diviseur d moindre que la base b , prenez la différence δ entre b et d ; multipliez le 1^{er} chiffre à droite de N par 1, le 2^e par δ , le 3^e par δ^2 , et ainsi de suite jusqu'au dernier chiffre; calculez la somme N' de ces produits; le reste de la division de N par d , sera le même que celui de N' par d . Opérant sur N' , comme on a opéré sur N , et continuant le calcul jusqu'à ce qu'on obtienne une somme moindre que b , cette dernière somme, diminuée du plus grand multiple de d qu'elle pourra contenir, exprimera le reste demandé.*

EXEMPLE. Trouver le reste de la division de N par 9, dans le système décimal.

On a, $b = 10$, $\delta = 1$; et N' devient la somme des chiffres de N ; ce qui conduit à la règle qui a été donnée (*Arith.* n° 34, page 35).

2^e CAS. Lorsque le diviseur d est plus grand que la base b , on a $d = b + \delta$, et l'on peut mettre N sous la forme

$$c_1(b + \delta) + c_2(b^2 - \delta^2) + c_3(b^3 + \delta^3) + \text{etc.} + (c - c_1\delta + c_2\delta^2 - c_3\delta^3 + \text{etc.})$$

Chacun des binomes, $b + \delta$, $b^2 - \delta^2$, $b^3 + \delta^3$, etc., étant divisible par $b + \delta$ (n° 29), c'est-à-dire par d , le nombre N est un multiple de d augmenté de $c - c_1\delta + c_2\delta^2 - c_3\delta^3 + \text{etc.}$

De sorte que m désignant un nombre entier positif, on a

$$(1) \dots N = md + (c - c_1\delta + c_2\delta^2 - c_3\delta^3 + \text{etc.}).$$

La formule du binôme conduit à la même propriété ; car en remplaçant b par $d - \delta$, l'expression $c + c_1b + c_2b^2 + \text{etc.}$, de N devient

$$(2) \dots N = c + c_1(d - \delta) + c_2(d - \delta)^2 + c_3(d - \delta)^3 + \text{etc.},$$

et le développement de $(d - \delta)^n$ faisant voir que $(d - \delta)^n$ est un multiple de d , augmenté ou diminué de δ^n , selon que n est pair ou est impair, l'expression (2) de N peut se mettre sous la forme (1).

Cela posé : la relation (2) revient à

$$N = md + (c + c_2\delta^2 + c_4\delta^4 + \text{etc.}) - (c_1\delta + c_3\delta^3 + \text{etc.}).$$

Lorsque

$$(c + c_2\delta^2 + c_4\delta^4 + \text{etc.}) - (c_1\delta + c_3\delta^3 + c_5\delta^5 + \text{etc.}),$$

est un nombre positif N' , on a

$$N = md + N';$$

et par conséquent, le reste de la division de N par d , est le même que celui de N' par d .

Quand $c + c_2\delta^2 + c_4\delta^4 + \text{etc.}$, est moindre que.....
 $c_1\delta + c_3\delta^3 + \text{etc.}$, on ramène ce cas au précédent en empruntant sur md un multiple pd de d assez grand pour que

$$(c + c_2\delta^2 + c_4\delta^4 + \text{etc.}) + pd - (c_1\delta + c_3\delta^3 + \text{etc.}),$$

soit un nombre positif N' ; on a

$$N = (m - p)d + N';$$

et le reste de la division de N par d est le même que celui de N' par d .

On en déduit cette règle générale : *Pour calculer le reste de la division d'un nombre entier N , par un diviseur d , plus grand que la base b , prenez la différence δ entre d et b ; multipliez le 1^{er} chiffre à droite de N par 1, le 3^e par δ^2 , le 5^e par δ^4 , et ainsi de suite; de la somme de ces produits, augmentée, s'il le faut, d'un multiple de d , retranchez la somme des chiffres de rang pair multipliés respectivement par δ , par*

δ^3 , par δ^3 , etc.; si N' désigne le résultat de cette soustraction, le reste de la division de N par d , sera le même que celui de N' par d . Opérant sur N' , comme vous avez opéré sur N , et continuant les calculs jusqu'à ce que vous obteniez un nombre moindre que d , ce nombre sera le reste de la division de N par d .

EXEMPLE. Déterminer le reste de la division de N par 11, dans le système décimal.

On a $b = 10$, $\delta = 1$; la valeur de N' devient

$$N' = (c + c_1 + c_4 + \text{etc.}) + pd - (c_2 + c_3 + c_5 + \text{etc.}).$$

Ce qui conduit à la règle qui a été donnée (*Arith.* n° 37).

199. Il résulte du principe fondamental de la numération (n° 194), que lorsqu'on avance successivement d'un rang vers la droite d'un nombre écrit dans la base b , ses chiffres expriment des unités de b en b fois plus petites.

Par conséquent, si pour distinguer le chiffre des unités simples, on place une virgule de cette forme , à sa droite, le premier chiffre à droite de la virgule exprimera des unités dont la valeur sera $\frac{1}{b}$; chaque unité du chiffre suivant vaudra $\frac{1}{b^2}$.

Et en général, le n^{me} chiffre à droite de la virgule vaudra des unités dont la valeur sera $\frac{1}{b^n}$.

Par exemple,

$$(623,457)_b = 6b^2 + 2b + 3 + \frac{4}{b} + \frac{5}{b^2} + \frac{7}{b^3}.$$

200. Un nombre est multiplié ou est divisé autant de fois par la base b , que la virgule a été avancée de rangs vers la droite ou vers la gauche de ce nombre; car en avançant successivement d'un rang vers la droite d'un nombre, ses chiffres expriment des unités de b en b fois plus petites.

201. Quand un nombre N contient n chiffres à droite de la virgule, ce nombre est exprimé par une fraction ordinaire, dont le numérateur est le nombre donné dans lequel on a fait abs.

traction de la virgule, et dont le dénominateur est l'unité suivie de α zéro; car en supprimant la virgule, on multiplie N par b^α ; donc le résultat divisé par b^α , donne le nombre N .

202. Lorsque le dénominateur d'une fraction est l'unité suivie de α zéro vers la droite, pour mettre cette fraction sous la forme d'un nombre entier, il suffit d'écrire le numérateur, et de séparer, par la virgule, autant de chiffres à sa droite qu'il y a de zéro dans le dénominateur; car la valeur du dénominateur étant b^α , si l'on supprimait ce dénominateur, le résultat serait b^α fois trop grand; il faut donc diviser ce résultat par b^α , ce qui revient à séparer, par la virgule, α chiffres à la droite du numérateur. Ainsi,

$$\left(\frac{2}{100}\right)_{10} = (0,02)_2, \left(\frac{34567}{1000}\right)_2 = (34,567)_2, \left(\frac{23}{100000}\right)_5 = (0,00023)_5.$$

203. Pour mettre une fraction $\frac{c}{a}$ sous la forme d'un nombre entier, quand le dénominateur n'est pas l'unité suivie de plusieurs zéro, divisez c par a ; parvenu au chiffre des unités, placez une virgule à sa droite, et convertissez les restes successifs en unités de b en b fois plus petites, en mettant un zéro à la droite de chaque reste. Divisez ces dividendes par a ; les quotiens successifs seront les chiffres qui doivent suivre la virgule dans le quotient total. (On suppose que tous les nombres sont écrits dans la base b) (*).

En effet, lorsqu'on est parvenu au chiffre des unités du quotient, le reste est moindre que le diviseur a ; pour convertir ce reste en unités b fois plus petites que les unités simples, il suffit de le multiplier par b ; ce qui revient à mettre un zéro à sa droite; le dividende qui en résulte, divisé par le diviseur, dé-

(*) Pour faciliter ces divisions, on forme d'abord une table des produits du diviseur par les nombres $1, 2, 3, 4, \dots, b-1$, d'un seul chiffre, et on effectue ensuite les calculs par la méthode qui a été indiquée (*Arith.*, pages 252 et 253).

termine donc un quotient dont les unités sont b fois plus petites que les unités simples, c'est-à-dire des unités du 1^{er} ordre à droite de la virgule; pour obtenir le 2^e chiffre, on convertit le dernier reste en unités b fois plus petites, en mettant un zéro à sa droite; divisant le produit par a , on trouve un quotient et un reste moindres que b ; ce quotient est le 2^e chiffre à droite de la virgule; et ainsi de suite. Ce qui démontre la règle énoncée. On en déduit

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{300}\right)_{12} &= (0,024)_{12}, \quad \left(\frac{7}{3000}\right)_{12} = (0,0024)_{12}, \\ \left(\frac{1}{3}\right)_5 &= (0,131313 \text{ etc.})_5, \quad \left(\frac{2}{111}\right)_5 = (0,013013 \text{ etc.})_5, \\ \left(\frac{12}{30}\right)_5 &= (0,21313 \text{ etc.})_5, \quad \left(\frac{12}{3}\right)_5 = (2,1313 \text{ etc.})_5. \end{aligned}$$

REMARQUE. Lorsque des chiffres du quotient se reproduisent ainsi dans le même ordre et à l'infini, le quotient est dit *périodique*; les chiffres qui reviennent constamment forment la *période*; et selon que la période commence au premier chiffre à droite de la virgule ou après ce chiffre, le quotient est dit *périodique simple*, ou *périodique mixte*.

204. Tout quotient périodique peut être exprimé exactement par une fraction ordinaire équivalente. En effet :

1°. Soit un quotient périodique simple 0,PPP etc., moindre que l'unité, dont la période P est composée de p chiffres. En désignant par x la valeur cherchée de ce quotient indéfini, on aura

$$x = 0,PPPP \text{ etc.}, (*)$$

Si l'on pouvait en déduire une autre expression composée de la même partie périodique, en retranchant ces deux expressions l'une de l'autre, la partie périodique disparaîtrait, et il serait facile d'en déduire la valeur du quotient périodique pro-

(*) Par exemple, si le quotient périodique proposé est $(0,123\ 123\ 123 \text{ etc.})_5$, on aura $P = (123)_5$; et $p = 3$.

posé. Pour obtenir cette seconde expression, il suffit de placer la virgule à droite de la première période, ce qui revient à multiplier le quotient donné par b^p ; il en résulte

$$x \times b^p = P, PPPP \text{ etc.}$$

Retranchant la première égalité de la seconde, la partie périodique disparaît, et l'on trouve

$$x \times b^p - x = P; \text{ d'où (1) } \dots x = \frac{P}{b^p - 1}.$$

Or, $b^p - 1$ est un nombre composé de p chiffres égaux à $b - 1$; par conséquent, la formule (1) nous apprend que tout quotient périodique moindre que l'unité, dont la période commence au premier chiffre à droite de la virgule, est égal à une fraction ordinaire, qui a pour numérateur la période, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de chiffres égaux à $b - 1$, qu'il y a de chiffres dans la période. Ainsi,

$$(0,131313 \text{ etc.})_5 = \left(\frac{13}{44}\right)_5 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)_5.$$

$$(0,013013013 \text{ etc.})_5 = \left(\frac{013}{444}\right)_5 = \frac{8}{124} = \frac{2}{31} = \left(\frac{2}{111}\right)_5.$$

Lorsque $P = b - 1$, on a $p = 1$, $x = \frac{b-1}{b-1} = 1$.

Ainsi, $(0,7777 \text{ etc.})_8 = \frac{7}{7} = 1$.

REMARQUE. L'expression $0,PPP \text{ etc.}$, de x pouvant se décomposer en

$$\frac{P}{b^p} + \frac{P}{b^{2p}} + \frac{P}{b^{3p}} + \text{etc.},$$

il en résulte que x est égal à la somme des termes d'une progression géométrique décroissante prolongée à l'infini, dans laquelle, le premier terme est $a = \frac{P}{b^p}$ et la raison est $q = \frac{1}{b^p}$. On a vu (page 278) que la somme des termes de cette progression est

$\frac{a}{1-q}$, substituant les valeurs de a et q , on parvient à la formule (1).

2°. Soit un quotient périodique mixte quelconque.....
E₁NPPPP etc. (*). Si l'on désigne par x sa valeur, par n le nombre des chiffres de la partie non périodique N placée entre la virgule et la première période, et par p le nombre des chiffres de la période P , on aura

$$x = E, NPPPP \text{ etc.}$$

Pour en déduire deux expressions qui renferment la même partie périodique P , on transporte successivement la virgule à droite et à gauche de la première période; ce qui donne

$$ENP, PPP \text{ etc.}, \text{ et } EN, PPP \text{ etc.}$$

Or, en avançant ainsi la virgule de $n + p$ et de n rangs à droite, on multiplie x par b^{n+p} et par b^n (n° 197); donc

$$x \times b^{n+p} = ENP, PPP \text{ etc.}, \text{ et } x \times b^n = EN, PPP \text{ etc.}$$

Retranchant la seconde équation de la première, il vient

$$x \times b^{n+p} - x \times b^n = ENP - EN; \text{ d'où (2)... } x = \frac{ENP - EN}{(b^p - 1)b^n}.$$

Or, $b^p - 1$ est un nombre composé de p chiffres égaux à $b - 1$, et on multiplie ce nombre par b^n en plaçant n zéro à sa droite. La formule (2) conduit donc à cette règle générale :

Pour convertir un quotient périodique mixte en fraction ordinaire, transportez successivement la virgule à droite et à gauche de la première période; la différence entre les parties ENTIERES des deux nombres qui en résultent exprime le numéra-

(*) Lorsque $x = 9,34\ 587\ 587\ 587 \text{ etc.}$, on a

$E=9$, $N=34$, $n=2$, $P=587$, $p=3$, $ENP, PP \text{ etc.} = 934587,587 \text{ etc.}$,
 $ENP = 934587$, $EN, PP \text{ etc.} = 934,587 \text{ etc.}$, $EN = 934$. D'où

$ENP, P \text{ etc.} - EN, PP \text{ etc.} = ENP - EN = 934587 - 934$.

teur de la fraction demandée. Pour former le dénominateur, prenez un nombre composé d'autant de chiffres égaux à $b - 1$ qu'il y a de chiffres dans la période, et mettez autant de zéro à la droite de ce nombre qu'il y a de chiffres entre la virgule et la première période.

On trouve ainsi,

$$(0,21313 \text{ etc.})_5 = \left(\frac{213-2}{440}\right)_5 = \left(\frac{211}{440}\right)_5 = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} = \left(\frac{12}{30}\right)_5.$$

1^{re} REMARQUE. On peut déduire la valeur (2) de x , de la règle qui a été donnée (1^o), il suffit pour cela d'avancer la virgule à droite de N , dans la valeur $E, NPPP$ etc. de x ; car comme cela revient à multiplier par b^p , il en résulte

$$x \times b^p = EN, PPP \text{ etc.} = EN + 0, PPP \text{ etc.}$$

Or, d'après (1^o), on a

$$0, PPP \text{ etc.} = \frac{P}{b^p - 1}.$$

$$\text{Donc } x \times b^p = EN + \frac{P}{b^p - 1} = \frac{EN(b^p - 1) + P}{b^p - 1}.$$

$$\text{Mais, } EN(b^p - 1) + P = EN \times b^p + P - EN,$$

et $EN \times b^p$ étant égal à EN suivi de p zéro, on voit que $EN \times b^p + P$ revient à ENP . Donc

$$x \times b^p = \frac{ENP - EN}{(b^p - 1)}; \text{ d'où (2)... } x = \frac{ENP - EN}{(b^p - 1)b^p}.$$

2^e. REMARQUE. La règle précédente convient aux fractions périodiques simples plus grandes que l'unité; car en supposant

$$x = E, PPP \text{ etc.}, \text{ il en résulte } x \times b^p = EP, PPP \text{ etc.},$$

et en retranchant la 1^{re} égalité de la 2^e, il vient

$$x \times b^p - x = EP - E; \text{ d'où } x = \frac{EP - E}{b^p - 1}.$$

Ainsi,

$$(2,131313 \text{ etc.})_5 = \left(\frac{213-2}{44}\right)_5 = \left(\frac{211}{44}\right)_5 = \frac{56}{44} = \frac{7}{3} = \left(\frac{12}{3}\right)_5.$$

205. On peut toujours reconnaître d'avance si la division du numérateur d'une fraction $\frac{B}{A}$ par son dénominateur, effectuée d'après la règle du n° 203, conduira à un quotient exact ou périodique. En effet :

1°. Quand le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéro, la règle du n° 202 fournit immédiatement la valeur exacte du quotient.

2°. Lorsque le dénominateur n'étant pas l'unité suivie de plusieurs zéro, ne contient que les facteurs premiers de la base b du système de numération, la division du numérateur B par le dénominateur A , effectuée d'après la règle du n° 203, conduit toujours à un quotient exact.

Cela revient à démontrer qu'on peut toujours déterminer un nombre entier c tel que $\frac{Bc}{Ac}$ soit de la forme $\frac{M}{b^c}$, M et c désignant des nombres entiers positifs.

Pour trouver c , nous décomposerons b et A en leurs facteurs premiers, et afin de simplifier, nous supposerons que la base b ne renferme que deux facteurs premiers p, q , (les raisonnemens seraient les mêmes si le nombre des facteurs était différent). De sorte que

$$b = p^a q^c, \quad A = p^m q^n.$$

Or, quelle que soit l'indéterminée x , on a

$$\frac{B}{A} = \frac{Bb^x}{Ab^x} = \frac{Bp^{ax}q^{cx}}{p^m q^n b^x} = \frac{Bp^{ax-m} \times q^{cx-n}}{b^x}.$$

D'ailleurs, il existe une infinité de valeurs entières positives de x qui rendent $ax-m$ et $cx-n$ positifs; car ces binômes pouvant se mettre sous la forme $a\left(x-\frac{m}{a}\right)$, $c\left(x-\frac{n}{c}\right)$, on voit que toute valeur entière positive de x plus grande que chacune des quantités $\frac{m}{a}$, $\frac{n}{c}$, jouit de la propriété demandée. Le principe est donc démontré.

REMARQUE. Lorsque la fraction $\frac{B}{A}$ est réduite à sa plus simple expression ; si δ désigne la plus petite des valeurs entières positives de x qui rendent $ax - m$ et $Cx - n$ positifs, le quotient de B par A contiendra δ chiffres à droite de la virgule.

En effet ; soit $x = \delta$, l'expression de $\frac{B}{A}$ deviendra

$$\frac{B}{A} = \frac{Bp^{a\delta-m} \times q^{c\delta-n}}{b^\delta}.$$

Le numérateur $Bp^{a\delta-m} \times q^{c\delta-n}$, sera un nombre entier positif M , et les fractions $\frac{B}{A}$, $\frac{M}{b^\delta}$ étant égales, le quotient de B

par A sera le même que celui de M par b^δ . Or, ce dernier quotient contiendra δ chiffres à droite de la virgule, à moins que M ne soit divisible par b , et cela n'est pas possible, car d'après l'hypothèse, toutes les valeurs entières positives de x moindres que δ rendant $ax - m$ ou $Cx - n$ négatif, l'un des nombres $a(\delta-1) - m$, $C(\delta-1) - n$, est négatif ; on a donc $a\delta - m < a$ ou $C\delta - n < C$; comparant la valeur $Bp^{a\delta-m} \times q^{c\delta-n}$ de M , à la valeur $p^a q^C$ de b , on voit qu'un des facteurs p, q , est contenu moins de fois dans M que dans b ; M n'est donc pas divisible par b ; ce qui démontre le principe énoncé.

EXEMPLE. Soit $b = 12$, $\frac{B}{A} = \left(\frac{5}{16}\right)_{12}$.

On a $A = (16)_{12} = 18 = 2 \times 3^2$, $b = 2^2 \times 3$,

$$\frac{B}{A} = \frac{5 \times b^x}{2 \times 3^2 \times b^x} = \frac{5 \times 2^{2x} \times 3^x}{2 \times 3^2 \times b^x} = \frac{5 \times 2^{2x-1} \times 3^{x-2}}{b^x}.$$

La plus petite valeur entière positive de x qui rend $2x - 1$ et $x - 2$ positifs, étant 2, le quotient de B par A renfermera deux chiffres à droite de la virgule ; et en effet, l'hypothèse $x = 2$ donne

$$\frac{B}{A} = \frac{5 \times 2^3 \times 3^0}{b^2} = \frac{40}{b^2} = \frac{(34)_{12}}{b^2} = (0,34)_{12} = \left(\frac{5}{16}\right)_{12}.$$

La division de $(5)_{12}$ par $(16)_{12}$, effectuée d'après la règle du n° 203, fournit le quotient exact $(6,34)_{12}$.

3°. Quand le dénominateur A d'une fraction irréductible $\frac{B}{A}$ contient d'autres facteurs premiers que ceux de la base b , la division de B par A conduit à un quotient qui se prolonge indéfiniment et qui est périodique (simple ou mixte). En effet; si la division de B par A donnait un quotient exact de n chiffres, ce quotient serait égal à une fraction ordinaire $\frac{M}{b^n}$ (n° 201). On aurait

$$\frac{B}{A} = \frac{M}{b^n}; \text{ d'où } AM = B \times b^n.$$

Soit d un facteur premier de A qui n'entre pas dans b ; d divisant AM devrait diviser $B \times b^n$; or d est premier avec b , et par conséquent avec b^n ; d diviserait donc B (n° 179); A et B auraient donc un facteur commun d ; ce qui est impossible, puisque la fraction $\frac{B}{A}$ est supposée irréductible. Le quotient de B par A se prolonge donc indéfiniment.

Je dis de plus que ce quotient est périodique; car puisqu'on obtiendra une infinité de restes qui seront entiers, positifs, et moindres que le diviseur A , on retombera nécessairement sur un reste déjà obtenu, après avoir trouvé A chiffres au plus au quotient. Multipliant ce reste par la base b , et continuant la division, on aura pour dividendes partiels des nombres égaux aux précédents et qui se succéderont dans le même ordre; donc on retrouvera au quotient et dans le même ordre, les chiffres qui ont été déjà obtenus. Par conséquent, le quotient sera périodique.

4°. Quand le dénominateur A d'une fraction irréductible $\frac{B}{A}$ ne contient aucun des facteurs premiers de la base b , la division de B par A fournit un quotient périodique simple; c'est-à-dire que la période commence au premier chiffre à droite de la virgule. En effet; on vient de prouver (3°) que le quotient

est périodique; il suffit donc de démontrer que la période commence au premier chiffre à droite de la virgule.

Si la période ne commençait pas au premier chiffre à droite de la virgule, on aurait

$$\frac{B}{A} = E, NPPP \text{ etc.} = \frac{ENP - EN}{(b^p - 1)b^n}, \quad (n^o 204, 2^o);$$

d'où $B(b^p - 1)b^n = A \times (ENP - EN)$.

Or, b divise le premier membre de cette égalité; b doit donc diviser le second membre; mais b est premier avec A ; b doit donc diviser $ENP - EN$, ($n^o 179$); ce qui exige que le premier chiffre à droite de $ENP - EN$ soit un zéro; le premier chiffre à droite de la partie non périodique N doit donc être égal au premier chiffre à droite de la période P . Il est facile de voir que cela n'est pas possible; car soient $a, b, \dots, d, e$, les n chiffres de N , et $a, c, \dots, d, e$, les p chiffres de la période P ; si l'on avait $e = e$, le quotient périodique mixte

$E, ab \dots de ac \dots da ac \dots da \text{ etc.}$, deviendrait

$E, ab \dots d ac \dots da ac \dots da \text{ etc.}$

La période P deviendrait $ac \dots da$, et le premier chiffre à droite de la partie non périodique devenant d , cette partie non périodique ne contiendrait que $n - 1$ chiffres; ce qui est contre l'hypothèse. Il est donc absurde de supposer que la période ne commence pas au premier chiffre à droite de la virgule.

5°. Lorsque le dénominateur A d'une fraction irréductible $\frac{B}{A}$ renferme des facteurs premiers de la base b combinés avec d'autres facteurs premiers, la division de B par A conduit à un quotient périodique mixte.

On a prouvé (*page 334, 3°*) que le quotient est périodique. Il suffit donc de démontrer que la période ne peut pas commencer au premier chiffre à droite de la virgule.

Si le quotient était périodique simple, il serait exprimé par une fraction ordinaire de la forme $\frac{M}{b^n - 1}$, dans laquelle M et

n représenteraient des nombres entiers (n^o 204, 1^o; et 2^o *Remarque*, page 331). On aurait

$$\frac{B}{A} = \frac{M}{b^n - 1}; \text{ d'où } AM = B \times (b^n - 1).$$

Soit p un des facteurs premiers de b qui entre dans A ; p divisant AM devrait diviser $B \times (b^n - 1)$; or p ne saurait diviser B , puisque B et A sont supposés premiers entre eux; p devrait donc diviser $b^n - 1$ (n^o 179), mais p divise b^n ; p diviserait donc deux nombres entiers consécutifs $b^n - 1$, b^n ; ce qui est absurde (n^o 178, 4^o). Le principe est donc démontré.

Nous allons parvenir à la même propriété par d'autres considérations qui offriront en outre l'avantage de faire connaître le nombre des chiffres qui se trouvent entre la virgule et la première période. Soit $b = p^a q^c$ (*).

On pourra mettre A sous la forme $A = p^m q^n A'$, A' étant un nombre entier qui ne renferme aucun des facteurs premiers p , q , de b . On aura, quel que soit x ,

$$\frac{B}{A} = \frac{Bb^x}{Ab^x} = \frac{Bp^{ax}q^{cx}}{p^m q^n A' b^x} = \frac{Bp^{ax-m} \times q^{cx-n}}{A' b^x}.$$

Désignant par δ la plus petite des valeurs entières positives de x qui rendent $ax - m$ et $cx - n$ positifs, et faisant $x = \delta$, le numérateur $Bp^{a\delta-m} \times q^{c\delta-n}$ sera un nombre entier positif B' qui ne sera pas divisible par b , et on aura

$$\frac{B}{A} = \frac{B'}{A' b^\delta}.$$

Le nombre A' ne contenant aucun des facteurs premiers p , q , de la base b , la division de B' par A' fournira un quotient périodique simple E, PPP etc. (page 334, 4^o). Or, pour en déduire la valeur $\frac{B'}{A' b^\delta}$ de $\frac{B}{A}$, il suffit de diviser E, PPP etc. par b^δ , ce qui revient à avancer la virgule de δ rangs à gauche dans

(*) On suppose que la base b ne renferme que deux facteurs premiers p , q . Les raisonnemens seraient les mêmes pour tout autre nombre de facteurs.

E, PPP etc. Il sera donc démontré que le quotient de B par A est périodique mixte et renferme d chiffres entre la virgule et la première période, si l'on peut faire voir que le premier chiffre à droite de E est différent du premier chiffre à droite de P .

Or, on a vu (page 331), que

$$E, PPP \text{ etc.} = \frac{EP - E}{b^p - 1}; \text{ donc } \frac{B'}{A'} = \frac{EP - E}{b^p - 1}.$$

On en tire $(EP - E) A' = (b^p - 1) B'$.

Cela posé : si le premier chiffre à droite de E était le même que celui de P , le nombre $EP - E$ serait divisible par la base b , car il serait terminé par un zéro; b diviserait donc $(b^p - 1) B'$. Mais b est premier avec $b^p - 1$ (*); b diviserait donc B' , ce qui est contre l'hypothèse. Le principe est donc démontré.

* 206. Lorsque le dénominateur A d'une fraction est premier avec la base b , toutes les fractions irréductibles moindres que l'unité qui ont ce même dénominateur, conduisent à des quotiens périodiques simples dont toutes les périodes renferment le même nombre de chiffres.

En effet; si l'on divise l'unité par A , on obtiendra un quotient périodique simple (n° 205, 4°). Soient, P la période et p le nombre des chiffres de cette période, on aura

$$(1) \dots \frac{1}{A} = 0, PPP \text{ etc.} = \frac{P}{b^p - 1}.$$

Multipliant par un nombre entier quelconque B moindre que A et premier avec A , il viendra

$$\frac{B}{A} = 0, BP.BP.BP \text{ etc.} = \frac{BP}{b^p - 1}.$$

Le produit BP ne pourra jamais avoir plus de p chiffres, car

(*) Si un nombre premier γ pouvait diviser b et $b^p - 1$, les deux nombres entiers consécutifs b^p , $b^p - 1$, admettraient un commun diviseur γ ; ce qui n'est pas possible (n° 178, 4°).

autrement la valeur $\frac{BP}{b^p - 1}$ de $\frac{B}{A}$ surpasserait l'unité, ce qui est contre l'hypothèse; la fraction $\frac{B}{A}$ sera donc exprimée par un quotient périodique simple dont la période BP sera composée de p chiffres. Ce qui démontre le principe énoncé.

$$\text{Ainsi, } \left(\frac{1}{3}\right)_5 = (0,1313 \text{ etc.})_3, \quad \left(\frac{2}{3}\right)_5 = (0,3131 \text{ etc.})_3.$$

* 207. 1^{er} PROBLÈME. Déterminer par quel nombre entier il faut multiplier un nombre connu A premier avec la base b , pour que tous les chiffres du produit soient égaux à $b-1$.

La division de l'unité par A fournira un quotient périodique simple dont la période P sera le nombre cherché; car la relation (1), (page 337), donne $A \times P \equiv b^p - 1$, et $b^p - 1$ est composé de p chiffres égaux à $b-1$.

* 2^e PROBLÈME. La base d'un système de numération est un nombre pair $2b$; on connaît les produits deux à deux des nombres $1, 2, 3, \dots, b$; il s'agit d'en déduire le produit de deux nombres entiers quelconques, n, n' , compris entre $b-1$ et $2b$.

Pour y parvenir, on retranche successivement n et n' de $2b$; cela fournit deux restes r, r' , qui ne peuvent surpasser b , et dont le produit rr' est par conséquent connu. On ôte successivement r et r' de b ; ce qui détermine deux autres restes R, R' . Nous allons faire voir que le produit nn' cherché est composé de $R+R'$ unités du second ordre, et de $r \times r'$ unités du premier ordre. En effet, on a

$$2b - n = r, \quad 2b - n' = r', \quad R = b - r, \quad R' = b - r'.$$

D'où

$$n = 2b - r, \quad n' = 2b - r', \quad nn' = 2b(2b - r - r') + rr'.$$

Or,

$$R + R' = 2b - r - r'; \quad \text{donc} \quad nn' = 2b(R + R') + rr'.$$

Cette dernière égalité démontre la règle énoncée, car $2b$ étant la base, $2b(R + R')$ exprimé $R + R'$ unités du second ordre.

REMARQUE. Lorsque la base $2b$ est égale à dix, on peut simplifier l'application de la règle générale, en faisant usage des dix doigts des mains, de la manière suivante :

On lève les dix doigts des deux mains, on retranche chaque facteur de dix; on abaisse ensuite autant de doigts dans chaque main qu'il y a d'unités dans chaque reste. La somme des doigts levés exprime les dizaines du produit demandé; les unités de ce produit s'obtiennent en multipliant l'un par l'autre, les nombres des doigts baissés dans chaque main.

* 3^e PROBLÈME. Trouver un nombre entier x tel que si l'on multiplie son carré et son cube par un nombre entier connu m , la différence $mx^3 - mx^2$ des deux produits soit un carré :

Après avoir décomposé le nombre m en ses facteurs premiers, on pourra le mettre sous la forme $a^2 \times c$; c désignant un nombre entier dont tous les facteurs premiers sont élevés à la première puissance. La différence $mx^3 - mx^2$ devenant $m(x-1)x^2$ ou $c(x-1)a^2x^2$, il suffit de déterminer x de manière que $c(x-1)$ devienne un carré; ce qui exige que $x-1=c$; d'où $x=c+1$.

Cette valeur de x jouit de la propriété demandée, car elle réduit $mx^3 - mx^2$ à $a^2c^3(c+1)^3$, qui est le carré de $a^2c(c+1)$.

EXEMPLE. Soit $m=9000$; on trouvera

$$m=2^3 \times 3^2 \times 5^3 = (2.3.5)^2 \times 2.5 = 30^2 \times 10.$$

On aura

$$a=30, \quad c=10, \quad x=11, \quad a^2c(c+1)=3300.$$

Et en effet,

$$11^3 \times 9000 - 11^2 \times 9000 = 10890000 = 3300^2.$$

REMARQUE. Si la somme $mx^2 + mx^3$ devait être un carré, on trouverait

$$x=c-1, \quad mx^2 + mx^3 = a^2c^3(c-1)^2.$$

EXEMPLE. Soit $m=9000$; on aura

$$a=30, \quad c=10, \quad x=9, \quad mx^2 + mx^3 = 2700^2.$$

§ III. THÉORIE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

208. Nous ne considérerons dans toute cette théorie que des quantités *rationnelles* et *entières*; c'est-à-dire des quantités qui ne renferment pas de radicaux, ni de fractions, et dans lesquelles toutes les lettres sont affectées d'exposans entiers positifs.

On dit qu'une quantité est *première*, lorsqu'elle n'est divisible par aucune quantité entière autre qu'elle-même et l'unité. Ainsi, b , $x+1$, $a-b$, sont des quantités premières; la quantité a^2-b^2 n'est pas première, car elle se décompose en deux facteurs premiers $a+b$, $a-b$.

Des quantités entières sont dites *premières entre elles*, lorsqu'elles n'admettent aucun facteur commun. Ainsi, les quantités abc , def , sont premières entre elles; on dit aussi que abc est *premier* avec def .

209. Le PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR de plusieurs quantités entières, est le produit de tous leurs facteurs premiers communs, numériques, monomes et polynomes.

210. Par conséquent : lorsque les facteurs premiers de plusieurs quantités sont en évidence, on obtient directement leur plus grand commun diviseur en formant un produit dans lequel chacun de ces facteurs premiers entre autant de fois qu'il se trouve dans celle de ces quantités où il entre le plus petit nombre de fois, (*Arith.*, n° 50, page 47).

Ainsi, le plus grand commun diviseur des monomes $a^3b^3c^3$, $a^5b^4d^2$, $a^2b^4c^3d$, est a^2b^3 , et celui des trois quantités $(a-b)^2(c-d)^3$, $(a-b)^5(c-d)$, $(a-b)^4(c-d)(c+1)$, est $(a-b)^2 \times (c-d)$.

211. Il est facile de trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs monomes, car on l'obtient en multipliant le plus grand commun diviseur des coefficients numériques des monomes par le plus grand commun diviseur littéral de ces monomes. On a vu en Arithmétique comment on détermine le plus grand commun diviseur numérique; et le plus grand commun di-

viseur littéral des monomes s'obtient immédiatement, car il est en évidence.

Ainsi, pour déterminer le plus grand commun diviseur des monomes $48a^3b^3c^3$, $18a^6b^4d^2$, $15a^2b^4c^3d$, on cherche d'abord le plus grand commun diviseur des coefficients 48, 18 et 15, qui est 3; le plus grand commun diviseur des monomes algébriques $a^3b^3c^3$, $a^6b^4d^2$, $a^2b^4c^3d$, est a^2b^3 (n° 210); de sorte que le plus grand commun diviseur demandé est $3a^2b^3$.

212. Occupons-nous maintenant de la *recherche du plus grand commun diviseur entre des polynômes entiers*.

Lorsqu'un polynôme divise exactement un autre polynôme, il est évidemment le plus grand commun diviseur de ces deux polynômes.

Par conséquent, pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers A, B, il est naturel de diviser ces polynômes l'un par l'autre; à cet effet, on les ordonne suivant les puissances décroissantes d'une même lettre x , et on divise A par B (on suppose que le plus fort exposant de x dans B n'est pas plus grand que dans A). Quand cette division conduit à un reste nul, B est le plus grand commun diviseur demandé. Quand on trouve un quotient entier Q et un reste R, on a l'identité $A = BQ + R$; d'où $R = A - BQ$.

Les polynômes A, B, Q, R, étant supposés entiers (*), la 2^e identité fait voir que tout diviseur commun à A et B divise R, et la première prouve que tout diviseur commun à B et R divise A; tous les facteurs communs à A et B, sont donc les mêmes que ceux de B et R; le produit de tous les facteurs communs à A et B, étant le même que celui de tous les facteurs communs à B et R, le plus grand commun diviseur de A et B est le même que celui de B et R.

(*) Nous supposons ici, que les divisions successives ne fournissent que des termes entiers au quotient: c'est-à-dire que le coefficient du premier terme de chaque dividende partiel est exactement divisible par le coefficient du premier terme du diviseur. Nous verrons comment il faut opérer quand cette condition n'est pas remplie.

Cette propriété ayant lieu quel que soit le nombre des termes obtenus au quotient, on pourra continuer la division des restes successifs par B, jusqu'à ce qu'on parvienne à un dernier reste moindre que le diviseur B.

Par conséquent : *le plus grand commun diviseur de deux quantités, est le même que celui qui existe entre la plus petite de ces quantités et le reste de la division de la plus grande par la plus petite.*

La question étant réduite à déterminer le plus grand commun diviseur de B et R, on divise B par R. Quand cette division conduit à un reste nul, R est le plus grand commun diviseur de B et R, et par suite de A et B. Lorsque B n'est pas exactement divisible par R, on parvient à un reste R' *moindre* (*) que R; le plus grand commun diviseur de R et R' est le même que celui de B et R, et que celui de A et B.

Si l'on continue à diviser les restes successifs les uns par les autres, les exposans de x , dans ces restes, iront en diminuant, et comme ces exposans sont des nombres entiers positifs, on parviendra nécessairement à un dernier reste K indépendant de x .

Quand le reste K sera nul, le reste précédent, qui contient nécessairement x , sera le plus grand commun diviseur de A et B; car, il résulte des raisonnemens précédens que ce plus grand commun diviseur est le même que celui de deux restes consécutifs quelconques.

Lorsque le dernier reste K ne sera pas nul, les polynomes A, B, ne pourront admettre qu'un commun diviseur indépendant de x ; car ce commun diviseur doit diviser le reste K qui ne renferme pas x . Ce plus grand commun diviseur devra donc diviser exactement les coefficients des diverses puissances de x dans A et B (n° 27). De sorte que la question sera ainsi ra-

(*) Il ne faut pas perdre de vue, que lorsqu'on dit qu'un polynome est *moindre* qu'un autre, on sous-entend que ces polynomes étant ordonnés par rapport à une lettre, le plus fort exposant de cette lettre est *moindre* dans le premier polynome que dans le second (page 9).

menée à déterminer le plus grand commun diviseur entre ces coefficients; et la difficulté est diminuée, puisque ces coefficients renferment une lettre de moins que les polynômes proposés.

1^{er} EXEMPLE. Soient les deux polynômes

$$A = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6,$$

$$B = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Pour trouver leur plus grand commun diviseur, on dispose et on exécute le calcul de la manière suivante :

1^{re} Division.

$$\begin{array}{r|l} A = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 & B = x^4 - 5x^2 + 4 \\ -x^4 & + 5x^2 & -4 \\ \hline 1^{er} \text{ reste} \dots R = & x^3 - 2x^2 - x + 2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} + 1 \\ \hline \end{array}$$

2^e Division.

$$\begin{array}{r|l} B = x^4 - 5x^2 + 4 & R = x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ -x^4 + 2x^2 + x - 2 & \\ \hline \text{Reste} \dots & 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 \\ -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 & \\ \hline \text{Reste} \dots & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2 \\ \hline \end{array}$$

La division de A par B fournit le quotient $+1$ et le reste $R = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Ce reste étant moindre que le diviseur B, on divise B par R, ce qui donne le reste zéro, et le quotient exact $x + 2$.

Le reste R est le plus grand commun diviseur de A et B; car ce diviseur commun est le même que celui de B et R, et ce dernier est R, puisque R divise B.

Il est facile de s'assurer que R est effectivement le plus grand commun diviseur des polynômes A, B; car on peut mettre ces polynômes sous la forme

$$A = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 3),$$

$$B = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2);$$

et l'on voit alors que leur plus grand commun diviseur est le produit $x^3 - 2x^2 - x + 2$ des facteurs premiers $x - 1$, $x + 1$, $x - 2$, communs à A et B.

2^e EXEMPLE. $A = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 2$, $B = x^4 - 5x^3 + 4$.

Des calculs analogues aux précédens conduisant à un reste numérique $+8$, les polynomes proposés n'ont pas de commun diviseur; car s'ils en avaient un, ce commun diviseur devant diviser le reste 8, serait indépendant de x , et par suite devrait diviser tous les coefficients de x dans A et B ; ce qui est impossible, puisque ces coefficients sont premiers entre eux.

En général, toutes les fois que les coefficients des diverses puissances de x étant premiers entre eux, dans A et dans B , on parvient à un reste indépendant de x , qui n'est pas nul, on est certain que A et B n'ont pas de plus grand commun diviseur.

213. La théorie que nous venons d'exposer, suppose que tous les quotiens sont entiers, ce qui exige que le coefficient du premier terme de chaque dividende partiel soit exactement divisible par le coefficient du premier terme du diviseur correspondant; quand cette condition n'est pas remplie, on ramène ce cas au précédent à l'aide de quelques principes que nous allons établir.

D'après la définition du plus grand commun diviseur algébrique :

1^o. Le plus grand commun diviseur de deux quantités ne change pas, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise l'une d'elles, par une quantité qui n'a aucun facteur commun avec l'autre; car ces opérations ne sauraient changer les facteurs communs aux deux quantités.

Ainsi, le plus grand commun diviseur de abc et $abde$, est le même que celui qui existe entre abc et abd .

2^o. Lorsqu'on sait trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités, on en déduit celui d'un nombre quelconque de quantités. Par exemple, pour obtenir le plus grand diviseur commun à trois quantités représentées par A , B , C , on cherche le plus grand commun diviseur D de A et B , et le plus grand commun diviseur D' de D et C ; D' exprime le plus grand commun diviseur demandé; car d'après la définition du plus grand commun diviseur, D exprime le produit des fac-

teurs premiers communs à A et B, et D' est celui des facteurs communs à D et C; donc D' est le produit de tous les facteurs communs aux trois quantités A, B, C; donc enfin D' est leur plus grand commun diviseur.

3°. *Lorsqu'on aperçoit un facteur commun à plusieurs quantités, on peut simplifier la recherche de leur plus grand commun diviseur.* En effet; soient

$$A = A'D, \quad B = B'D, \quad C = C'D.$$

Le plus grand commun diviseur de A, B, C, s'obtiendra en multipliant le facteur commun D, par le plus grand commun diviseur des quantités A', B', C'.

214. Cette dernière propriété fournit le moyen de simplifier la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers P, Q. A cet effet, on détermine d'abord le plus grand commun diviseur monome α des termes de P, et le plus grand commun diviseur monome ϵ des termes de Q; on divise P par α et Q par ϵ , ce qui fournit des quotiens exacts A, B; le plus grand commun diviseur de α et ϵ est le plus grand commun diviseur monome M des polynômes proposés P, Q. Or on sait trouver les plus grands communs diviseurs monomes α , ϵ , M (n° 211). La question est donc réduite à calculer le plus grand commun diviseur D des polynômes entiers A, B, car le produit $M \times D$ sera le plus grand commun diviseur de P et Q.

EXEMPLE. Soient les deux polynômes

$$P = 48y^3x^6 - 120y^3x^5 + 12y^3x^4 - 12y^3x^3$$

$$Q = 48y^3x^7 - 88y^3x^6 - 64y^3x^5 - 8y^3x^4.$$

On trouve

$$\alpha = 12y^3x^3, \quad \epsilon = 8y^3x^4, \quad M = 4y^3x^3,$$

$$A = 4x^3 - 10x^2 + x - 1, \quad B = 6x^3 - 11x^2 - 8x - 1.$$

On verra (n° 215) que le plus grand commun diviseur de A et B est $x^2 - 2x - 1$; celui de P et Q est donc

$$4y^3x^3 \times (x^2 - 2x - 1).$$

La recherche des plus grands communs diviseurs monomes

α , ζ , M , ne pouvant offrir aucune difficulté, nous supposons toujours qu'on a supprimé ces plus grands communs diviseurs, comme il vient d'être indiqué; de sorte qu'il ne s'agira plus que de déterminer le plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers A , B , tels qu'aucun monome ne peut diviser ni A ni B .

215. Lorsque les polynômes proposés ne contiennent qu'une seule lettre x , il est facile de trouver leur plus grand commun diviseur.

EXEMPLE. Soient les deux polynômes

$$A = 4x^4 - 10x^3 + x^2 - 1, \quad B = 6x^3 - 11x^2 - 8x - 1.$$

Ils ne renferment aucun commun diviseur indépendant de x ; car tout diviseur de cette espèce serait un nombre qui devrait diviser les coefficients des diverses puissances de x (n° 27), ce qui est impossible, puisque ces coefficients sont premiers entre eux.

Pour déterminer le plus grand commun diviseur de A et B , on dispose et on exécute le calcul de la manière suivante :

1^{re} Division.

$$\begin{array}{r}
 A = 4x^4 - 10x^3 + x^2 - 1 \\
 A \times 3 = 12x^4 - 30x^3 + 3x^2 - 3 \\
 \hline
 -12x^4 + 22x^3 + 16x^2 + 2x \\
 \hline
 1^{er} \text{ reste, } \dots \dots r = -8x^3 + 19x^2 + 2x - 3 \\
 r \times 3 = -24x^3 + 57x^2 + 6x - 9 \\
 \hline
 +24x^3 - 44x^2 - 32x - 4 \\
 \hline
 2^{e} \text{ reste, } \dots \dots r' = 13x^2 - 26x - 13 \\
 R = x^2 - 2x - 1 = \frac{r'}{13}.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 B = 6x^3 - 11x^2 - 8x - 1 \\
 \hline
 2x - 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

2^e Division.

$$\begin{array}{r}
 B = 6x^3 - 11x^2 - 8x - 1 \\
 -6x^3 + 12x^2 + 6x \\
 \hline
 x^2 - 2x - 1 \\
 -x^2 + 2x + 1 \\
 \hline
 \text{Reste } \dots \dots 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 - 2x - 1 = R \\
 \hline
 6x + 1
 \end{array}$$

Dans la première division, le diviseur B ne contenant aucun

facteur indépendant de x ; on n'altère pas le plus grand commun diviseur demandé en multipliant le dividende par un nombre quelconque, car ce nombre est premier avec B . Ainsi, pour éviter les fractions, on pourrait multiplier le dividende par le coefficient 6 du premier terme du diviseur; mais il suffit ici de multiplier par 3, car le premier terme $12x^4$ du nouveau dividende $A \times 3$ est exactement divisible par le premier terme $6x^3$ du diviseur; et le plus grand commun diviseur de $A \times 3$ et B est le même que celui de A et B , puisque 3 est premier avec B . On divise donc $A \times 3$ par B , ce qui donne le quotient $2x$ et le reste

$$r = -8x^3 + 19x^2 + 2x - 3.$$

Le plus grand commun diviseur demandé étant le même que celui de B et r (page 342), on est conduit à diviser r par B ; on rend la division possible, sans changer le plus grand commun diviseur cherché, en multipliant r par 3; la division de $3r$ par B donne le quotient -4 et le reste

$$r' = 13x^3 - 26x - 13.$$

Le plus grand commun diviseur demandé est le même que celui de B et r' ; et comme r' renferme le facteur 13 qui est premier avec B , on peut supprimer ce facteur sans changer le plus grand commun diviseur; ce qui donne le quotient

$$R = \frac{r'}{13} = x^3 - 2x - 1.$$

La question se trouve ainsi réduite à chercher le plus grand commun diviseur entre B et R ; et comme R est moindre que B , on divise B par R ; cette division se fait sans qu'il soit nécessaire d'introduire aucun facteur dans les dividendes partiels. On parvient à un reste nul, et l'on en conclut que $x^3 - 2x - 1$ est le plus grand commun diviseur cherché.

Si l'on divise A et B par $x^3 - 2x - 1$, on obtiendra des quotiens exacts

$$4x^3 - 2x + 1, \quad 6x + 1.$$

Ces quotiens sont premiers entré eux; car en cherchant leur plus grand commun diviseur, on parvient à un reste indépendant de x .

On trouvera de cette manière le plus grand commun diviseur de deux polynomes quelconques contenant une seule lettre; et le principe du n° 213 (2°) fournira le moyen de déterminer le *plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes qui contiennent une seule lettre*.

216. La manière de *déterminer le plus grand commun diviseur de deux polynomes entiers A, B qui contiennent deux lettres x, y*, se déduit de ce qui précède. On ordonne ces polynomes par rapport aux puissances décroissantes de x , ce qui conduit à des résultats de la forme

$$\begin{aligned} A &= Px^m + Qx^{m-1} + \dots + Sx + T, \\ B &= px^n + qx^{n-1} + \dots + sx + t. \end{aligned}$$

On suppose toujours que $P, Q, \dots, S, T$ n'ont pas de commun diviseur monome, et qu'il en est de même de $p, q, \dots, s, t$.

Pour trouver la partie du commun diviseur cherché qui ne renferme pas x , on observe que si A et B ont un commun diviseur indépendant de x , il devra diviser tous les coefficients des diverses puissances de x dans A et B (n° 27). Ces coefficients ne contenant que la seule lettre y , on sait trouver, le plus grand commun diviseur α des coefficients $P, Q, \dots, S, T$, le plus grand commun diviseur ζ des coefficients $p, q, \dots, s, t$, et le plus grand commun diviseur γ de α et ζ . La quantité γ est le plus grand commun diviseur indépendant de x des polynomes A, B .

Pour trouver le plus grand commun diviseur dépendant de x , on divise A par α et B par ζ , ce qui s'exécute en divisant tous les coefficients de x dans A par α et ceux de x dans B par ζ (n° 27). Désignant par A' et B' les quotiens de A par α et de B par ζ , on obtient des résultats de la forme

$$\begin{aligned} A' &= P'x^m + Q'x^{m-1} + \dots + S'x + T', \\ B' &= p'x^n + q'x^{n-1} + \dots + s'x + t'. \end{aligned}$$

Tous les coefficients $P', Q', \dots, S', T'$, sont premiers entre eux, ainsi que $p', q', \dots, s', t'$.

Il ne s'agit plus que de déterminer le plus grand commun diviseur X de A' et B' ; car le produit de X par Y contenant tous les facteurs communs aux polynomes A, B , sera leur plus grand commun diviseur.

Or, les coefficients $P', Q', \dots, S', T'$, étant premiers entre eux, A' n'admet aucun facteur indépendant de x , et il en est de même de B' . Toute quantité indépendante de x sera donc première avec A' et avec B' .

Pour obtenir le plus grand commun diviseur X de A' et B' , on divise A' par B' , et comme B' n'a aucun facteur indépendant de x , on n'altère pas le plus grand commun diviseur X de A' et B' , en multipliant ou en divisant chaque dividende partiel par des quantités indépendantes de x ; car ces quantités sont premières avec B' . Par conséquent, dans la division de A' par B' , on pourra rendre possible la division du premier terme de chaque dividende partiel par le premier terme $p'x^n$ du diviseur, en multipliant chaque dividende par le coefficient p' , ou en général par une quantité indépendante de x , telle que le produit soit divisible par p' ; et on simplifiera les calculs en supprimant les facteurs indépendants de x qui pourront se trouver dans les restes successifs (on obtient ces facteurs en cherchant le plus grand commun diviseur indépendant de x entre les coefficients des diverses puissances de x dans chaque reste). On parviendra de cette manière à un reste R' moindre que B' et qui ne renfermera aucun facteur indépendant de x .

Le plus grand commun diviseur de A' et B' étant le même que celui de B' et R' , on opérera sur ces deux derniers polynomes, comme on a opéré sur A' et B' ; ce qui conduira à un reste R'' moindre que R' et qui ne renfermera aucun facteur indépendant de x . Le plus grand commun diviseur de R' et R'' sera le même que celui de A et B . On divisera donc R' par R'' , et en continuant ces calculs, on parviendra à un dernier reste R indépendant de x .

Lorsque R sera nul, le reste précédent exprimera le plus grand commun diviseur X de A' et B'.

Quand R ne sera pas nul, les polynomes A', B', n'auront pas de commun diviseur; car ils n'ont pas de commun diviseur indépendant de x; et s'ils avaient un facteur commun en x, ce facteur diviserait le reste R et le reste précédent, ce qui est impossible, puisque R ne contient pas x.

1^{er} EXEMPLE. Soient les deux polynomes

$$A = (y-1)x^3 + (2y^2-3y+1)x^2 + (y^3-3y^2+2y)x - (y^3-y^2),$$

$$B = (y^2-1)x^2 + (y^3-1)x + (y^2-y).$$

Le plus grand commun diviseur des coefficients

$y-1$, $2y^2-3y+1$, y^3-3y^2+2y , y^3-y^2 , est $\alpha = y-1$, et celui des coefficients

$$y^2-1, \quad y^3-1, \quad y^2-y, \quad \text{est } \epsilon = y-1.$$

Le plus grand commun diviseur de α et ϵ est $\gamma = y-1$.

On divise A et B par $y-1$, ce qui s'exécute en divisant les coefficients des diverses puissances de x par $y-1$, (n° 27); on obtient des quotiens

$$A' = x^3 + (2y-1)x^2 + (y^2-2y)x - y^2,$$

$$B' = (y+1)x^2 + (y^2+y+1)x + y.$$

Tous les coefficients de x dans A' sont premiers entre eux; il en est de même de ceux de x dans B'. De sorte que toute quantité indépendante de x est première avec B'.

Pour déterminer le plus grand commun diviseur X de A' et B', on observe que le coefficient 1 du premier terme du dividende A' n'étant pas divisible par le coefficient $y+1$ du premier terme du diviseur B', on peut rendre la division possible en multipliant A' par $y+1$; car $y+1$ étant premier avec B', le plus grand commun diviseur de A'(y+1) et B' est le même que celui de A' et B'. Mais comme il faudrait encore multiplier par $y+1$, pour obtenir le 2^e terme du quotient, il est plus commode de multiplier A' par $(y+1)^2$; ce qui conduit à diviser A'(y+1)², ou

$$(y+1)^2 x^3 + (2y^3+3y^2-1)x^2 + (y^4-3y^2-2y)x - (y^4+2y^3+y^2)$$

par B' ; on obtient le quotient $(y+1)x+(y^2-2)$, et le reste

$$r' = (-y^3 - 3y^2 - y + 2)x - (y^4 + 3y^3 + y^2 - 2y).$$

Le plus grand commun diviseur de B' et r' est le même que celui de A' et B' .

Avant de passer à la division suivante, il faut supprimer dans r' les facteurs indépendans de x qui peuvent s'y trouver ; ce qui se réduit à chercher le plus grand commun diviseur entre les coefficients.

$$-y^3 - 3y^2 - y + 2, \quad y^4 + 3y^3 + y^2 - 2y.$$

Ce plus grand commun diviseur étant $-y^3 - 3y^2 - y + 2$, on divise r' par $-y^3 - 3y^2 - y + 2$, ce qui fournit le quotient exact $x + y$.

La question est ramenée à chercher le plus grand commun diviseur entre B' et $x + y$. La division de B' par $x + y$ conduisant au reste zéro, le plus grand commun diviseur de A' et B' est $X = x + y$.

Multipliant X par Y , on voit que le plus grand commun diviseur de A et B est

$$Y \times X = (y-1)(x+y) = (y-1)x + (y^2 - y).$$

2^e EXEMPLE. Soient

$$A = x^4 - 3x^3 - (5y^2 - y - 2)x^2 + 12y^2x + 4y^3(y^2 - y - 2),$$

$$B = x^3 - 3(y+1)x^2 - (y^2 - 10y - 2)x + 3y(y^2 - y - 2).$$

Les coefficients de x dans A sont premiers entre eux, car le coefficient du premier terme est l'unité. Il en est de même des coefficients de x dans B . Les polynomes A , B , n'ont donc pas de commun diviseur indépendant de x .

Pour découvrir le plus grand commun diviseur dépendant de x , on divise A par B ; le premier terme du quotient est x , et le reste est

$$3yx^3 - (4y+9)yx^2 - 3(y^2 - 5y - 2)yx + 4y^3(y^2 - y - 2).$$

Supprimant dans ce reste le facteur y qui est premier avec B , le plus grand commun diviseur n'est pas altéré ; on divise

$3x^3 - (4y + 9)x^2 - 3(y^2 - 5y - 2)x + 4y(y^2 - y - 2)$,
par B; ce qui donne le quotient 3 et le reste

$$5yx^2 - 15yx - 5y(y^2 - y - 2).$$

On supprime le facteur $5y$ commun à tous les termes de ce reste, et le calcul se réduit à diviser B par $x^2 - 3x - (y^2 - y - 2)$; le quotient est $x - 3y$; le reste correspondant étant nul, le plus grand commun diviseur demandé est $x^2 - 3x - (y^2 - y - 2)$. On peut s'en assurer; car

$$A = (x - y - 1)(x + y - 2)(x - 2y)(x + 2y),$$

$$B = (x - y - 1)(x + y - 2)(x - 3y),$$

et le plus grand diviseur commun aux polynomes A, B, est le produit $x^2 - 3x - (y^2 - y - 2)$ de leurs facteurs communs $x - y - 1$, $x + y - 2$.

On trouvera de cette manière le plus grand commun diviseur de deux polynomes entiers quelconques contenant deux lettres, et le principe du n° 213 (2°) fournira le moyen de déterminer le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes de cette espèce.

217. On en déduira le moyen de calculer le plus grand commun diviseur de deux polynomes A, B, fonctions de trois lettres x, y, z ; car en ordonnant ces polynomes suivant les puissances décroissantes de x , les coefficients des diverses puissances de x ne contenant que deux lettres y, z , on saura trouver le plus grand commun diviseur α des coefficients de x dans A, et le plus grand commun diviseur ϵ des coefficients de x dans B; et en cherchant le plus grand commun diviseur P de α et ϵ , ce diviseur sera le produit de tous les facteurs premiers indépendants de x communs à A et B.

Pour découvrir le plus grand commun diviseur dépendant de x , on divise A par α et B par ϵ ; les quotiens A', B', n'admettant aucun diviseur indépendant de x , on pourra effectuer sur A' et B' des calculs analogues à ceux qui ont été indiqués (n° 216), quand A' et B' ne contenaient que deux lettres, et on parviendra nécessairement à un dernier reste R indépendant de x .

Quand R sera nul, le reste précédent, que nous désignerons par X, sera le plus grand commun diviseur de A' et B'; de sorte que le plus grand commun diviseur de A et B sera $P \times X$.

Lorsque R ne sera pas identiquement nul, A' et B' n'auront pas de plus grand commun diviseur; et par conséquent le plus grand commun diviseur de A et B sera P.

On passera semblablement du cas où les polynomes renferment trois lettres, à celui où ils sont fonction de quatre lettres. Et ainsi de suite.

On est donc en état de déterminer le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes entiers.

Ce qui précède conduit à cette règle générale : Pour déterminer le plus grand commun diviseur D de deux polynomes entiers A, B, ordonnez-les par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre x; cherchez le plus grand commun diviseur monome a des termes de A, et le plus grand commun diviseur monome c des termes de B; divisez A par a et B par c; vous obtiendrez des quotiens A', B'. Calculez le plus grand commun diviseur a' des coefficients de x dans A', et le plus grand commun diviseur c' des coefficients de x dans B'; divisez A' par a' et B' par c', vous obtiendrez des quotiens A'', B'', déterminez le plus grand commun diviseur d' de A'' et B''; calculez le plus grand commun diviseur d des monomes a, c, et le plus grand commun diviseur d' des polynomes a', c'. Le plus grand commun diviseur de A et B sera $d \times d' \times d''$.

EXEMPLE. Soit les deux polynomes

$$\begin{aligned} A &= (y^9 - y^6)x^7 - (y^9 - y^3)x^4 + (y^6 - y^3)x \\ B &= (y^9 - y^7)x^6 - (y^9 - y^5)x^4 + (y^7 - y^5)x^2. \end{aligned}$$

On trouve $a = y^3x$, $c = y^5x^2$, $d = y^3x$;

$$A' = (y^6 - y^3)x^6 - (y^6 - 1)x^3 + (y^3 - 1)$$

$$B' = (y^4 - y^2)x^4 - (y^4 - 1)x^2 + (y^2 - 1),$$

$$a' = y^3 - 1, \quad c' = y^2 - 1, \quad d' = y - 1,$$

$$A'' = y^3x^6 - (y^3 + 1)x^3 + 1, \quad B'' = y^2x^4 - (y^2 + 1)x^2 + 1,$$

$$d'' = yx^2 - (y + 1)x + 1,$$

$$D = dd'd'' = (y - 1)y^4x^3 - (y^2 - 1)y^3x^2 + (y - 1)y^3x.$$

Si l'on divise A et B par D, on obtiendra des quotiens qui n'auront plus de facteur commun.

REMARQUE. On peut simplifier le calcul du plus grand commun diviseur δ'' de A'' et B'' , en cherchant d'abord si δ'' contient un facteur X indépendant de y. A cet effet, on ordonne A'' et B'' par rapport à y, ce qui donne

$$A'' = (x^5 - x^3)y^3 - (x^3 - 1), \quad B'' = (x^4 - x^2)y^3 - (x^2 - 1).$$

On détermine le plus grand commun diviseur $x^3 - 1$ des coefficients $x^5 - x^3$, $x^3 - 1$, et le plus grand commun diviseur $x^3 - 1$ des coefficients $x^4 - x^2$, $x^2 - 1$; le plus grand commun diviseur $x - 1$, entre $x^3 - 1$ et $x^3 - 1$, exprime X.

On divise A'' par $x^3 - 1$, et B'' par $x^3 - 1$, ce qui donne des quotiens exacts $x^2y^3 - 1$, $x^2y^3 - 1$; de sorte que

$$A'' = (x^3 - 1)(x^2y^3 - 1), \quad B'' = (x^3 - 1)(x^2y^3 - 1).$$

On cherche le plus grand commun diviseur entre $x^2y^3 - 1$ et $x^2y^3 - 1$, qui est $xy - 1$; et l'on voit que le plus grand commun diviseur de A'' et B'' est

$$\delta'' = (x - 1)(xy - 1) = yx^2 - (y + 1)x + 1.$$

REMARQUE. La théorie que nous venons d'exposer peut faire naître quelques doutes; car il est naturel de se demander si l'on parviendra toujours au même plus grand commun diviseur quelle que soit la lettre par rapport à laquelle on ordonne les polynômes.

Pour lever cette difficulté, on regarde comme évident qu'un polynôme n'est décomposable que d'une seule manière en ses facteurs premiers.

* 218. Nous allons démontrer rigoureusement ce principe (*).

THÉORÈME PREMIER.

Une quantité première P, qui ne divise aucun des facteurs d'un produit AB, de deux quantités entières, ne saurait diviser ce produit.

Lorsque A, B, P sont des nombres, la démonstration est connue (Arith. n° 46).

Considérons les cas où ces quantités ne contiennent pas plus d'une lettre; il y en aura quatre à examiner.

(*) J'ai extrait cette démonstration d'un Mémoire qui vient d'être publié par mon collègue M. Lefebvre de Fourcy; elle n'est pas exigée pour l'admission à l'École Polytechnique.

Premier cas. *A ou B contient la lettre x , P est numérique.*

Soit $A = ax^a + bx^b + \text{etc.}$

$a, b, \text{etc.}$, étant des nombres entiers, ainsi que $a, b, \text{etc.}$

En multipliant A par B, on a

$$AB = Bax^a + Bbx^b + \text{etc.}$$

Pour que le produit AB fût divisible par le nombre P, il faudrait que les coefficients des diverses puissances de x , dans ce produit, fussent divisibles par P. D'après l'hypothèse, P est un nombre premier qui ne divise ni A ni B; puisque ce nombre ne divise point A, il ne divise pas tous les coefficients $a, b, \text{etc.}$ de ce polynôme; donc il ne doit pas diviser tous les produits $Ba, Bb, \text{etc.}$; donc il ne divise point AB.

Second cas. *A et B contiennent x , P est numérique.*

Nommons A' l'ensemble de tous les termes de A dont les coefficients sont des multiples de P, et A'' l'ensemble de tous les autres termes: on pourra écrire $A = A' + A''$.

Décomposons B de la même manière, et soit $B = B' + B''$; on aura

$$AB = (A' + A'')(B' + B'') = A'B' + A'B'' + A''B' + A''B''.$$

Les trois premières parties de ce produit sont divisibles par P; et pour démontrer que AB n'est pas divisible par P, il suffit de faire voir que la dernière partie $A''B''$ ne l'est point.

Soient ax^a et bx^b les termes de A'' et de B'', dans lesquels la lettre x est au plus haut exposant, le terme abx^{a+b} fera partie du produit $A''B''$, et ne se réduira avec aucun autre. Pour que $A''B''$ fût divisible par le nombre P, il faudrait que les coefficients de tous les termes de ce produit le fussent: donc ab devrait se diviser par P. Or, P est un nombre premier qui ne divise aucun des coefficients de A'' et de B''; donc il ne divise ni a ni b ; donc il ne divise pas ab ; donc il ne divise pas $A''B''$; donc il ne divise pas le produit AB.

Troisième cas. *A ou B contient x , et P contient aussi x .*

Supposons que ce soit le facteur A qui renferme x . Si la division de AB par P donnait un quotient entier Q, on aurait $AB = PQ$; et, en représentant par F, F', F'',... les facteurs premiers du nombre B, cette égalité pourrait s'écrire ainsi:

$$AFF'F''... = PQ.$$

Le premier membre étant divisible par F, le produit PQ doit l'être aussi; mais P est une quantité première qui contient x ; donc elle n'est divisible par aucun nombre; donc Q est divisible par F, sans quoi le produit PQ ne pourrait pas se diviser par F (2^e cas).

Soit Q' le quotient de Q par F, on aura $AF'F''... = PQ'$.

On prouvera de la même manière que Q' doit être divisible par F'; et, en nommant Q'' le quotient, on aurait $AF''... = PQ''$.

En continuant ainsi jusqu'à ce que le premier membre ne renferme plus que A, on arrivera à une égalité telle que $A = PQ_n$, dans laquelle Q,

serait encore une quantité entière. De là on conclurait que A est divisible par P , ce qui est contraire à l'hypothèse; donc AB n'est pas divisible par P .

QUATRIÈME CAS. A et B , ainsi que P , contiennent x .

Supposons que A soit d'un degré plus élevé que P , divisons A par P , et posons la division jusqu'à ce qu'on trouve un reste de degré moindre que P . Il est possible que le quotient et le reste renferment des coefficients fractionnaires; mais si l'on prend un nombre M , divisible par chacun des dénominateurs, et qu'on multiplie le dividende par M avant de faire la division, il est facile de voir qu'alors les fractions disparaîtront entièrement. Désignons par Q le quotient entier qu'on obtient de cette manière, et par A' le reste, on aura $MA = PQ + A'$; A' ne peut pas être zéro, autrement le produit MA serait divisible par le polynôme premier P , ce qui est impossible (3^e cas). Multiplions les deux membres de cette égalité par B et divisons-les ensuite par P , il vient

$$M \frac{AB}{P} = BQ + \frac{A'B}{P}.$$

Donc, si AB était divisible par P , le produit $A'B$ le serait aussi.

Supposons que A' soit algébrique, et divisons P par A' . Soit N le nombre par lequel il faut multiplier P pour arriver, sans fractions, à un reste de degré moindre que A' . En nommant Q' le quotient, et A'' le reste, on aura $NP = A'Q' + A''$; et de là on tire, en multipliant par B et en divisant par P ,

$$NB = \frac{A'B}{P} Q' + \frac{A''B}{P};$$

donc la divisibilité de $A'B$ par P entraînerait celle de $A''B$. Remarquons d'ailleurs que A'' ne peut être zéro; car, si cela était, il faudrait que NP fût divisible par chaque facteur algébrique premier de A' , ce qui est impossible (3^e cas).

Divisons encore P par A'' ; nommons N' le nombre par lequel il faut multiplier le dividende, nommons Q'' le quotient et A''' le reste, il viendra

$$N'P = A''Q'' + A''', \text{ d'où } NB = \frac{A''B}{P} Q'' + \frac{A'''B}{P};$$

donc $A'''B$ serait aussi divisible par P .

En continuant ainsi, l'on doit arriver à un reste numérique A_n , et le produit $A_n B$ devrait encore se diviser par P , ce qui est impossible (3^e cas); donc le produit AB n'est pas divisible par P .

Les quatre cas que nous venons d'examiner sont les seuls qui soient à considérer lorsque les trois quantités A , B , P ne sont pas numériques à la fois, et qu'elles ne contiennent pas plus d'une lettre.

Passons aux cas où il y a deux lettres x et y dans l'une de ces quantités, ou dans deux d'entre elles, ou dans toutes les trois. Ces cas sont aussi au nombre de quatre, savoir :

Lorsqu'un seul des facteurs A et B contient la lettre x , et que P ne la contient point.

Lorsque les deux facteurs A et B contiennent la lettre x, et que P ne la contient point.

Lorsqu'un seul des facteurs A et B contient la lettre x, et que P la contient aussi.

Enfin, lorsque les deux facteurs A et B contiennent la lettre x, et que P la contient aussi.

Les démonstrations sont semblables à celles qui viennent d'être exposées, et, pour cette raison, nous nous dispenserons de les rapporter. La seule différence consiste en ce que les quantités qui, précédemment, étaient supposées numériques, peuvent être ici des quantités algébriques dépendantes de la lettre y.

De même que les cas où les quantités A, B, P, ne renferment pas plus d'une seule lettre; servent à démontrer la proposition pour les cas où ces quantités peuvent contenir deux lettres; de même ceux-ci serviront à s'élever aux cas où ces quantités pourraient contenir trois lettres; et ainsi de suite, quel que soit le nombre des lettres.

Le théorème général doit donc être regardé comme démontré.

THÉORÈME II.

Il n'existe qu'un seul système de facteurs premiers dont le produit soit égal à une quantité donnée; ou, ce qui est la même chose, deux produits de facteurs premiers ne peuvent être égaux que lorsqu'ils sont composés de facteurs égaux chacun à chacun.

Soient $ABCD\dots$ et $abcd\dots$, les deux produits égaux. Puisque $abcd\dots$ est divisible par a , le produit $ABCD\dots$ doit l'être aussi; mais a est une quantité première, ainsi que A, B, C, D, etc.; donc, si la quantité a n'est point égale à quelqu'un de ces facteurs, elle ne pourra diviser aucun d'eux. D'après le théorème précédent, la quantité a ne divisant ni A ni B, ne divisera pas le produit AB; ne divisant ni AB ni C, elle ne divisera pas ABC; ainsi de suite: donc a ne pourrait point diviser le produit $ABCD\dots$. Il faut donc que cette quantité soit égale à l'un des facteurs A, B, C, D, etc.: supposons-la égale à A, et divisons les deux produits par A, les produits restans $BCD\dots$ et $bcd\dots$ seront encore égaux, et l'on pourra leur appliquer le raisonnement précédent. On conclura donc que la quantité b est égale à l'un des facteurs du produit $BCD\dots$, à B par exemple. On fera voir semblablement que la quantité c est égale à l'un des facteurs du produit $CD\dots$, à C par exemple; et ainsi de suite. Donc les deux produits $ABCD\dots$ et $abcd\dots$ sont composés des mêmes facteurs premiers.

REMARQUE. Cette démonstration ne suppose pas que les quantités A, B, C, D, etc., soient inégales; de sorte que si plusieurs facteurs du premier produit sont égaux entre eux, le second produit doit les renfermer précisément en pareil nombre.

Les deux théorèmes précédens démontrent qu'un polynome entier n'est décomposable que d'une seule manière en ses facteurs premiers.

CHAPITRE VII.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

Propriétés relatives aux facteurs des polynômes entiers et aux racines des équations à une seule inconnue. Limites des racines d'une équation. Des fonctions dérivées. Résolution des équations numériques. Théorie de l'élimination.

§ 1^{re} Définitions et notations. *Propriétés relatives aux facteurs des polynômes et aux racines des équations à une seule inconnue.*

219. Le principal but de la *théorie générale des équations* est de faire connaître les propriétés des équations de tous les degrés, pour en déduire le moyen de les résoudre. Nous supposerons que les équations proposées ne renferment que des puissances entières des inconnues, et que les coefficients sont des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

Ainsi, après avoir fait disparaître tous les dénominateurs, l'équation du *m^{ème}* degré à une seule inconnue peut se ramener à la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Rx^2 + Sx + T = 0;$$

m est un nombre entier positif, et les coefficients *A, B, C, ..., R, S, T*, sont des nombres entiers positifs ou négatifs. Le dernier terme *T* peut être considéré comme le coefficient de *x⁰*.

On peut aussi ramener cette équation à la forme

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx^2 + sx + t = 0,$$

en divisant tous ses termes par *A*, mais alors les coefficients *p, q, ..., r, s, t*, peuvent être fractionnaires.

Nous verrons par la suite comment on peut résoudre les équations dans lesquelles les inconnues entrent sous des radicaux.

Lorsque des quantités dépendent d'une manière quelconque d'autres quantités, on dit que les premières sont fonction des secondes.

Ainsi, dans l'équation $y = x^2 + z - 1$, la quantité y est fonction de x et de z .

Pour indiquer que y est fonction de x , on écrit $y = F(x)$.

Lorsque des fonctions sont composées d'une manière semblable, on l'indique en conservant le même signe de fonction.

Par exemple, $f(x)$ et $f(z)$ représentent des fonctions composées absolument de la même manière, l'une en x , l'autre en z ; c'est-à-dire que $f(z)$ est ce que devient $f(x)$, quand on change x en z dans $f(x)$.

Si $f(x) = x^2 - 4x + 7$, on aura

$$f(z) = z^2 - 4z + 7, \quad f(a) = a^2 - 4a + 7,$$

$$f\left(\frac{x}{z}\right) = \left(\frac{x}{z}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{z}\right) + 7, \quad f(xy) = (xy)^2 - 4xy + 7,$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 4(x+h) + 7.$$

Si l'on donne à x la valeur particulière zéro, $f(x)$ se réduira à $+7$, c'est-à-dire qu'on aura $f(0) = +7$.

Quand il est nécessaire de considérer des fonctions différentes, on les distingue les unes des autres par la forme de la lettre F . Ainsi, $F(x)$, $f(x)$ et $\phi(x)$ désignent des fonctions différentes de x .

On dit qu'une fonction est *entière* par rapport à une lettre, lorsque tous les exposans de cette lettre sont des nombres entiers positifs.

Nous supposerons que les polynômes que nous allons considérer sont des fonctions *entières*. Les polynômes de cette espèce ne deviennent jamais infinis pour des valeurs finies des lettres qu'ils renferment.

220. Quand un polynôme $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + tx + t$, est réduit à zéro par l'hypothèse $x = a$, il est divisible par

$x - a$. Lorsque $x = a$ ne réduit pas ce polynôme à zéro, il n'est pas divisible par $x - a$.

Désignons ce polynôme par $f(x)$, et divisons-le par $x - a$; le diviseur étant du premier degré en x , on pourra toujours continuer les calculs jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste R indépendant de x , le quotient $\phi(x)$ ne renfermant que des exposans entiers positifs de x ; on aura

$$(1) \dots f(x) = (x - a) \times \phi(x) + R.$$

Cette égalité étant vraie quel que soit x , on peut y faire $x = a$; le produit $(x - a) \times \phi(x)$ se réduit à zéro, car $x - a$ devient nul et $\phi(x)$ ne peut devenir infini; d'ailleurs R ne change pas; donc

$$(2) \dots f(a) = R.$$

Cela posé : 1°. Si l'hypothèse $x = a$ réduit $f(x)$ à zéro, on a $f(a) = 0$; la valeur $f(a)$ du reste R étant nulle, $x - a$ divise exactement $f(x)$.

Par exemple, la valeur $x = 3$ réduisant $x^3 - 27x + 54$ à zéro, ce trinôme est divisible par $x - 3$; le quotient de cette division est $x^2 + 3x - 18$.

2°. Si $x = a$ ne réduit pas $f(x)$ à zéro, la valeur $f(a)$ de R ne sera pas nulle; $f(x)$ ne sera donc pas divisible par $x - a$.

Par exemple, $x = 3$ ne réduisant pas $x^3 - 27x + 60$ à zéro, ce trinôme n'est pas divisible par $x - 3$; et en effet, la division de $x^3 - 27x + 60$ par $x - 3$ conduit au reste 6.

La réciproque se déduit aussi de l'identité (1). En effet, lorsque $f(x)$ est divisible par $x - a$, le reste R doit être nul, la valeur $f(a)$ de R est donc nulle, l'hypothèse $x = a$ réduit donc $f(x)$ à zéro; et quand $f(x)$ n'est pas divisible par $x - a$, la valeur $f(a)$ de R ne devant pas être nulle, l'hypothèse $x = a$ ne réduit pas $f(x)$ à zéro.

REMARQUE. L'identité (2) démontre que pour obtenir le reste de la division d'un polynôme par $x - a$, il suffit de faire $x = a$ dans le polynôme.

Ainsi, on trouve le reste de la division de $x^3 - 27x + 60$

par $x-3$, en faisant $x=3$ dans ce trinôme; le résultat $+6$ est le reste demandé.

On peut en déduire le moyen de reconnaître dans quel cas $x^m \pm a^m$ est divisible par $x \pm a$. En effet; l'hypothèse $x=a$ réduisant $x^m - a^m$ à zéro et n'y réduisant pas $x^m + a^m$, il en résulte que $x-a$ divise $x^m - a^m$ et ne divise pas $x^m + a^m$. Lorsque m est un nombre pair, $x=-a$ réduit $x^m - a^m$ à zéro et n'y réduit pas $x^m + a^m$; par conséquent, $x+a$ divise $x^m - a^m$ et ne divise pas $x^m + a^m$. On verrait de même que m étant impair, $x+a$ divise $x^m + a^m$ et ne divise pas $x^m - a^m$.

Ce qui s'accorde avec les résultats obtenus dans le n° 29.

221. Le principe du n° 220 peut s'énoncer de cette autre manière: Si a est une racine de l'équation

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx^2 + sx + t = 0,$$

le premier membre $x^m + \text{etc.}$ sera exactement divisible par $x-a$; et si a n'est pas une racine de l'équation (1), $x-a$ ne divisera pas le premier membre.

Nous allons donner une seconde démonstration de ce théorème important; et nous désignerons le premier membre de l'équation (1) par $f(x)$.

1°. Quand a est racine de l'équation (1), on a

$$(2) \dots a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} + \dots + ra^2 + sa + t = 0.$$

Pour introduire cette condition dans le polynôme $f(x)$, il suffit d'y remplacer t par sa valeur

$$-(a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} + \dots + ra^2 + sa),$$

tirée de la relation (2); ce polynôme devient

$$x^m + px^{m-1} + \dots + sx - (a^m + pa^{m-1} + \dots + sa).$$

Réunissant les puissances semblables de x et de a , le polynôme $f(x)$ prend la forme,

$$(3) \dots (x^m - a^m) + p(x^{m-1} - a^{m-1}) + r(x^2 - a^2) + s(x - a),$$

et on voit alors qu'il est divisible par $x-a$; car chacun des bi-

nomes $x^m - a^m, x^{m-1} - a^{m-1}, \dots, x^2 - a^2, x - a$, est divisible par $x - a$.

Pour trouver le quotient du polynome

$$(4) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx + sx + t$$

par $x - a$, on pourrait effectuer directement la division de ce polynome par $x - a$, le reste indépendant de x serait nul, car il serait exprimé par le premier membre de l'équation (2). Mais, les quotiens des binomes $x^m - a^m, x^{m-1} - a^{m-1}$, etc., par $x - a$, étant connus (page 33), il est plus simple d'effectuer ces divisions sur l'expression (3) du polynome (4).

On trouve de cette manière que a étant une racine quelconque de l'équation (1), le quotient exact de la division du premier membre par $x - a$ est

$$\begin{array}{r|l} x^{m-1} + a & x^{m-2} + a^2 \\ + p & + pa \\ & + q \\ & \vdots \\ & + r \\ \hline x + a^{m-1} \\ + pa^{m-2} \\ + qa^{m-3} \\ \vdots \\ + ra \\ + s \end{array}$$

2°. Lorsque a n'est pas racine de l'équation (1), on peut mettre le premier membre sous la forme

$$(x^m - a^m) + p(x^{m-1} - a^{m-1}) + \dots + s(x - a) + (a^m + pa^{m-1} + \dots + sa + t).$$

Chacun des binomes $x^m - a^m, x^{m-1} - a^{m-1}, \dots, x - a$, étant divisible exactement par $x - a$, on voit que la partie entière du quotient de ce polynome par $x - a$ est la même que (1°), et que le reste de la division est $a^m + pa^{m-1} + \dots + sa + t$. Or, a n'étant pas racine de l'équation (1), ce reste n'est pas nul; le premier membre de l'équation (1) n'est donc pas divisible par $x - a$.

On démontrera d'une manière semblable, que lorsque le premier membre de l'équation (1) est divisible par $x - a$, la quantité a est racine de cette équation, et que lorsque $x - a$ ne divise pas exactement le premier membre, a n'est pas racine.

222. Si toute équation à une seule inconnue a une racine (*), l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré aura m racines.

En effet; soit a_1 une racine de l'équation

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx + t = 0,$$

le premier membre sera divisible par $x - a_1$; le quotient sera un polynome entier du degré $m - 1$, et on aura

$$x^m + \text{etc.} = (x - a_1) (x^{m-1} + \text{etc.}).$$

L'équation $x^{m-1} + \text{etc.} = 0$ ayant une racine a_2 , on voit de même que son premier membre est divisible par $x - a_2$, de sorte que

$$x^{m-1} + \text{etc.} = (x - a_2) (x^{m-2} + \text{etc.}); \quad \text{d'où}$$

$$x^m + \text{etc.} = (x - a_1) (x - a_2) (x^{m-2} + \text{etc.}).$$

Continuant ces décompositions, on parviendra à un dernier facteur $x - a_m$, et on aura

$$x^m + \text{etc.} = (x - a_1) (x - a_2) (x - a_3) \dots (x - a_m).$$

Le premier membre de l'équation (1) se trouvant ainsi décomposé en m facteurs premiers

$$x - a_1, \quad x - a_2, \quad x - a_3, \quad \dots, \quad x - a_m,$$

on voit que cette équation a m racines $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$; car chacune de ces m valeurs de x réduit à zéro un des m facteurs de $x^m + px^{m-1} + \dots + sx + t$, et les autres facteurs prennent des valeurs finies.

223. Une équation du $m^{\text{ième}}$ degré ne peut avoir plus de m racines. En effet; soit l'équation

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx + sx + t = 0.$$

(*) Les propriétés qui seront fondées sur la décomposition des équations en facteurs, reposeront sur l'hypothèse que toute équation a une racine. La légitimité de cette hypothèse sera vérifiée, car on en déduira des méthodes générales pour calculer toutes les racines des équations.

On vient de démontrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_m) = 0,$$

et que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, sont m racines de cette équation. Si elle admettait une $m + 1^{\text{ème}}$ racine a_{m+1} , le premier membre

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_m),$$

serait divisible par $x - a_{m+1}$; ce qui est impossible, puisqu'un polynôme n'est décomposable que d'une seule manière en ses facteurs premiers (2^e Remarque de la page 354).

224. Il résulte des deux principes précédens que pour former l'équation dont les racines sont $a, b, \dots, n$, il suffit d'égaliser à zéro le produit des facteurs $x - a, x - b, \dots, x - n$.

Par exemple, on obtient l'équation dont les racines sont $+1, -1$ et $+2$, en égalant à zéro le produit des facteurs $x - 1, x + 1, x - 2$; ce qui donne

$$(1) \dots x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0.$$

La méthode du n° 58 conduit au même résultat. En effet; l'équation cherchée ayant trois racines, est de la forme

$$(2) \dots x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

et chacune des valeurs $x = 1, x = -1, x = 2$, devant y satisfaire, on a

$$1 + a + b + c = 0, \quad -1 + a - b + c = 0, \quad 8 + 4a + 2b + c = 0.$$

Pour tirer de ces trois équations les valeurs des inconnues a, b, c , on ajoute les deux premières équations, ce qui conduit à $c = -a$; l'équation $1 + a + b + c = 0$, se réduit à $1 + b = 0$, d'où $b = -1$. Remplaçant b par -1 et c par $-a$, l'équation $8 + 4a + 2b + c = 0$, donne $a = -2$; or $c = -a$, donc $c = 2$. La substitution de ces valeurs de a, b, c , dans (2) fournit l'équation (1) demandée.

REMARQUE. Lorsque plusieurs facteurs du premier degré de $x^m + px^{m-1} + \dots + sx + t$, sont égaux entre eux, il n'y a plus m manières différentes de satisfaire à l'équation

$$x^m + px^{m-1} + \dots + sx + t = 0.$$

Cependant, pour conserver l'analogie, on dit encore que cette équation a m racines; mais on ajoute qu'il y a des racines égales.

En général: lorsque la division du polynome $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$, par $(x-a)^n$ fournit un quotient exact qui ne renferme plus le facteur $x-a$, ce polynome contient n facteurs égaux à $x-a$; on dit par ce motif que l'équation $x^m + \text{etc.} = 0$, renferme n RACINES ÉGALES à a , et que n est le degré de multiplicité de cette racine.

Ainsi, le produit de $(x-3)^2$ par $x+6$, étant $x^3 - 27x + 54$, l'équation $x^3 - 27x + 54 = 0$, a deux racines égales à $+3$; et comme le produit des facteurs inégaux $x-1$, $x+1$, $x-2$, est $x^3 - 2x^2 - x + 2$, les racines de l'équation

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0,$$

sont inégales.

225. Dans toute équation ramenée à la forme

$$(1) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

le coefficient p_1 du second terme pris avec un signe contraire est égal à la somme des m racines; le coefficient p_2 du troisième terme est égal à la somme de leurs produits deux à deux; le coefficient p_3 du quatrième terme pris avec un signe contraire est égal à la somme de leurs produits trois à trois; et ainsi de suite. Enfin, d'après cette loi, selon que m est pair ou impair, le dernier terme p_m , pris avec son signe ou avec un signe contraire, est égal au produit des m racines.

En effet; si les m racines de l'équation (1) sont $a, b, c, \dots, k$, le premier membre sera identiquement égal au produit des m binomes $x-a, x-b, x-c, \dots, x-k$, et la loi qui a été démontrée dans le n° 123, conduira aux relations

$$(2) \dots \begin{cases} p_1 = -(a + b + \dots + k), & p_2 = ab + ac + \text{etc.}, \\ p_3 = -(abc + abd + \text{etc.}), \dots, & \pm p_m = abc \dots k; \end{cases}$$

car d'après le principe du n° 16 (4°), si l'on change les signes

des seconds termes $a, b, c, \dots, k$, leur somme ne fait que changer de signe, la somme de leurs produits deux à deux reste la même, la somme de leurs produits trois à trois change de signe; et ainsi de suite.

226. Les relations (2) démontrent les propriétés suivantes :

1°. *Quand l'équation*

$$(1) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

manque de second terme, c'est-à-dire quand $p_1 x^{m-1}$ n'entre pas dans cette équation, la somme des racines est zéro.

La réciproque est vraie.

2°. *Lorsqu'une des racines de l'équation (1) est nulle, le dernier terme p_m est zéro; car il exprime le produit des m racines.*

Cela est d'ailleurs évident; car l'hypothèse $x=0$ devant satisfaire à l'équation (1), il en résulte $p_m=0$.

3°. *RÉCIPROQUEMENT, lorsque l'équation (1) manque de dernier terme, c'est-à-dire quand le dernier terme p_m est nul, l'une des racines est zéro; car p_m exprime le produit des m racines, et l'on conçoit qu'un produit ne peut devenir nul que lorsqu'un de ses facteurs se réduit à zéro.*

On peut d'ailleurs démontrer directement la propriété énoncée; car l'hypothèse $p_m=0$, réduisant l'équation (1) à

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x = 0,$$

on voit que $x=0$ satisfait à cette dernière équation.

4°. *Pour composer l'équation dont les racines sont $a, b, c, \dots, k$, il suffit de chercher successivement, la somme P_1 de ces racines, la somme P_2 de leurs produits deux à deux, la somme P_3 de leurs produits trois à trois; et ainsi de suite jusqu'au produit P_m de ces m racines; l'équation demandée sera*

$$x^m - P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} - P_3 x^{m-3} + \dots \mp P_{m-1} x \pm P_m = 0,$$

et selon que m sera pair ou impair, on devra prendre les signes supérieurs ou inférieurs.

Par exemple, si les racines données sont $+1, -2$ et $+2$,

on trouvera $P_1 = 2$, $P_2 = -1$, $P_3 = -2$; de sorte que l'équation demandée est $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

5°. Quand on connaît $m-1$ racines $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$, d'une équation $x^m + px^{m-1} + \text{etc.} = 0$; du $m^{\text{ième}}$ degré, il est facile d'en déduire la $m^{\text{ième}}$ racine a_m ; car en désignant par s la somme de ces $m-1$ racines, on a

$$-p_1 = s + a_m; \text{ d'où } a_m = -(p_1 + s).$$

Par exemple, si l'on connaît deux racines $+2$, $+1$, de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$; la troisième racine sera $-(-2 + 2 + 1)$ ou -1 .

6°. Lorsque deux équations ont les mêmes racines, ces équations ont les mêmes coefficients.

La réciproque est évidemment vraie.

7°. Quand toutes les racines de l'équation

$$(1) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + p_4 x^{m-4} + p_5 x^{m-5} + \text{etc.} = 0,$$

changent de signes, les coefficients p_1, p_3, p_5 , etc., ne font que changer de signes, et les coefficients p_2, p_4 , etc., restent les mêmes.

Par exemple, les racines de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, étant $+1$, $+2$ et -1 , l'équation qui a pour racines -1 , -2 et $+1$ est $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

Pour démontrer la RÉCIPROQUE, nous nous proposerons de transformer l'équation (1) en une équation $f(y) = 0$, de manière que les racines de la nouvelle équation soient égales à celles de la proposée prises avec des signes contraires.

Il suffit pour cela de faire $x = -y$ dans (1); car d'après la relation $y = -x$, si les racines de l'équation (1), sont $a, b, c, \dots, k$, celles de l'équation

$$(2) \dots (-y)^m + p_1 (-y)^{m-1} + p_2 (-y)^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$

seront $-a, -b, -c, \dots, -k$.

Lorsque m est un nombre pair, les exposans $m-2, m-4$, etc., sont pairs, et les exposans $m-1, m-3$, sont impairs; l'équation (2) se réduit à

$$(3) \dots y^m - p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} - p_3 y^{m-3} + p_4 y^{m-4} - \text{etc.} = 0.$$

Quand m est impair, l'équation (2) devient

$$-y^m + p_1 y^{m-1} - p_2 y^{m-2} + p_3 y^{m-3} - p_4 y^{m-4} + \text{etc.} = 0,$$

et en changeant les signes de tous les termes, on obtient encore l'équation (3).

Par conséquent : *Pour que toutes les racines de l'équation (1) changent de signes, il suffit d'y changer les signes des termes de rang pair.*

8°. Quand toutes les racines de l'équation (1) sont négatives, tous les termes de cette équation sont positifs ; car les expressions (2) (page 365) des coefficients p_1, p_2, p_3 , etc., sont positives.

9°. Lorsque toutes les racines de l'équation (1) sont positives, les termes de cette équation sont alternativement positifs et négatifs ; car en vertu des relations (2) (page 365), les valeurs des coefficients p_1, p_2 , etc., des termes de rang pair sont négatives, et les valeurs des coefficients p_3, p_4 , etc., des termes de rang impair sont positives.

1°. REMARQUE. Quand tous les termes de l'équation (1) sont positifs, cette équation n'a pas de racines positives, car la somme de plusieurs nombres positifs ne saurait se réduire à zéro.

2°. REMARQUE. Une équation

$$x^m - px^{m-1} + qx^{m-2} - rx^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, n'a pas de racines négatives ; car en y faisant $x = -y$, ce qui change les signes des racines, elles devient

$$y^m + py^{m-1} + qy^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$

et cette dernière n'ayant pas de racines positives, la proposée n'a pas de racines négatives.

227. Les relations qui existent entre les racines et les coefficients d'une équation ne peuvent pas servir à déterminer directement ces racines en fonction des coefficients.

Par exemple, si l'équation proposée étant

$$(1) \dots x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

ses racines sont a, b, c , on aura (n° 225),

$$(2) \dots -p = a + b + c, \quad q = ab + ac + bc, \quad -r = abc.$$

Pour tirer de ces trois équations les valeurs des inconnues a, b, c , il faut d'abord éliminer deux de ces inconnues.

Si l'on veut éliminer b et c , on observe que les relations (2) donnent

$$pa^2 = -(a + b + c)a^2, \quad qa = (ab + ac + bc)a, \quad r = -abc.$$

Ajoutant ces trois dernières équations, il vient

$$pa^2 + qa + r = -a^3; \text{ d'où } a^3 + pa^2 + qa + r = 0;$$

et cette dernière équation est aussi difficile à résoudre que la proposée, car ses coefficients sont les mêmes.

On pouvait prévoir ce résultat; car les relations (2) restant les mêmes quand on change l'une quelconque des racines a, b, c , en une autre, on peut faire ce changement dans toutes les équations qui se déduisent des relations indiquées; par conséquent, si $\phi(a) = 0$ est l'équation qui résulterait de l'élimination de b et c entre les équations (2), les équations qui détermineront b et c seront $\phi(b) = 0, \phi(c) = 0$; de sorte que a, b, c , sont les racines de l'équation $\phi(x) = 0$; cette dernière ayant les mêmes racines que l'équation (2), on a vu (n° 226, 6°) que $\phi(x)$ est nécessairement égal à $x^3 + px^2 + qx + r$; les équations qui déterminent les racines a, b, c , sont donc

$$a^3 + pa^2 + qa + r = 0, \quad b^3 + pb^2 + qb + r = 0, \quad c^3 + pc^2 + qc + r = 0.$$

228. Quand le produit de plusieurs facteurs entiers quelconques se réduit à zéro, l'un de ces facteurs devient nécessairement nul. En effet, soient $a, b, c, \dots, k$, des facteurs entiers quelconques, et désignons leur produit par P ; il résulte du principe du n° 225 que l'équation dont les racines sont $a, b, c, \dots, k$, est

$$(1) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + P = 0.$$

Lorsque P est zéro, la valeur $x = 0$ satisfait à l'équation (1);

une des racines $a, b, c, \dots, k$, est donc nulle, un des facteurs du produit P est donc zéro.

229: Lorsque $a, c, \dots, u$, désignent n quantités différentes, et que chacune des hypothèses $x=a, x=c, \dots, x=u$, réduit

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + \dots + sx + t$$

à zéro; ce polynôme est divisible par un polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré en x qui résulte de la multiplication des n facteurs premiers $x-a, x-c, \dots, x-u$. On suppose que n n'est pas plus grand que m .

En effet, puisque $x=a$ réduit le polynôme (1) à zéro, il est divisible par $x-a$; le quotient est donc un polynôme entier du $m-1^{\text{ième}}$ degré $x^{m-1} + p'x^{m-2} + \text{etc.}$, et on a l'identité $x^m + \text{etc.} = (x-a)(x^{m-1} + \text{etc.})$.

Or, par hypothèse, $x=c$ réduit $x^m + \text{etc.}$ à zéro; la valeur $x=c$ doit donc réduire à zéro le produit de $x-a$ par $x^{m-1} + p'x^{m-2} + \text{etc.}$; mais c n'étant pas égal à a , la valeur $x=c$ ne rend pas nul le facteur $x-a$; il faut donc que $x=c$ réduise à zéro l'autre facteur $x^{m-1} + p'x^{m-2} + \text{etc.}$ (n° 228); ce dernier polynôme est donc divisible par $x-c$; le quotient est un polynôme du $(m-2)^{\text{ième}}$ degré $x^{m-2} + \text{etc.}$, et on a

$$x^{m-1} + \text{etc.} = (x-c)(x^{m-2} + \text{etc.}); \text{ d'où}$$

$$x^m + \text{etc.} = (x-a)(x-c)(x^{m-2} + \text{etc.}).$$

Continuant ces décompositions jusqu'au $n^{\text{ième}}$ facteur $x-u$, on parviendra à l'identité

$$x^m + \text{etc.} = (x-a)(x-c) \dots (x-u)(x^{m-n} + \text{etc.});$$

ce qui démontre le principe énoncé.

Par exemple, chacune des hypothèses $x=1, x=2$, réduisant $x^3 - 2x^2 - x + 2$ à zéro, ce polynôme est divisible par le produit $x^2 - 3x + 2$ des facteurs $x-1, x-2$; le quotient est $x+1$.

On peut encore dire: puisque $x=a$ réduit $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$ à zéro, ce polynôme est divisible exactement par $x-a$; de

sorte que

$$x^m + px^{m-1} + \text{etc.} = (x - a)(x^{m-1} + p'x^{m-2} + \text{etc.}).$$

Mais $x = c$ doit réduire $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$ à zéro; ce polynôme est donc divisible par le facteur premier $x - c$; il faut donc que $x - c$ divise le produit $(x - a)(x^{m-1} + \text{etc.})$. Mais, $x - c$ est premier avec $x - a$, puisque c n'est pas égal à a ; le polynôme $x^{m-1} + \text{etc.}$ est donc divisible par $x - c$. On a donc l'identité

$$x^{m-1} + p'x^{m-2} + \text{etc.} = (x - c)(x^{m-2} + p''x^{m-3} + \text{etc.});$$

d'où

$$x^m + px^{m-1} + \text{etc.} = (x - a)(x - c)(x^{m-2} + p''x^{m-3} + \text{etc.}),$$

et ainsi de suite.

RÉCIPROQUEMENT, lorsque le polynôme

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + \dots + sx + t$$

est divisible par un polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + kx + l,$$

les n valeurs $a, c, \dots, s$, de x , qui réduisent ce dernier polynôme à zéro, jouissent aussi de la propriété de rendre nul le polynôme (1). Car le quotient de la division de $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$ par $x^n + ax^{n-1} + \text{etc.}$, est un polynôme entier Q ; on a l'identité

$$x^m + px^{m-1} + \text{etc.} = (x^n + ax^{n-1} + \text{etc.}) \times Q,$$

et chacune des n hypothèses $x = a, x = c, \dots, x = s$, réduit le second membre à zéro, puisque le polynôme entier Q ne saurait devenir infini; ces n valeurs de x réduisent donc le premier membre $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$, à zéro.

230. Quand une équation a n racines égales à zéro, les coefficients des n derniers termes sont nuls. En effet, soit l'équation

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + \dots + A_{n+1}x^n + A_n x^{n-1} + A_{n-1}x^{n-2} + \dots + A_2 x + A_1 = 0.$$

Si elle admet n racines égales à zéro, son premier membre sera divisible par $(x - 0)^n$ ou par x^n (Remarque du n° 224); ce qui exige que les n coefficients $A_1, A_2, \dots, A_n$, soient nuls.

Réciproquement, quand ces n coefficients sont nuls, le pre-

mier membre est divisible par x^n ou par $(x-0)^n$; l'équation (1) a donc n racines égales à zéro (*Remarque* du n° 224).

Les relations du n° 225 conduisent aux mêmes propriétés.

Par exemple, lorsque deux des racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation (1) sont nulles, le produit $\pm A_1$ des m racines est zéro; et tous les produits $m-1$ à $m-1$ des racines contenant au moins un facteur nul, leur somme $\pm A_n$ se réduit à zéro; donc $A_1 = 0$ et $A_n = 0$.

Réciproquement, si A_1 et A_n sont nuls, le produit $\pm A_1$ des m racines $a, b, \dots, k$, sera zéro; l'une de ces racines sera donc nulle. Soit $a = 0$; la somme $\pm A_n$ des produits $m-1$ à $m-1$ des m racines, se réduira à $bc\dots k$, car tous les autres produits renferment le facteur a ; le produit $bc\dots k$ étant nul, il faut qu'une des $m-1$ racines $b, c, \dots, k$, soit zéro. Deux des racines de l'équation (2) sont donc nulles.

231. *Lorsqu'une équation ne renferme que des puissances paires de l'inconnue, toutes ses racines sont égales deux à deux et de signes contraires.* En effet, cette équation étant de la forme

$$(1) \dots x^{2m} + Px^{2m-2} + Qx^{2m-4} + \dots + Sx^2 + T = 0,$$

si l'on fait $x^2 = z$, elle devient

$$(2) \dots z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \dots + Sz + T = 0.$$

Désignant par $a, b, c, \dots, k$, les m racines de l'équation (2), et observant que la relation $x^2 = z$ donne $x = \pm \sqrt{z}$, on voit que les $2m$ racines de l'équation (1) sont

$$\pm \sqrt{a}, \pm \sqrt{b}, \pm \sqrt{c}, \dots, \pm \sqrt{k}.$$

On peut encore le démontrer en observant que si $x = a$ réduit le premier membre de l'équation (1) à zéro, $x = -a$ jouira de la même propriété, puisqu'il n'entre que des puissances paires de x .

RÉCIPROQUEMENT. *Lorsque toutes les racines d'une équation sont égales deux à deux et de signes contraires, cette équation ramenée à la forme $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx + t = 0$, ne renferme que des puissances paires de l'inconnue; car les*

racines de cette équation étant de la forme $\pm a, \pm b, \dots, \pm k$, son premier membre est le produit des facteurs

$(x-a), (x+a), (x-b), (x+b), \dots, (x-k), (x+k)$, et comme ce produit revient à

$$(x^2 - a^2) \times (x^2 - b^2) \times \dots \times (x^2 - k^2),$$

il ne renfermera que des puissances paires de x .

§ II. Des limites des racines.

232. Toute quantité plus grande que la plus grande racine positive d'une équation est ce qu'on nomme la *limite supérieure* des racines positives de cette équation; et toute quantité moindre que la plus petite des racines réelles positives, est une *limite inférieure* de ces racines.

Les mêmes définitions conviennent aux valeurs absolues des racines négatives.

Nous allons faire voir qu'on peut toujours exprimer les limites des racines d'une équation, en fonction des coefficients de cette équation.

Soit l'équation

$$(1) \dots x^m \pm px^{m-1} \pm qx^{m-2} \pm \dots \pm ex \pm t = 0,$$

et désignons son premier membre par $f(x)$.

On aura trouvé une *limite supérieure* des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, si l'on peut obtenir un nombre positif tel que substitué pour x il rende le premier membre positif, et tel en outre que toute valeur plus grande de x , jouisse de la même propriété.

Pour obtenir une valeur positive de x qui, substituée dans $f(x)$, donne nécessairement un résultat positif, on représente par N le plus grand des coefficients négatifs de $f(x)$ pris positivement; la partie positive de $f(x)$ n'est jamais moindre que x^m , et la valeur absolue de la partie négative de $f(x)$ ne saurait surpasser $Nx^{m-1} + Nx^{m-2} + \dots + Nx + N$; la valeur de x qui rend $x^m - Nx^{m-1} - Nx^{m-2} - \dots - Nx - N$ positif, rendra donc à plus forte raison $f(x)$ positif. Or, l'inégalité

$x^m - Nx^{m-1} - Nx^{m-2} - \dots - Nx - N > 0$, revient à

$x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) > 0$, ou à

$x^m - N\left(\frac{x^m - 1}{x - 1}\right) > 0$, car $x^{m-1} + \dots + x + 1 = \frac{x^m - 1}{x - 1}$.

La dernière inégalité pouvant se mettre sous la forme

$$(2) \dots \frac{(x - 1 - N)x^m + N}{x - 1} > 0,$$

on y satisfait, en posant $x - 1 - N = 0$, ou $x = N + 1$; car cette valeur de x réduit l'inégalité (2) à $\frac{+N}{+N} > 0$, c'est-à-dire à $+1 > 0$.

On rendra donc $f(x)$ positif, en y faisant $x = N + 1$.

Toute valeur de x plus grande que $N + 1$ jouit de la même propriété; car en faisant $x = N + 1 + \delta$ dans l'expression (2) de $x^m - Nx^{m-1} - \dots - Nx - N$, le résultat $\frac{\delta(N+1+\delta)^m + N}{N+\delta}$, est essentiellement positif (on suppose $\delta > 0$); la valeur de $f(x)$, correspondante à $x = N + 1 + \delta$, est donc à plus forte raison positive.

Une valeur de x égale à $N + 1$ ou plus grande que $N + 1$, ne pouvant jamais réduire $f(x)$ à zéro, les racines positives de l'équation $f(x) = 0$, sont moindres que $N + 1$.

Par conséquent : *La limite supérieure des racines positives d'une équation est égale au plus grand des coefficients négatifs pris positivement et augmenté de l'unité.*

EXEMPLE. Soit l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

La limite supérieure de ses racines positives est $2 + 1$, ou 3; et en effet, les racines positives de cette équation étant $+1$ et $+2$, le nombre 3 est plus grand que chacune de ces racines.

233. On peut souvent obtenir une limite supérieure plus approchée, c'est-à-dire une limite supérieure moindre que la précédente. En effet, soit une équation

$$(1) \dots x^m + \dots + qx^{m-n+1} - rx^{m-n} \pm \dots \pm sx \pm t = 0,$$

dans laquelle le premier des termes affectés du signe $-$ est rx^{m-n} ; désignons son premier membre par $f(x)$. Pour déter-

miner la valeur positive de x qui rend nécessairement $f(x)$ positif, on supprime les termes compris entre x^m et $-rx^{m-n}$, ce qui diminue la partie positive de $f(x)$; on affecte tous les autres termes du plus grand coefficient négatif $-N$, ce qui augmente la partie négative de $f(x)$. Les valeurs positives de x qui satisfont à la condition

$$(2) \dots x^m - Nx^{m-n} - Nx^{m-n-1} - \dots - Nx - N > 0,$$

conviennent donc à plus forte raison à l'inégalité proposée

$$(3) \dots x^m + \dots + gx^{m-n+1} - rx^{m-n} \pm \dots \pm sx \pm t > 0.$$

D'après la formule (1), (page 33), l'inégalité (2) revient à

$$x^m - N \left(\frac{x^{m-n+1} - 1}{x - 1} \right) > 0, \text{ ou à}$$

$$(4) \dots \frac{N + \{ (x - 1) x^{n-1} - N \} x^{m-n+1}}{x - 1} > 0.$$

Cette dernière sera vraie, si $x - 1$ étant positif, on a

$$(5) \dots (x - 1) x^{n-1} > N.$$

Pour satisfaire à l'inégalité (5), il suffit de poser

$$(x - 1) (x - 1)^{n-1} = N,$$

car x^{n-1} étant plus grand que $(x - 1)^{n-1}$, on aura

$$(x - 1) x^{n-1} > (x - 1) (x - 1)^{n-1}, \text{ ou } (x - 1) x^{n-1} > N.$$

La condition $(x - 1) (x - 1)^{n-1} = N$, donne

$$(x - 1)^n = N, \quad x - 1 = \sqrt[n]{N}, \quad x = 1 + \sqrt[n]{N}.$$

Prenant donc la valeur arithmétique de $\sqrt[n]{N}$, on sera certain

que l'hypothèse $x = 1 + \sqrt[n]{N}$ satisfait à toutes les inégalités précédentes. Or, n exprime la différence entre l'exposant m de x dans le premier terme, et l'exposant $m - n$ de x dans le premier des termes affectés du signe $-$.

Par conséquent : Lorsque le plus grand coefficient négatif

d'un polynôme $x^n + \text{etc.}$, étant $-N$, le premier des termes affectés du signe $-$ est rx^{n-1} , la valeur de x qui rend ce polynôme nécessairement positif est $1 + \sqrt[n]{N}$.

Toutes les valeurs de x plus grandes que $1 + \sqrt[n]{N}$ jouissent de la même propriété; car l'inégalité (5) $\dots(x-1)x^{n-1} > N$

ayant lieu quand $x = 1 + \sqrt[n]{N}$, si l'on donne à x des valeurs plus grandes, le premier membre $(x-1)x^{n-1}$ augmentera et restera par conséquent plus grand que N .

Il en résulte que $1 + \sqrt[n]{N}$ est une limite supérieure des racines positives de l'équation (1).

Lorsque n et N sont plus grands que l'unité, cette limite est moindre que $1 + N$, et par conséquent plus approchée.

Quand $\sqrt[n]{N}$ est incommensurable, on prend pour limite, la plus grande valeur entière approchée de ce radical augmentée de l'unité.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^6 - 2x^4 - 49x + 4 = 0,$$

la limite supérieure de ses racines positives est $1 + \sqrt[3]{49}$ ou 8.

2^e EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^3 + 7x - 60 = 0,$$

la limite supérieure de ses racines positives est $1 + \sqrt[3]{60}$ ou 5, car la plus grande valeur entière approchée de $\sqrt[3]{60}$ est 4.

234. Pour déterminer la limite inférieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, il suffit d'y faire $x = \frac{1}{z}$ et de chercher la limite supérieure δ des racines positives de la transformée $f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$; la limite inférieure demandée sera $\frac{1}{\delta}$, car x est d'autant plus petit que z est plus grand.

La limite $\frac{1}{\delta}$ sera toujours moindre que l'unité, car δ est plus grand que l'unité.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^3 + 7x - 60 = 0,$$

on y fera $x = \frac{1}{z}$, la transformée sera

$$z^3 - \frac{7}{60} z^2 - \frac{1}{60} = 0,$$

et la limite supérieure des racines positives de cette dernière équation étant $1 + \frac{7}{60}$ ou $\frac{67}{60}$, la limite inférieure des racines positives de l'équation en x sera $\frac{60}{67}$.

2^e EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^6 - 42x^4 + 441x^2 - 49 = 0,$$

on y fera $x = \frac{1}{z}$, la transformée sera

$$\left(\frac{1}{z}\right)^6 - 42\left(\frac{1}{z}\right)^4 + 441\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 49 = 0, \text{ ou}$$

$$z^6 - 9z^4 + \frac{42}{49} z^2 - \frac{1}{49} = 0.$$

On peut prendre $1 + 9$ ou 10 , et $1 + \sqrt[3]{9}$ ou 4 , pour la limite supérieure δ des racines positives de cette dernière équation. Les valeurs correspondantes de la limite inférieure des racines positives de l'équation en x sont $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{4}$; la seconde limite étant la plus grande, est la plus approchée de la plus petite racine positive.

REMARQUE. Quand δ est incommensurable, on cherche la plus grande valeur entière approchée γ de δ ; et l'on prend $\frac{1}{\gamma}$ pour limite inférieure; cette limite est moindre que $\frac{1}{\delta}$.

EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^3 - 30x^2 + 20x + 2 = 0,$$

on y fait $x = \frac{1}{z}$, la transformée est

$$z^3 + 10z^2 - 15z + \frac{1}{2} = 0.$$

La limite supérieure des racines positives de cette dernière équation étant $\delta = 1 + \sqrt{15}$, la plus grande valeur entière approchée γ de δ est 5; de sorte que l'on peut prendre $\frac{1}{5}$ pour limite inférieure des racines positives de l'équation en x .

235. On peut exprimer la limite inférieure des racines positives de l'équation (1)... $f(x) = 0$, en fonction des coefficients de cette équation; car en désignant le plus grand coefficient négatif par $-N$, le plus grand coefficient positif par $+P$, et le dernier terme par $\pm t$, l'équation (1) prend la forme

$$(2) \dots x^m + \dots - Nx^{m-k} + \dots + Px^{m-\ell} + \dots \pm t = 0.$$

Les nombres, N , P , t , m , k et ℓ sont positifs, et en faisant $x = \frac{1}{z}$ dans l'équation (2), elle conduit à

$$(3) \dots z^m + \dots + \left(\frac{+P}{\pm t}\right) z^\ell + \dots + \left(\frac{-N}{\pm t}\right) z^k + \dots + \left(\frac{1}{\pm t}\right) = 0.$$

Quand le dernier terme de l'équation (2) est positif, le plus grand coefficient négatif de l'équation (3) est $\frac{-N}{+t}$, de sorte que la limite supérieure des racines positives de l'équation (3) est $\delta = 1 + \frac{N}{t} = \frac{t+N}{t}$; la limite inférieure des racines positives de l'équation (2) est $\frac{1}{\delta} = \frac{t}{t+N}$.

Lorsque le dernier terme de l'équation (2) est négatif, le plus grand coefficient négatif de l'équation (3) est $\frac{+P}{-t}$, et

l'on trouve que la limite inférieure des racines positives de l'équation (2) est $\frac{t}{t+p}$.

Par conséquent : La limite inférieure des racines positives d'une équation est exprimée par une fraction qui a pour numérateur le dernier terme de l'équation proposée, et pour dénominateur le dernier terme augmenté du plus grand coefficient de signe contraire à ce dernier terme. Le dernier terme et le plus grand coefficient négatif, doivent être pris positivement. Cette limite est toujours moindre que l'unité.

EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^3 - 30x^2 + 20x + 2 = 0,$$

la limite inférieure de ses racines positives est $\frac{2}{2+30}$ ou $\frac{1}{16}$.

236. Pour déterminer les limites des racines négatives d'une équation (1) ... $f(x) = 0$, on y fait $x = -y$, les racines de la transformée (2) ... $f(-y) = 0$, étant égales à celles de l'équation (1) prises avec des signes contraires (n° 226, 7°), les limites des racines positives de (2) seront les limites demandées; c'est-à-dire que si les limites des racines positives de l'équation (2) sont l et L , toutes les racines négatives de l'équation (1) seront comprises entre $-l$ et $-L$.

EXEMPLE. Soit l'équation

$$(1) \dots x^5 + x^4 + 8x^3 - 32x^2 - 64x - 1 = 0;$$

on y fait $x = -y$, ce qui donne

$$(2) \dots y^5 + y^4 - 8y^3 - 32y^2 + 64y - 1 = 0.$$

Les limites des racines positives de l'équation (2) étant $\frac{1}{65}$ et $\frac{1}{65}$, celles des racines négatives de l'équation (1) sont $-\frac{1}{65}$ et $-\frac{1}{65}$.

237. Lorsqu'une équation ne renferme que des puissances paires de l'inconnue, ses racines positives et négatives ont les mêmes limites; car en changeant x en $-x$, l'équation reste

la même. Et en effet, dans ce cas toutes les racines étant égales deux à deux et de signes contraires (n° 231), les valeurs absolues des racines négatives sont les mêmes que celles des racines positives.

EXEMPLE. Soit l'équation $x^6 - 2x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

Toutes ses racines positives étant comprises entre 4 et $\frac{1}{4}$, ses racines négatives tombent entre -4 et $-\frac{1}{4}$.

238. *La forme particulière d'une équation permet quelquefois de trouver des limites plus approchées que les précédentes. Nous allons en donner des exemples.*

1°. Soit l'équation $x^6 + 10x^5 - 30x^4 + 360x - 900 = 0$.

Les limites supérieures de ses racines positives déduites des règles des n°s 232 et 233, sont 901 et 31.

Mais, en mettant cette équation sous la forme

$$x^6 + 10(x-3)x^4 + 300(x-3) = 0,$$

on voit que toutes ses racines positives sont moindres que 3.

2°. Soit l'équation $x^6 - 2x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

Si l'on y fait $x^2 = z$, elle devient $z^3 - 2z^2 - 8z + 1 = 0$.

Les racines de cette dernière équation étant comprises entre

9 et $\frac{1}{9}$, la relation $x = \sqrt{z}$ démontre que les racines de l'é-

quation en x tombent entre $\sqrt{9}$ et $\sqrt{\frac{1}{9}}$, c'est-à-dire entre 3

et $\frac{1}{3}$. Ces nouvelles limites sont plus approchées que les li-

mites 4 et $\frac{1}{4}$ qui seraient fournies par les règles des n°s 233 et 234,

car $3 < 4$ et $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

3°. Soit l'équation générale

$$(1) \dots x^{4m} + ax^{4m-2} + \dots + qx^{4m-2n+2} - rx^{4m-2n} \pm \dots \pm sx^2 \pm t = 0,$$

qui ne contient que des puissances paires de x , et dans laquelle

le premier des termes affectés du signe — est $-rx^{m-n}$.

Si le plus grand coefficient négatif est $-N$, la limite supérieure des racines positives et négatives sera $L = 1 + \sqrt[n]{N}$, (n° 233).

On obtient une limite supérieure plus approchée en faisant $x^s = z$. En effet; l'équation (1) devient

$$(2) \dots z^m + az^{m-1} + \dots + qz^{m-n+1} - rz^{m-n} \pm \dots \pm sz \pm t = 0,$$

et la limite supérieure des racines de l'équation (2) étant

$1 + \sqrt[n]{N}$, la relation $x = \sqrt[n]{z}$ prouve que la limite supérieure

des racines de l'équation (1) est $L' = \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{N}}$.

Cette seconde limite est moindre que la première, car

$$L'^s = 1 + \sqrt[n]{N} \quad \text{et} \quad L^s = 1 + \sqrt[n]{N} + 2\sqrt[n]{N}.$$

La limite L' est donc généralement plus approchée que L .

4°. Quand l'équation proposée peut se ramener à la forme

$$(3) \dots (x^n)^m + p(x^n)^{m-1} + q(x^n)^{m-2} + \dots + s(x^n) + t + u = 0,$$

on y fait $x^n = z$; elle devient

$$(4) \dots z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} + \dots + sz + t + u = 0,$$

et la relation $x = \sqrt[n]{z}$ démontre qu'on obtiendra de nouvelles limites des racines de l'équation (3) en extrayant la racine $n^{\text{ième}}$ de chacune des limites des racines de l'équation (4).

REMARQUE. Lorsqu'on aura trouvé, par les méthodes précédentes, plusieurs limites commensurables des racines d'une équation, on devra préférer la plus petite des limites supérieures, et la plus grande des limites inférieures, parce que ces limites sont plus approchées des racines réelles.

239. Les valeurs absolues des coefficients d'une équation restant les mêmes quand on y change le signe de l'inconnue, il est facile de conclure de ce qui précède que les valeurs absolues de toutes les racines sont nécessairement moindres que le plus grand de tous les coefficients pris positivement et augmenté

de l'unité, et qu'elles sont plus grandes qu'une fraction dont le numérateur est le dernier terme de l'équation, pris positivement, et dont le dénominateur est ce dernier terme augmenté de la valeur absolue du plus grand de tous les coefficients.

Ces limites ne sont pas toujours les plus approchées, mais comme elles sont exprimées en fonction des coefficients de l'équation proposée, on les obtient directement sans être obligé de transformer l'équation donnée.

240. Quand un polynôme $x^m \pm px^{m-1} \pm qx^{m-2} \pm \dots \pm sx \pm t$ est ordonné suivant les puissances entières positives et décroissantes de x , on peut toujours déterminer une valeur de x , qui rende le premier terme plus grand que la valeur absolue de la somme de tous les autres termes; et qui soit telle en outre, que toute valeur de x plus grande jouisse de la même propriété.

En effet, soit c la valeur du plus grand de tous les coefficients $p, q, \dots, s, t$; on aura

$$cx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + cx + c > \pm px^{m-1} \pm qx^{m-2} \pm \dots \pm sx \pm t.$$

Il suffit donc de satisfaire à l'inégalité

$$x^m > cx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + cx + c; \text{ elle donne}$$

$$x^m > c \left(\frac{x^m - 1}{x - 1} \right), \text{ (page 374)}; \text{ d'où } \frac{(x-1-c)x^m + c}{x-1} > 0.$$

On satisfait à cette dernière inégalité en prenant $x = c + 1$.

La valeur de x qui rend le premier terme d'un polynôme plus grand que la valeur absolue de la somme de tous les autres termes, est donc égale au plus grand de tous les coefficients pris positivement et augmenté de l'unité.

On démontrera comme dans le n° 232, que toute valeur de x plus grande que $c + 1$ jouit de la même propriété.

Il est facile d'en conclure que si δ désigne un nombre positif quelconque, chacune des valeurs $x = c + 1 + \delta$, $x = -(c + 1 + \delta)$, rendra la valeur absolue du premier terme x^m plus grande que la valeur absolue de la somme de tous les autres termes.

Par conséquent : Lorsque m est pair, chacune des hypothèses $x = c + 1 + \delta$, $x = -(c + 1 + \delta)$, rend le polynôme

$x^m \pm px^{m-1} \pm qx^{m-2} \pm \dots \pm sx \pm t$ positif, quand m est impair, la valeur $x = c + 1 + d$ rend le polynôme positif, tandis que $x = -(c + 1 + d)$ fournit une valeur négative de ce polynôme.

§ III. Règle des signes de Descartes.

241. Lorsque deux termes consécutifs d'une équation sont précédés de signes différens, ce changement de signes s'appelle une *variation*, et il y a une *permanence* toutes les fois que ces deux termes sont affectés des mêmes signes. Il est évident que le nombre des *variations* ajouté à celui des *permanences* est égal au degré de l'équation, c'est-à-dire au nombre des racines.

Lorsqu'un des termes manque, on le rétablit en lui donnant ± 0 pour coefficient.

Ainsi, l'équation $x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ contient une *permanence* et deux *variations*.

Nous allons démontrer qu'une équation

$$x^m \pm px^{m-1} \pm \dots \pm sx \pm t = 0,$$

ne peut avoir plus de racines négatives qu'il n'y a de *permanences*, ni plus de racines positives qu'il n'y a de *variations*.

On peut toujours considérer le premier membre d'une équation comme le produit des facteurs correspondans à ses racines imaginaires par les facteurs correspondans aux racines réelles de cette équation. Il suffit donc de prouver que suivant qu'on multiplie le premier membre d'une équation par $x + a$ ou par $x - a$, ce qui introduit une racine négative $-a$ ou une racine positive $+a$, la nouvelle équation renferme au moins une *permanence* ou une *variation* de plus que l'équation primitive.

Nous démontrerons d'abord cette propriété pour le multiplicateur $x + a$. A cet effet, nous allons faire voir que si un polynôme de m termes jouit de la propriété, quand on le multiplie par $x + a$, de donner un produit qui renferme au moins une *permanence* de plus que le polynôme multiplicande, un polynôme de $m + 1$ termes jouira toujours de la même propriété.

Soit X un polynome $x^m + Ax^{m-1} + \dots + Sx + T$, composé de $m + 1$ termes, $A, \dots, S, T$ étant de signes quelconques, et soit X' ce même polynome privé de son dernier terme T . Appelons P le produit développé de X multiplié par $x + \alpha$, et P' celui de X' par $x + \alpha$.

On aura $P = P' + T(x + \alpha)$, ou $P = P' + T\alpha$,

en désignant par P'' ce que devient le polynome $P' + Tx$ après la réduction de Tx avec $S\alpha x$ qui est le dernier terme de P' .

Il s'agit de faire voir que si $X' \times (x + \alpha)$ ou P' a au moins une permanence de plus que X' , le polynome $X \times (x + \alpha)$ ou P contiendra au moins une permanence de plus que X .

La réduction de Tx avec $S\alpha x$ présente deux cas :

1°. *S peut avoir le signe de T ; alors P a toujours une permanence de plus que P'.* Car les deux derniers termes $S\alpha x$ et Tx étant, dans ce cas, de même signe, P'' a la même succession de signes que P' , et comme Tx et $T\alpha$ sont toujours de même signe, il en résulte que $P' + T\alpha$ ou P a une permanence de plus que P' . Mais d'un autre côté, quand S et T sont de même signe, X a une permanence de plus que X' ; or, par hypothèse P' a aussi une permanence de plus que X' ; donc P a autant de permanences que X ; par conséquent P a au moins une permanence de plus que X .

2°. *S et T peuvent être de signes différens ; alors P n'aura pas moins de permanences que P'.* Car, ou la valeur numérique de $S\alpha$ est plus grande que celle de T , et dans ce cas P'' a le même nombre de permanences que P' , donc aussi $P' + T\alpha$ ou P a le même nombre de permanences que P' ; ou bien la valeur numérique de $S\alpha$ est moindre que celle de T , alors il peut arriver que la permanence, s'il en existe une entre les deux derniers termes de P' , soit détruite dans P'' par le signe du terme $T\alpha$; mais comme le dernier terme de P'' est, dans ce cas, de même signe que $T\alpha$, on introduit dans $P' + T\alpha$ ou P , une nouvelle permanence ; de sorte que P aura toujours au moins autant de permanences que P' . Mais, d'un autre côté, quand S et T sont de signes diffé-

rens, X n'a pas plus de permanences que X' ; mais, par hypothèse, P' a au moins une permanence de plus que X' ; donc P a au moins une permanence de plus que X .

Or, il est facile de s'assurer que tout binôme $x^m \pm px^{m-1}$ multiplié par $x + a$, donne pour produit un trinôme..... $x^{m+1} + (a \pm p)x^m \pm pax^{m-1}$ qui renferme une permanence de plus que le multiplicande $x^m \pm px^{m-1}$; car si l'on a égard au signe supérieur, le multiplicande n'a qu'une permanence et le produit en a deux; et si l'on prend le signe inférieur, le binôme n'a point de permanence, tandis que le second terme du produit forme une permanence avec le premier ou le troisième terme, selon que p est plus petit ou plus grand que a .

La propriété énoncée étant vraie pour tout binôme, il résulte de ce qui vient d'être démontré qu'elle est également vraie pour un trinôme, pour un quatinôme, et en général, pour un polynôme quelconque.

On prouverait par des raisonnemens analogues aux précédens qu'en multipliant le premier membre d'une équation $f(x) = 0$, par $x - a$, on introduira au moins une variation dans le premier membre de la nouvelle équation $\phi(x) = 0$.

Mais on peut arriver directement à cette conséquence en se fondant sur ce qui est déjà démontré. En effet, que l'on change les signes des termes de rang pair dans l'équation $f(x) = 0$, et que l'on multiplie le premier membre par $x + a$, on obtiendra une nouvelle équation $F(x) = 0$, dont les racines seront égales et de signes contraires à celles de $\phi(x) = 0$, (page 368). Or, pour déduire $\phi(x)$ de $F(x)$, il suffit de changer les signes des termes de rang pair; mais par ce changement, les permanences deviennent des variations et les variations deviennent des permanences, et comme on a démontré que $F(x)$ a, au moins, une permanence de plus que $f(x)$, il s'ensuit aussi que $\phi(x)$ a au moins une variation de plus que $f(x)$, (*).

(*) Cette démonstration de la *Règle des signes* de DESCARTES est due à M. MAYER (déjà cité page 307); elle me paraît beaucoup plus simple que les démonstrations qui avaient été données jusqu'à ce jour.

Les propriétés du n° 226 (8° et 9°) sont des cas particuliers du théorème précédent.

242. La règle générale du n° 241 peut servir quelquefois à faire reconnaître si une équation a des racines imaginaires. En effet, soit l'équation $x^3 + 2x - 5 = 0$.

En rétablissant le terme en x^2 , il viendra

$$x^3 \pm 0x^2 + 2x - 5 = 0.$$

Si l'on prend le signe supérieur, il n'y a qu'une variation; donc l'équation ne saurait avoir plus d'une racine positive.

Si l'on prend le signe inférieur, il n'y aura pas de permanence; ce qui prouve que l'équation n'a pas de racine négative.

L'équation proposée a donc au moins deux racines imaginaires.

En général, si on rétablit dans une équation du $m^{\text{ième}}$ degré, les termes qui y manquent en leur donnant ± 0 pour coefficient, et si en ayant égard successivement aux signes supérieurs et aux signes inférieurs, les nombres des permanences et des variations ne sont pas les mêmes dans les deux cas, l'équation admet nécessairement des racines imaginaires.

En effet; supposons qu'on obtienne dans le premier cas, P' permanences et V' variations, et dans le 2° cas, P'' permanences et V'' variations, on aura $P' + V' = P'' + V'' = m$.

Soit $P' > P''$, il faudra par compensation que $V' < V''$; et comme d'après le théorème du n° 241, l'équation ne peut pas admettre plus de P'' racines négatives et plus de V' racines positives, elle admettra nécessairement des racines imaginaires; car

$$P'' + V' < P'' + V'', \text{ et par suite } P'' + V' < m.$$

243. Lorsque toutes les racines d'une équation sont réelles, elle renferme autant de racines négatives que de permanences, et autant de racines positives que de variations.

En effet; désignons par m le degré de l'équation, par n et p le nombre de ses racines négatives et positives, par P et V le nombre des permanences et des variations; les m racines étant réelles, on a $n + p = m$.

D'ailleurs, l'équation ayant $m + 1$ termes, le nombre total $P + V$ des permanences et des variations est aussi égal à m .

Donc, $n + p = P + V$; d'où $P - n = p - V$.

Or, en vertu du principe du n° 241, n ne peut surpasser P , et p ne saurait surpasser V . Donc, $n = P$ et $p = V$.

Ce qui démontre la propriété énoncée.

§ IV. Des fonctions dérivées.

244. Lorsqu'on change x en $x + h$ dans une fonction quelconque $f(x)$, et qu'on effectue le développement de $f(x + h)$ suivant les puissances entières positives et croissantes de h , le coefficient de la première puissance de h dans le développement de $f(x + h)$ est ce qu'on nomme la *fonction dérivée* de $f(x)$, ou simplement la *dérivée* de $f(x)$. On la représente par $f'(x)$.

Nous allons faire voir comment on peut trouver la fonction dérivée d'un polynome entier, et d'un produit de facteurs binomes de la forme $x + a$. Nous représenterons toujours la fonction de x proposée par $f(x)$.

245. Soit le polynome entier

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx^2 + sx + t.$$

Pour calculer sa fonction dérivée $f'(x)$, on y change x en $x + h$, ce qui donne

$$(x+h)^m + p(x+h)^{m-1} + q(x+h)^{m-2} + \dots + r(x+h)^2 + s(x+h) + t.$$

Dans cette expression de $f(x + h)$, on développe les puissances indiquées, à l'aide de la formule du binome; les termes affectés de la première puissance de h sont les seconds termes de ces développemens, et l'on trouve que le coefficient de la première puissance de h dans le développement de $f(x + h)$ est

$$mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + (m-2)qx^{m-3} + \dots + 2rx + s.$$

Comparant cette valeur de $f'(x)$ à la valeur

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx^2 + sx + t$$

25..

de $f(x)$, on voit que pour former la fonction dérivée d'un polynôme $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$, il suffit de multiplier chaque terme du polynôme par l'exposant de x dans ce terme et de diminuer l'exposant d'une unité; car en opérant ainsi, les termes

$$x^m, \quad px^{m-1}, \quad qx^{m-2}, \dots, rx^2$$

du polynôme $f(x)$, fournissent les termes correspondans

$$mx^{m-1}, \quad (m-1)px^{m-2}, \quad (m-2)qx^{m-3}, \dots, 2rx,$$

de la fonction dérivée $f'(x)$; et x^0 étant égal à l'unité, les deux derniers termes $sx + tx^0$ de $f(x)$ donnent $1 \times sx^0 + 0 \times tx^{-1}$; ce qui se réduit au dernier terme s de $f'(x)$.

Par exemple, si $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 4$,
on aura $f'(x) = 3x^2 - 2 \times 5x + 7$.

246. Soit proposé de calculer la fonction dérivée du produit de m facteurs binômes $x-a, x-b, x-c, \dots, x-k$, sans effectuer la multiplication.

$$\text{On a } f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k).$$

Changeant x en $x+h$, il vient

$$f(x+h) = (x-a+h)(x-b+h)(x-c+h)\dots(x-k+h).$$

Pour obtenir le coefficient de la première puissance de h dans ce dernier produit, il suffit de multiplier successivement le terme affecté de h dans chaque facteur, par les termes indépendans de h dans les autres facteurs, et de faire la somme de ces produits partiels (n° 18). On trouve de cette manière que le coefficient cherché est

$$f'(x) = (x-b)(x-c)\dots(x-k) + (x-a)(x-c)\dots(x-k) + \text{etc.}$$

Il en résulte que la fonction dérivée du produit indiqué des m binômes $x-a, x-b, \dots, x-k$, est égale à la somme de tous les produits différens qu'on peut former en prenant ces binômes $m-1$ à $m-1$.

On parvient au même résultat, en divisant successivement $f(x)$ par chacun de ses m facteurs $(x-a), (x-b), \dots, (x-k)$; la somme des m quotiens exprime $f'(x)$. De sorte qu'on peut

mettre $f'(x)$ sous cette autre forme

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c} + \dots + \frac{f(x)}{x-k}.$$

1^{er} EXEMPLE. Soit $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, on aura
 $f'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$
 $= \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c}.$

2^e EXEMPLE. Soit $f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}$.

La fonction dérivée de ce produit est

$$\begin{aligned} & \alpha(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma} \\ & + \beta(x-b)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha}(x-c)^{\gamma} \\ & + \gamma(x-c)^{\gamma-1}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}; \end{aligned}$$

car d'après la règle précédente, l'expression de $f'(x)$ est composée de α fois le quotient de $f(x)$ par $x-a$, plus de β fois le quotient de $f(x)$ par $x-b$, plus enfin de γ fois le quotient de $f(x)$ par $x-c$.

247. Quand tous les facteurs premiers $x-a, x-b, x-c, \dots, x-k$ de $f(x)$ sont inégaux, il n'existe pas de commun diviseur entre $f(x)$ et sa fonction dérivée $f'(x)$; car s'il en existait un, il ne renfermerait que des facteurs premiers de $f(x)$; or tous ces facteurs étant inégaux, aucun d'eux ne saurait diviser $f'(x)$, puisque d'après la formule générale

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c} + \dots + \frac{f(x)}{x-k},$$

chacun des facteurs $x-a, x-b$, etc., manque dans un terme de $f'(x)$ et se trouve dans tous les autres. Il n'existe donc pas de diviseur commun entre $f(x)$ et $f'(x)$.

Quand $f(x)$ contient des facteurs égaux, il existe un commun diviseur en x entre $f(x)$ et $f'(x)$; car, par exemple, si les deux facteurs $x-a, x-b$, de $f(x)$ sont égaux, le quotient de $f(x)$ par $x-a$ contiendra encore le facteur $x-a$, et comme ce

facteur entre dans tous les autres termes $\frac{f(x)}{x-b}$, $\frac{f(x)}{x-c}$, etc., de $f'(x)$, il divise exactement $f'(x)$. Par conséquent, $f(x)$ et $f'(x)$ admettent le commun diviseur $x-a$.

Il résulte des deux propriétés précédentes, que si $f(x)$ et $f'(x)$ n'ont pas de diviseur commun, tous les facteurs premiers de $f(x)$ seront inégaux, et que s'il existe un commun diviseur en x entre $f(x)$ et $f'(x)$, la fonction $f(x)$ contiendra nécessairement des facteurs égaux.

On en déduit cette règle générale :

Pour reconnaître si un polynôme entier $x^m + px^{m-1} + \dots + sx + t$ contient des facteurs égaux, on cherche le plus grand commun diviseur entre ce polynôme et son polynôme dérivé..... $mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + \dots + s$. Quand il n'y a pas de commun diviseur en x , tous les facteurs premiers du polynôme proposé sont inégaux ; lorsqu'il existe un commun diviseur fonction de x , le polynôme donné contient nécessairement des facteurs égaux.

1^{er} EXEMPLE. Soit $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$;

on a $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 14x - 1$.

$f(x)$ et $f'(x)$ n'ayant pas de commun diviseur, les quatre facteurs premiers de $f(x)$ sont inégaux ; et en effet,

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+1)(x+3).$$

2^e EXEMPLE. Soit $f(x) = x^3 - 27x + 54$;

on a $f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$.

Le plus grand diviseur commun à $f(x)$ et $f'(x)$ étant $x-3$, le polynôme $x^3 - 27x + 54$, décomposé en facteurs du premier degré, renferme des facteurs égaux ; et en effet, ce polynôme est le produit de $x+6$ par $(x-3)^2$.

248. Nous avons vu (n° 246) comment on peut déduire la fonction dérivée du produit $(x-a)^a(x-b)^b(x-c)^c$, de celle d'un produit de facteurs inégaux.

On peut calculer directement cette fonction dérivée. En effet,

soit

$$f(x) = (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} (x-c)^{\gamma},$$

on changera x en $x+h$ dans $f(x)$, ce qui donnera

$$f(x+h) = (x-a+h)^{\alpha} (x-b+h)^{\beta} (x-c+h)^{\gamma}.$$

On développera les puissances indiquées en regardant $(x-a)+h$, $(x-b)+h$, $(x-c)+h$, comme des binômes dont les premiers termes sont $x-a$, $x-b$, $x-c$; et comme on n'a besoin que du coefficient de la première puissance de h , on n'écrira pas les termes qui renferment des puissances de h supérieures à la première; les facteurs de $f(x+h)$ deviendront

$$(x-a)^{\alpha} + \alpha (x-a)^{\alpha-1} h + \text{etc.},$$

$$(x-b)^{\beta} + \beta (x-b)^{\beta-1} h + \text{etc.},$$

$$(x-c)^{\gamma} + \gamma (x-c)^{\gamma-1} h + \text{etc.}$$

Pour obtenir le coefficient $f'(x)$ de la première puissance de h dans le produit de ces trois facteurs, on multipliera successivement le coefficient de la première puissance de h dans un facteur, par les termes indépendans de h dans les autres facteurs (n° 18), et l'on trouvera que le coefficient cherché est

$$\begin{aligned} & \alpha (x-a)^{\alpha-1} (x-b)^{\beta} (x-c)^{\gamma} \\ & + \beta (x-b)^{\beta-1} (x-a)^{\alpha} (x-c)^{\gamma} \\ & + \gamma (x-c)^{\gamma-1} (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta}. \end{aligned}$$

Cette valeur de $f'(x)$ est la même que celle du n° 246.

249. La comparaison de cette expression de $f'(x)$ avec la fonction primitive $f(x)$, démontre que le plus grand diviseur commun à un polynôme $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$, et à sa fonction dérivée $mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + \text{etc.}$, est le produit des facteurs égaux de ce polynôme élevés respectivement à une puissance moindre d'une unité.

En effet, tous les termes de l'expression de $f'(x)$, étant divisibles par $(x-a)^{\alpha-1} (x-b)^{\beta-1} (x-c)^{\gamma-1}$, on peut mettre la valeur de $f'(x)$ sous la forme

(3)... $f'(x) = (x-a)^{\alpha-1} \times (x-b)^{\beta-1} \times (x-c)^{\gamma-1} \times P$,
dans laquelle on a

$$P = \alpha(x-b)(x-c) + \beta(x-a)(x-c) + \gamma(x-a)(x-b).$$

Mais, P n'est divisible par aucun des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$ de $f(x)$, car chacun de ces binômes divise deux des trois termes de P et ne divise pas le troisième; P et $f(x)$ sont donc premiers entre eux. Comparant la valeur

$$(x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} (x-c)^{\gamma} \text{ de } f(x)$$

à la valeur correspondante

$$(x-a)^{\alpha-1} (x-b)^{\beta-1} (x-c)^{\gamma-1} \times P \text{ de } f'(x),$$

et observant que P est premier avec $f(x)$, on voit que le plus grand diviseur commun à $f(x)$ et $f'(x)$ est le produit

$$(x-a)^{\alpha-1} \times (x-b)^{\beta-1} \times (x-c)^{\gamma-1}$$

des facteurs de $f(x)$ élevés respectivement à une puissance moindre d'une unité. Cè qui démontre le principe énoncé.

EXEMPLE. Soit $f(x) = x^3 - 27x + 54$.

On a $f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$.

Le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$ est $x-3$. Le polynome $f(x)$ contient donc deux facteurs égaux à $x-3$. Et en effet,

$$f(x) = (x+6)(x-3)^2, \quad f'(x) = 3(x+3)(x-3).$$

1^{re} REMARQUE. Il résulte du principe énoncé que les facteurs qui n'entrent qu'une seule fois dans un polynome, ne se trouvent plus dans sa dérivée.

2^e REMARQUE. Les propriétés qui ont été démontrées dans le n° 247 peuvent aussi se déduire du principe général du n° 249. En effet; quand tous les facteurs de $f(x)$ sont inégaux,

on a $\alpha = 1$, $\zeta = 1$, $\gamma = 1$; le plus grand diviseur commun à $f(x)$ et $f'(x)$ se réduit à l'unité; $f(x)$ et $f'(x)$ sont donc premiers entre eux.

Lorsque $f(x)$ renferme des facteurs égaux, l'un des exposants α , ζ , γ , est plus grand que l'unité, le plus grand commun diviseur $(x-a)^{\alpha-1} (x-b)^{\zeta-1} (x-c)^{\gamma-1}$ entre $f(x)$ et $f'(x)$ renferme donc x .

DES DÉRIVÉES SUCCESSIVES.

250. La dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ étant une nouvelle fonction de x , on peut chercher de même la fonction dérivée de $f'(x)$; cette nouvelle fonction dérivée est la *deuxième dérivée* de $f(x)$, et on la désigne par $f''(x)$.

Par une raison semblable, la dérivée de $f''(x)$ est la troisième dérivée de $f(x)$, on la désigne par $f'''(x)$; la fonction $f'''(x)$ est la première dérivée de $f''(x)$, ou la deuxième dérivée de $f'(x)$. Et ainsi de suite.

1^{er} EXEMPLE. Soit $f(x) = x^3 - 7x^2 + 4$.

On a $f'(x) = 3x^2 - 14x$, $f''(x) = 6x - 14$, $f'''(x) = 6$.

Toutes les autres dérivées de $f(x)$ sont nulles; car l'expression de $f'''(x)$ pouvant se mettre sous la forme $6x^0$, la dérivée de $f'''(x)$ est $0 \times 6x^{0-1}$, ou zéro.

En général : *Toutes les dérivées par rapport à x , d'une quantité indépendante de x , sont égales à zéro.*

2^e EXEMPLE. Soit

$$f(x) = x^m + px^{m-1} + \dots + rx^2 + sx + t,$$

on aura

$$f'(x) = mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + \dots + 2rx + s,$$

$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2} + (m-1)(m-2)px^{m-3} + \dots + 2r,$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3)px^{m-4} + \text{etc.}$$

En continuant ainsi, il est facile de voir que la $(m-1)^{\text{me}}$ dérivée de $f(x)$ sera

$m(m-1)(m-2)\dots 3.2x + (m-1)(m-2)\dots 3.2.1 \times p$,

et que par suite la $m^{\text{ième}}$ dérivée sera $m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1$.

Toutes les dérivées suivantes seront égales à zéro.

251. Lorsque $f(x)$ est un polynome entier, les coefficients des diverses puissances de h dans le développement de $f(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h , peuvent être exprimés au moyen des dérivées successives de $f(x)$. En effet, soit

$f(x) = x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx^2 + tx + u$, on aura

$f(x+h) = (x+h)^m + p(x+h)^{m-1} + \dots + s(x+h)^2 + t(x+h) + u$.

Développant les diverses puissances du binôme $x+h$ par rapport aux puissances croissantes de h , l'expression de $f(x+h)$ deviendra

$$\begin{array}{l} x^m + \quad mx^{m-1} \\ + px^{m-1} + (m-1)px^{m-2} \\ + qx^{m-2} + (m-2)qx^{m-3} \\ \vdots \\ + sx^2 + \quad 2sx \\ + tx + \quad t \\ + u \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} h + \quad m(m-1)x^{m-2} \\ + (m-1)(m-2)px^{m-3} \\ + (m-2)(m-3)qx^{m-4} \\ \vdots \\ + \quad \quad 2s \\ + \quad \quad t \end{array} \right| \quad \frac{1}{2}h^2 + \text{etc.}$$

Dans ce développement de $f(x+h)$, le terme indépendant de h est la fonction primitive

$f(x) = x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx^2 + tx + u$.

Le coefficient

$mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + (m-2)qx^{m-3} + \dots + 2sx + t$,

de la première puissance de h , est la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.

Le coefficient de $\frac{1}{2}h^2$ est la 2^e dérivée $f''(x)$ de $f(x)$.

Et en poussant plus loin les calculs, on verra que les coefficients de $\frac{h^3}{2.3}$, $\frac{h^4}{2.3.4}$, etc., sont les dérivées successives $f''(x)$, $f'''(x)$, etc., de $f(x)$.

Par conséquent, lorsque dans un polynome $f(x)$ de la forme

$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx^2 + tx + u$, on change x en $x + h$, le résultat $f(x + h)$, ordonné suivant les puissances croissantes de h devient

$$f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{2 \cdot 3}f'''(x) + \text{etc.}$$

Nous ferons souvent usage de cette propriété remarquable.

EXEMPLE. Soit $f(x) = x^2 - 5x + 7$,

on a $f'(x) = 2x - 5, f''(x) = 2$.

Toutes les autres dérivées de $f(x)$ étant nulles, le développement général de $f(x + h)$ se réduit à

$$f(x + h) = (x^2 - 5x + 7) + h(2x - 5) + \frac{h^2}{2} \times 2.$$

On parvient au même résultat en changeant x en $x + h$ dans $x^2 - 5x + 7$.

§ V. De la résolution d'une équation numérique à une seule inconnue.

252. Nous avons vu comment on peut résoudre les équations du premier et du second degré à une seule inconnue, et nous avons obtenu des formules générales qui expriment les racines en fonction des coefficients. Nous trouverons, par la suite, des formules semblables pour les équations du troisième et du quatrième degré; mais lorsqu'une équation à une seule inconnue est d'un degré plus élevé, on ne sait plus exprimer ses racines en fonction de ses coefficients. Cependant, lorsque l'équation est numérique, on peut déterminer toutes ses racines réelles, quel que soit d'ailleurs son degré.

Nous donnerons, dans la troisième section, le moyen de trouver les racines imaginaires.

Les racines réelles pouvant être commensurables ou incommensurables, nous allons nous occuper successivement de la recherche de ces deux classes de racines.

De la recherche des Racines réelles commensurables.

253. Les racines commensurables sont nécessairement des nombres entiers ou fractionnaires.

Les racines entières sont faciles à obtenir, car il suffit d'essayer tous les nombres entiers positifs et négatifs, compris entre les limites des racines de l'équation proposée; ce qui n'offre aucune difficulté.

Exemple. Soit l'équation $6x^3 - 43x^2 + 79x - 12 = 0$.

Ses racines positives étant comprises entre zéro et 9, on donnera successivement à x les valeurs 1, 2, 3, ... 7, 8, et l'on reconnaîtra que $x = 3$ et $x = 4$, satisfont à l'équation proposée.

Cette équation ne contient pas de racine négative (n° 241).

Pour découvrir la troisième racine, on pourrait diviser le premier membre par le produit $x^2 - 7x + 12$ des facteurs commensurables $x - 3$, $x - 4$, correspondans aux racines obtenues $+3$, $+4$; le quotient $6x - 1$ égalé à zéro fournirait la troisième racine $x = \frac{1}{6}$. Mais le principe du n° 226, (5°), conduit plus simplement au même résultat; car la somme des trois racines de l'équation proposée étant $\frac{43}{6}$, si l'on en ôte la somme 7 des racines connues $+3$, $+4$, le reste $\frac{1}{6}$ exprimera la troisième racine.

254. Pour trouver les racines fractionnaires, on ramène ce cas au précédent, en transformant l'équation proposée en une autre dont les racines sont égales à celles de la proposée, multipliées par un nombre d tel que les racines commensurables de la transformée soient des nombres entiers; et comme on sait trouver les racines entières de cette nouvelle équation, il suffira de les diviser par le nombre connu d , pour obtenir les racines commensurables (entières et fractionnaires) de l'équation proposée.

Pour effectuer la transformation indiquée, on observe d'abord, que lorsque le coefficient du premier terme d'une équation étant l'unité, les coefficients des autres termes sont des nombres entiers, cette équation ne peut admettre aucune racine fractionnaire; de sorte que ses racines commensurables sont nécessairement des nombres entiers. En effet, soit une équation de cette forme,

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx + t = 0.$$

Si l'une de ses racines pouvait être une fraction irréductible $\frac{b}{a}$, on aurait

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m + p\left(\frac{b}{a}\right)^{m-1} + q\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + \dots + s\frac{b}{a} + t = 0; \text{ d'où}$$

$$\frac{b^m}{a^m} = -(pb^{m-1} + qab^{m-2} + \dots + sba^{m-2} + ta^{m-1}).$$

Or, par hypothèse, $a, b, p, q, \dots, s, t$, sont des nombres entiers, et m est un nombre entier positif; la fraction irréductible $\frac{b^m}{a^m}$ serait donc égale à un nombre entier; ce qui est absurde. Le principe est donc démontré.

Les racines commensurables de l'équation (1) ne pouvant être que des nombres entiers, on est conduit à ramener l'équation $f(y) = 0$, dont on cherche les racines fractionnaires, à la forme (1). Pour y parvenir, on chasse d'abord tous les dénominateurs, ce qui donne une équation

$$(2) \dots ay^m + by^{m-1} + cy^{m-2} + \dots + ky + l = 0,$$

dans laquelle $a, b, c, \dots, k, l$, sont des nombres entiers, et l'on cherche par quel nombre d on doit multiplier les racines de l'équation (2), pour que la transformée soit réductible à la forme (1), et par suite pour que ses racines commensurables soient des nombres entiers. A cet effet, on pose $y \times d = x$, d'où $y = \frac{x}{d}$, l'équation (2) devient

$$a\left(\frac{x}{j}\right)^m + b\left(\frac{x}{j}\right)^{m-1} + c\left(\frac{x}{j}\right)^{m-2} + \dots + k\left(\frac{x}{j}\right) + l = 0,$$

et en multipliant tous les termes par j^{m-1} , on trouve

$$\frac{a}{j} x^m + x b^{m-1} + c j x^{m-2} + \dots + k j^{m-2} x + l j^{m-1} = 0.$$

Pour que cette dernière prenne la forme (1), il suffit de faire $j=a$, d'où $y=\frac{x}{a}$, car il en résulte

$$(3) \dots x^m + b x^{m-1} + c a x^{m-2} + \dots + k a^{m-2} x + l a^{m-1} = 0.$$

Toutes les racines commensurables de l'équation (3) étant des nombres entiers, il sera facile de les déterminer, et en les divisant par le nombre connu a , les quotiens seront les racines commensurables (entières et fractionnaires) de l'équation (2) proposée.

EXEMPLE. Soit l'équation (4) $\dots 4y^3 - 7y + 3 = 0$.

Pour la ramener à la forme (1), on y fera $y=\frac{x}{4}$; la transformée sera

$$4\left(\frac{x}{4}\right)^3 - 7\left(\frac{x}{4}\right) + 3 = 0, \text{ d'où } (5) \dots x^3 - 28x + 48 = 0.$$

Les valeurs commensurables de x seront des nombres entiers.

Toutes les racines positives de l'équation (5) sont moindres que $1 + \sqrt{48}$ ou que 8; changeant x en $-x$, on trouve $x^3 - 28x - 48 = 0$, de sorte que les valeurs absolues des racines négatives de l'équation (5) sont moindres que $1 + \sqrt{48}$ ou que 8. Il suffit donc d'essayer pour x les nombres entiers

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7.$$

On trouve que $x=2$, $x=4$ et $x=-6$, satisfont à l'équation (5); les valeurs correspondantes de y déduites de la relation $y=\frac{x}{4}$, sont $+\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{2}$.

255. Nous allons faire voir qu'on peut souvent diminuer le nombre des essais. A cet effet, considérons l'équation

$$(1) \dots x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0,$$

dans laquelle p_1 , p_2 et p_3 sont des nombres entiers positifs ou négatifs. Si α représente une racine commensurable de cette équation, α sera nécessairement un nombre entier, et on aura

$$\alpha^3 + p_1 \alpha^2 + p_2 \alpha + p_3 = 0, \text{ d'où } \frac{p_3}{\alpha} = -(p_2 + p_1 \alpha + \alpha^3).$$

Il faut donc que le quotient de p_3 par α soit un nombre entier.

Toute racine commensurable d'une équation ramenée à la forme (1), divise donc le dernier terme de cette équation.

On obtiendra donc les racines commensurables de l'équation (1) en essayant les diviseurs du dernier terme qui sont compris entre zéro et les limites supérieures des racines.

EXEMPLE. Soit l'équation $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$.

Les valeurs absolues de ses racines réelles étant comprises entre 6 et -10 , il suffit d'essayer les diviseurs 1, 2, 3, -1 , -2 , -3 , -6 , -9 , du dernier terme. On trouve ainsi que les racines de l'équation proposée sont $+3$, -2 et -3 .

On peut diminuer le nombre des essais à faire sur les diviseurs du dernier terme p_3 ; car en posant $\frac{p_3}{\alpha} = q_1$, q_1 sera un nombre entier, et on aura

$$q_1 = -(p_2 + p_1 \alpha + \alpha^3), \text{ d'où } \frac{q_1 + p_2}{\alpha} = -(p_1 + \alpha).$$

Le quotient de $q_1 + p_2$ par α doit donc être un nombre entier.

Si cette deuxième condition n'est pas satisfaite, le diviseur α du dernier terme p_3 ne sera pas racine de l'équation (1).

Si le quotient de $q_1 + p_2$ par α est un nombre entier q_2 , on aura

$$q_2 = -(p_1 + \alpha), \text{ d'où } q_2 + p_1 = -\alpha.$$

Il faut donc que $q_2 + p_1$ soit égal au diviseur α pris avec un signe contraire.

Toute racine commensurable α de l'équation (1) doit satisfaire à ces trois conditions.

RÉCIPROQUEMENT, tout diviseur α du dernier terme qui satisfera aux conditions précédentes sera une racine de l'équation (1), car en éliminant q_1 et q_2 entre les relations énoncées

$$\frac{p_3}{\alpha} = q_1, \quad \frac{q_1 + p_2}{\alpha} = q_2, \quad q_2 = -(p_1 + \alpha),$$

on trouve successivement

$$\frac{q_1 + p_2}{\alpha} = -(p_1 + \alpha), \quad q_1 = -(\alpha + p_1)\alpha - p_2 = \frac{p_3}{\alpha},$$

$$p_3 = -(\alpha + p_1)\alpha^2 - p_2\alpha, \quad \alpha^3 + p_1\alpha^2 + p_2\alpha + p_3 = 0,$$

et cette dernière relation exprime que α est racine de l'équation (1) ... $x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$.

Par conséquent : Pour découvrir si un diviseur α du dernier terme de l'équation $x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$, est racine de cette équation, il suffit de chercher le quotient q_1 de p_3 par α ; on ajoute à q_1 le coefficient p_2 de la 1^{re} puissance de x , et on divise la somme $q_1 + p_2$ par α ; si le quotient n'est pas un nombre entier, α ne sera pas racine; si le quotient est un nombre entier q_2 , on ajoute à ce quotient le coefficient p_1 de x^2 ; si la somme $q_2 + p_1$ est égale au diviseur α pris avec un signe contraire, α sera une racine; et si cette somme n'est pas égale à $-\alpha$, le diviseur α ne sera pas racine.

Ainsi, dans l'exemple de la page 399, pour essayer le diviseur 3 du dernier terme de l'équation $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$, on divise -18 par 3, ce qui fournit le quotient -6 ; on ajoute à ce quotient le coefficient -9 de x , et on divise la somme -15 par 3, ce qui donne le quotient -5 ; on ajoute à ce quotient le coefficient 2 de x^2 , la somme -3 étant égale au diviseur 3 pris en signe contraire, on voit que ce diviseur est une racine de l'équation $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$.

On trouvera d'une manière semblable que les autres racines sont -2 et -3 .

256. Des raisonnemens et des calculs analogues pouvant s'appliquer à une équation,

$$(2) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-2} x^2 + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

dans laquelle tous les coefficients sont des nombres entiers, l'analogie conduit à cette règle générale :

Pour découvrir si un diviseur α du dernier terme p_m de l'équation (2) est racine de cette équation, divisez p_m par α ; le quotient sera un nombre entier q_1 ; ajoutez à q_1 le coefficient p_{m-1} de la 1^{re} puissance de x , et divisez la somme par α ; le quotient devra être un nombre entier q_2 ; ajoutez à q_2 le coefficient p_{m-2} de x^2 et divisez la somme par α ; le quotient devra être un nombre entier q_3 . Continuant ces calculs, vous parviendrez à ajouter au $m-1$ ^{ème} quotient q_{m-1} , le coefficient p_1 de x^{m-1} ; la somme devra être égale au diviseur α que vous essayez pris avec un signe contraire. Tout diviseur du dernier terme qui satisfait à ces m conditions est racine de l'équation (2), et tout diviseur qui ne satisfait pas à une de ces conditions doit être rejeté.

On ne soumet pas à ces essais les diviseurs $+1$, -1 du dernier terme p_m , parce qu'il est plus simple de faire successivement $x=+1$ et $x=-1$ dans l'équation proposée.

On n'essaie que les diviseurs du dernier terme qui sont compris entre zéro et les limites supérieures des racines.

Si l'on veut démontrer directement cette règle générale, on désignera par α une racine commensurable de l'équation

$$(2) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-2} x^2 + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

α sera un nombre entier (n° 254), et on aura

$$(3) \dots \alpha^m + p_1 \alpha^{m-1} + p_2 \alpha^{m-2} + \dots + p_{m-2} \alpha^2 + p_{m-1} \alpha + p_m = 0;$$

d'où

$$\frac{p_m}{\alpha} = - (p_{m-1} + p_{m-2} \alpha + \dots + p_2 \alpha^{m-3} + p_1 \alpha^{m-2} + \alpha^{m-1}).$$

Le quotient de p_m par α est donc un nombre entier q_1 ; ajoutant à q_1 le coefficient p_{m-1} de x , et divisant la somme par α , le quotient sera un nombre entier q_2 , car

$$\frac{q_1 + p_{m-1}}{\alpha} = - (p_{m-2} + p_{m-3} \alpha + \dots + p_2 \alpha^{m-4} + p_1 \alpha^{m-3} + \alpha^{m-2}) = q_2.$$

Continuant ces calculs, on sera conduit aux égalités

$$\frac{q_1 + p_{m-1}}{a} = -(p_{m-1} + p_{m-2}a + \dots + p_1a^{m-4} + a^{m-3}) = q_2$$

$$\frac{q_2 + p_{m-2}}{a} = -(p_{m-2} + p_{m-3}a + \dots + p_1a^{m-5} + a^{m-4}) = q_3$$

$$\frac{q_{m-3} + p_3}{a} = -(p_3 + p_1a + a^2) = q_{m-1}$$

$$\frac{q_{m-1} + p_1}{a} = -(p_1 + a) = q_{m-1}$$

$$q_{m-1} + p_1 = -a.$$

Toute racine commensurable de l'équation (2) satisfait donc à ces m conditions.

La réciproque est vraie, car ces m conditions ayant lieu, la relation (3) exprime que $x = a$ rend l'équation (2) identique.

EXEMPLE. Soit l'équation (4) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

Toutes ses racines positives sont comprises entre 0 et +4; ses racines négatives se trouvent entre 0 et -8; on ne doit donc prendre que les diviseurs +1, +2, +3, -1, -2, -3, -6, du dernier terme. On fait d'abord $x = +1$ et $x = -1$ dans (4), et l'on voit que +1 et -1 sont racines.

Pour essayer le diviseur +2, on divise +6 par +2; le quotient est $q_1 = +3$; on ajoute à +3 le coefficient -1 de x , et la somme divisée par +2 fournit le quotient $q_2 = 1$; on ajoute à ce quotient le coefficient -7 de x^2 ; la somme divisée par +2 donne le quotient $q_3 = -3$; on ajoute à -3 le coefficient +1 de x^3 ; la somme -2 étant égale au diviseur +2 pris avec un signe contraire, ce diviseur est une racine de l'équation proposée.

On reconnaîtra de même que -3 est racine.

De sorte que les quatre racines de l'équation (4) sont +1, -1, +2 et -3.

On a l'habitude d'essayer tous les diviseurs à la fois comme on le voit ici :

Diviseurs à essayer	- 6	- 3	- 2	+ 2	+ 3
Quotiens q_1	- 1	- 2	- 3	+ 3	+ 2
Dividendes	- 2	- 3	- 4	+ 2	+ 1
Quotiens q_2		+ 1	+ 2	+ 1	
Dividendes		- 6	- 5	- 6	
Quotiens q_3		+ 2		- 3	
Valeurs de $q_3 + p_1$		+ 3		- 2	

La première ligne horizontale contient les diviseurs du dernier terme 6, compris entre les limites des racines. On a divisé + 6, par chacun de ces diviseurs, ce qui a fourni les quotiens placés dans la seconde ligne; on a ajouté à chaque quotient, le coefficient - 1 de x ; ce qui a donné les dividendes placés dans la troisième ligne; la division de ces nombres par les diviseurs correspondans de + 6 a fourni les quotiens contenus dans la quatrième ligne; et les dividendes - 2, + 1, n'étant pas divisibles par les diviseurs correspondans - 6, + 3, ces diviseurs ne sont pas des racines de l'équation proposée. On a ajouté à chacun des quotiens + 1, + 2, + 1, le coefficient - 7 de x^2 ; ce qui a fourni les dividendes de la cinquième ligne. On a divisé ces dividendes par les diviseurs correspondans - 3, - 2, + 2; et - 5 n'étant pas divisible par le diviseur correspondant - 2, ce diviseur n'est pas racine de l'équation proposée; on a écrit les quotiens + 2, - 3, dans la sixième ligne. Enfin, on a ajouté aux quotiens + 2, - 3, le coefficient + 1 de x^3 ; les sommes + 3, - 2, étant respectivement égales aux diviseurs correspondans pris avec des signes contraires, ces diviseurs sont racines de l'équation (4).

REMARQUE. Lorsqu'on veut appliquer la règle générale à une équation qui ne renferme pas toutes les puissances de x inférieures au degré de cette équation, on rétablit d'abord les termes qui manquent en les affectant du coefficient zéro.

EXEMPLE. Soit l'équation de cette espèce

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

on la mettra sous la forme

$$x^3 + 0x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Si l'on applique la règle générale à cette dernière équation, et si l'on observe que les valeurs absolues des racines réelles sont comprises entre zéro et $+4$, on sera conduit aux calculs suivans :

Diviseurs à essayer	+ 2	+ 3	- 2	- 3
Quotiens q , de 6 par a	+ 3	+ 2	- 3	- 2
Dividendes	- 4	- 5	- 10	- 9
Quotiens q_1	- 2		+ 5	+ 3
Valeurs de $q_1 + p_1$	- 2		+ 5	+ 3

La première ligne horizontale renferme les diviseurs du dernier terme 6 compris entre les limites des racines. On a divisé 6 par chaque diviseur, ce qui a fourni les quotiens q , placés dans la deuxième ligne. On a ajouté à chacun de ces quotiens le coefficient -7 de la première puissance de x , ce qui a donné les dividendes placés dans la troisième ligne. La division de chacun de ces dividendes par les diviseurs correspondans $+2$, -2 , -3 , de $+6$, a fourni les quotiens exacts -2 , $+5$, $+3$; et -5 n'étant pas divisible par $+3$, on en a conclu que $+3$ n'est pas racine. On a ajouté aux quotiens q_1 , le coefficient zéro de x^2 , ce qui a fourni les sommes -2 , $+5$, $+3$; ces sommes devant être égales aux diviseurs correspondans $+2$, -2 , -3 , pris avec des signes contraires, on voit que les diviseurs $+2$, -3 sont racines, et que -2 n'est pas racine. D'ailleurs $x=1$ satisfait à l'équation proposée. Les trois racines de cette équation sont donc $+1$, $+2$ et -3 .

257. Lorsqu'on a trouvé toutes les racines commensurables

$a, b, \dots, k$, d'une équation $f(x)=0$, il est facile d'en déduire une équation $\phi(x)=0$, qui ne renferme plus que les racines incommensurables et imaginaires de la proposée; il suffit pour cela de diviser $f(x)$ par le produit des facteurs correspondans $x-a, x-b, \dots, x-k$; le quotient Q ne pouvant pas renfermer d'autres racines commensurables que $a, b, \dots, k$, on cherche quelles sont celles de ces racines qui réduisent Q à zéro. On divise de même Q par le produit des facteurs correspondans à ces dernières racines; et en continuant à opérer d'une manière semblable, on parvient à un dernier quotient $\phi(x)$ qui n'est réduit à zéro par aucune des valeurs $x=a, x=b, \dots, x=k$; l'équation $\phi(x)=0$ ne renferme plus que les racines incommensurables et imaginaires de l'équation primitive $f(x)=0$. Le nombre de fois qu'on aura pu diviser par les facteurs $x-a, x-b, \dots, x-k$, indiquera le degré de multiplicité des racines commensurables $a, b, \dots, k$.

EXEMPLE. Soit l'équation

$$(1) \dots x^5 - 2x^4 - 17x^3 + 40x^2 + 30x - 72 = 0,$$

on trouvera que ses racines commensurables sont $+3$ et -4 .

Pour déterminer combien de fois les facteurs $x-3, x+4$, entrent dans l'équation (1), on divise son premier membre par le produit x^2+x-12 de ces facteurs; le quotient égalé à zéro donne $x^3-3x^2-2x+6=0$; or les racines commensurables de cette dernière ne peuvent se trouver que parmi les racines commensurables de la proposée, et comme -4 ne divise pas le dernier terme $+6$, il suffit d'essayer $+3$; on trouve que $+3$ est racine; divisant x^3-3x^2-2x+6 par $x-3$, le quotient égalé à zéro donne $x=\pm\sqrt{2}$. Le premier membre de l'équation (1) est donc le produit des facteurs $(x-3)^2, (x+4), (x-\sqrt{2}), (x+\sqrt{2})$; de sorte que cette équation contient deux racines égales à $+3$, et trois racines inégales $-4, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

258. Lorsqu'on a obtenu la valeur exacte α , d'une des racines de l'équation (1) $\therefore f(x)=0$, le principe du n° 249

conduit plus simplement à la détermination du degré de multiplicité de cette racine.

En effet, d'après ce principe, si l'équation (1) a trois racines égales à a , on aura

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)^3 \times M, & f'(x) &= (x-a)^2 \times N, \\ f''(x) &= (x-a) \times P, & f'''(x) &= Q, \end{aligned}$$

et aucun des polynomes M, N, P, Q , ne sera divisible par $x-a$; l'hypothèse $x=a$ ne les réduit donc pas à zéro; d'ailleurs ces polynomes ne peuvent pas devenir infinis, car ils ne contiennent que des puissances positives de x . Faisant donc $x=a$, les fonctions $f(x), f'(x), f''(x)$, se réduiront à zéro, et $f'''(x)$ ne deviendra pas nulle.

En général : Pour trouver combien de fois le facteur $x-a$ entre dans $f(x)$, il suffit de faire $x=a$ dans les dérivées $f'(x), f''(x)$, etc.; le rang de la première dérivée qui n'est pas réduite à zéro, indique combien de fois le facteur $x-a$ entre dans $f(x)$; ce qui exprime le degré de multiplicité de la racine a .

Ainsi, dans l'exemple du n° 257, pour découvrir le degré de multiplicité de la racine commensurable $+3$ de l'équation

$$(1) \dots x^5 - 2x^4 - 17x^3 + 40x^2 + 30x - 72 = 0,$$

on forme les dérivées successives de $f(x)$, qui sont

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 8x^3 - 51x^2 + 80x + 30, \\ f''(x) &= 20x^3 - 24x^2 - 102x + 80, \text{ etc. ;} \end{aligned}$$

on y fait $x=3$; la valeur de $f'(x)$ se réduit à zéro, et $f''(x)$ ne devient pas nul; l'équation (1) renferme donc deux racines égales à $+3$.

La racine commensurable -4 n'entre qu'une seule fois dans l'équation (1), car l'hypothèse $x=-4$ ne réduit pas $f'(x)$ à zéro.

Pour trouver les deux autres racines de l'équation (1), il suffit de diviser son premier membre par le produit..... $x^2 - 2x^2 - 15x + 36$ des facteurs $(x-3)^2, (x+4)$, le quotient $x^3 - 2$ égalé à zéro, donne les racines cherchées $+\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2}$.

Recherche des racines réelles incommensurables.

259. Ce qui précède donnant le moyen de supprimer tous les facteurs correspondans aux racines commensurables, on est conduit à résoudre une équation numérique à une seule inconnue qui n'a plus que des racines incommensurables et imaginaires.

Nous supposons que l'équation est ramenée à la forme

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx^2 + sx + t = 0,$$

et nous désignerons son premier membre par $f(x)$.

260. Lorsque deux quantités a , ζ , mises au lieu de x dans l'équation (1)... $f(x) = 0$, donnent des résultats $f(a)$, $f(\zeta)$, de signes contraires, une des racines de l'équation est comprise entre a et ζ . Cette racine est donc réelle.

1°. Supposons que a et ζ soient tous deux positifs.

Désignons par P la somme des termes positifs de l'équation (1), et par N la somme des termes affectés du signe $-$; l'équation (1) deviendra $P - N = 0$. Or, tous les termes de P et de N sont précédés du signe $+$, et les exposans de x sont positifs; par conséquent, lorsque x croît d'une manière continue, sans cesser d'être positif, P et N croissent aussi d'une manière continue.

Cela posé : si $x = a$ donne un résultat $f(a)$ positif, cette valeur de x rendra $P > N$; et si $x = \zeta$ fournit un résultat $f(\zeta)$ négatif, la valeur ζ de x rendra $P < N$.

Soit $a < \zeta$; si l'on conçoit que x croît d'une manière continue depuis a jusqu'à ζ , ces valeurs de x seront positives, les valeurs correspondantes de P et N croîtront d'une manière continue, et ces accroissemens seront tels que N qui était moindre que P , pour $x = a$, deviendra plus grand que P , pour $x = \zeta$; il y aura donc un instant où N sera égal à P ; il existera donc une valeur de x , comprise entre a et ζ , qui donnera $P = N$; cette valeur sera une racine réelle de l'équation (1).

REMARQUE. La démonstration précédente est entièrement

fondée sur ce que x croissant d'une manière continue depuis α jusqu'à ζ , les valeurs correspondantes de P et N croissent de la même manière; ce qui exige que x reste constamment positif entre α et ζ , car dans le cas où x prendrait des valeurs négatives, les termes de P et N , qui contiennent des puissances impaires de x devenant négatifs, on ne serait plus certain que x augmentant, P et N augmentent.

2°. Quand α et ζ ne sont pas tous deux positifs, on ramène ce cas au précédent en augmentant toutes les racines de l'équation (1), d'une quantité positive δ plus grande que les valeurs absolues de α et de ζ ; à cet effet, on pose

$$x + \delta = z, \text{ d'où } x = z - \delta.$$

Or, d'après cette relation, faire $x = \alpha$ et $x = \zeta$ dans $f(x)$, se réduit à supposer $z = \alpha + \delta$ et $z = \zeta + \delta$ dans $f(z - \delta)$, car les résultats de ces substitutions sont toujours $f(\alpha)$ et $f(\zeta)$. Les valeurs positives $\alpha + \delta$, $\zeta + \delta$, de z , substituées dans $f(z - \delta)$, fournissant deux résultats $f(\alpha)$, $f(\zeta)$, qu'on suppose de signes contraires, l'équation $f(z - \delta) = 0$ a une racine comprise entre $\alpha + \delta$ et $\zeta + \delta$ (1°); mais $x = z - \delta$; l'équation (1) a donc une racine réelle comprise entre α et ζ .

261. Quand deux nombres α , ζ , comprennent un nombre impair de racines de l'équation (1) ... $f(x) = 0$, les hypothèses $x = \alpha$, $x = \zeta$, donnent deux résultats $f(\alpha)$, $f(\zeta)$, qui sont de signes contraires. Lorsque α et ζ ne comprennent pas de racines ou en comprennent un nombre pair, les résultats $f(\alpha)$, $f(\zeta)$, sont de même signe. En effet:

1°. Si les nombres α , ζ , comprennent trois racines réelles a , b , c , de l'équation (1), on aura

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \times \phi(x).$$

L'hypothèse $x = \alpha$ donnera

$$f(\alpha) = (\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c) \times \phi(\alpha),$$

et $x = \zeta$ donnera

$$f(\zeta) = (\zeta - a)(\zeta - b)(\zeta - c) \times \phi(\zeta).$$

Soit $\alpha > \zeta$; les racines a , b , c , seront moindres que α et plus

grandes que ζ ; les facteurs $a - a$, $a - b$, $a - c$, étant positifs, leur produit sera positif; les trois facteurs $\zeta - a$, $\zeta - b$, $\zeta - c$, étant négatifs, leur produit sera négatif (n° 16, 3°). D'ailleurs, a et ζ ne comprenant que les trois racines a , b , c , de l'équation (1), les valeurs de $\phi(a)$ et $\phi(\zeta)$ sont nécessairement de même signe; car autrement, il existerait une valeur d de x , comprise entre a et ζ , qui réduirait $\phi(x)$ à zéro, et qui par suite réduirait $f(x)$ à zéro, puisque $\phi(x)$ est un facteur de $f(x)$; l'équation (1) aurait donc une quatrième racine comprise entre a et ζ , ce qui est contre l'hypothèse; $f(a)$ et $f(\zeta)$, sont donc de signes contraires.

Ce raisonnement convient évidemment à un nombre impair quelconque de racines comprises entre a et ζ .

2°. On prouvera de même que si a et ζ ne comprennent pas de racines de l'équation (1), ou en comprennent un nombre pair, $f(a)$ et $f(\zeta)$ seront de même signe.

262. 1°. Lorsque deux nombres a , ζ , substitués pour x dans l'équation (1)... $f(x) = 0$, fournissent des résultats $f(a)$, $f(\zeta)$, qui sont de signes contraires, il tombe un nombre impair de racines réelles de l'équation (1), entre a et ζ ; car s'il ne tombait pas de racine entre a et ζ , ou s'il en tombait un nombre pair, il suit du principe du n° 261 (2°), que les résultats $f(a)$, $f(\zeta)$, seraient de même signe; ce qui est contre l'hypothèse.

2°. Quand deux nombres a , ζ , substitués pour x dans l'équation (1)... $f(x) = 0$, fournissent deux résultats $f(a)$, $f(\zeta)$, de même signe, il n'existe pas de racine réelle de l'équation (1), entre a et ζ , ou il en tombe un nombre pair; car si a et ζ comprenaient un nombre impair de racines réelles de l'équation (1), il suit du principe du n° 261 (1°), que les résultats $f(a)$, $f(\zeta)$ seraient de signes contraires, ce qui est contre l'hypothèse.

REMARQUE. Les deux principes que nous venons d'établir étant d'un usage continuel pour trouver les racines incommensurables, il serait à désirer qu'on pût les démontrer directement. Mais comme cela n'est possible que dans le cas particulier où toutes les racines comprises entre les nombres substitués sont inégales, cette démonstration serait sans importance.

263. *Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à celui de son dernier terme.*

En effet; supposons d'abord que le dernier terme soit négatif dans l'équation proposée

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx^2 + sx - t = 0.$$

L'hypothèse $x = 0$ fournit un résultat négatif $-t$; d'ailleurs en mettant dans le premier membre pour x la limite supérieure L des racines réelles positives de l'équation (1), on obtient nécessairement un résultat positif. L'équation (1) a donc au moins une racine réelle positive comprise entre zéro et L .

Quand le dernier terme est positif, l'équation proposée est de la forme

$$(2) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx^2 + sx + t = 0.$$

Pour ramener ce cas au précédent, on change les signes des racines en remplaçant x par $-x$, ce qui donne

$$x^m - px^{m-1} + qx^{m-2} - \dots - rx^2 + sx - t = 0, \text{ (n}^\circ \text{ 226, 7}^\circ \text{).}$$

Or, cette dernière équation ayant son dernier terme négatif, on vient de prouver qu'elle a au moins une racine réelle positive α ; l'équation (2), qui a ses racines de signes contraires, a donc au moins une racine réelle négative $-\alpha$.

264. *Toute équation de degré pair dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.* En effet; soit l'équation

$$(3) \dots x^{2m} + px^{2m-1} + qx^{2m-2} + \dots + rx^2 + sx - t = 0.$$

L'hypothèse $x = 0$ fournit un résultat négatif $-t$; et on obtient un résultat positif en mettant pour x , dans le 1^{er} membre, la limite supérieure L des racines positives. L'équation (3) a donc au moins une racine réelle positive comprise entre zéro et L .

Si l'on change x en $-x$, les racines changeront de signe et l'équation (3) deviendra

$$x^{2m} - px^{2m-1} + qx^{2m-2} - \dots + rx^2 - sx + t = 0.$$

Cette dernière ayant son dernier terme négatif, on vient de prouver qu'elle a au moins une racine réelle positive $+a$; l'équation (3) a donc au moins une racine réelle négative $-a$.

265. *Une équation de degré pair dont le dernier terme est positif, n'a pas de racine réelle, ou elle en a un nombre pair.*

En effet; soit l'équation

$$(1) \dots x^{2m} + px^{2m-1} + qx^{2m-2} + \dots + rx^2 + sx + t = 0,$$

si l'on désigne par L la limite supérieure de ses racines positives, les hypothèses $x=0$, $x=L$, donneront deux valeurs positives du premier membre. Par conséquent, cette équation n'a pas de racine réelle positive, ou elle en a un nombre pair (n° 262, 2°).

Changeant x en $-x$ dans (1), et représentant par N' le plus grand coefficient négatif de la transformée

$$(2) \dots x^{2m} - px^{2m-1} + qx^{2m-2} - \dots + rx^2 - sx + t = 0,$$

les hypothèses $x=0$, $x=N'+1$, fourniront deux résultats positifs. Par conséquent, l'équation (2) n'a pas de racine réelle positive, ou elle en a un nombre pair (n° 262, 2°); et par suite, l'équation (1) n'a pas de racine réelle négative, ou elle en a un nombre pair.

Pour concevoir comment l'équation (1) peut n'avoir que des racines imaginaires, on n'a qu'à multiplier des facteurs du second degré de la forme

$$x^2 - 2ax + a^2 + C^2, \quad x^2 - 2a'x + a'^2 + C'^2, \text{ etc.},$$

et en égalant le produit à zéro, l'équation qui en résulte est de degré pair, son dernier terme est positif, et toutes ses racines sont imaginaires, puisqu'elles sont fournies par les équations

$$x^2 - 2ax + a^2 + C^2 = 0, \quad x^2 - 2a'x + a'^2 + C'^2 = 0, \text{ etc.},$$

qui donnent

$$x = a \pm C\sqrt{-1}, \quad x = a' \pm C'\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

D'après les propriétés des n^{os} 263, 264 et 265, les racines imaginaires d'une équation de degré quelconque sont toujours en nombre pair, une équation qui n'a que des racines imaginaires est nécessairement de degré pair et son dernier terme est positif; enfin lorsqu'on a été toutes les racines réelles d'une équation, l'équation résultante doit être de degré pair et doit avoir son dernier terme positif.

266. Par conséquent : Lorsqu'un polynome entier.....
 $x^m + px^{m-1} + \dots + sx + t$, ne peut être réduit à zéro par aucune valeur réelle de x , il est nécessairement de degré pair, son dernier terme est positif, et il reste constamment positif pour des valeurs réelles quelconques de x .

267. Lorsque deux nombres entiers a, b , mis pour x dans l'équation (1),... $f(x) = 0$, donnent deux résultats $f(a), f(b)$, de signes contraires, il est facile d'approcher autant qu'on veut d'une des racines comprises entre a et b .

A cet effet; on détermine d'abord la plus petite valeur entière approchée a d'une des racines comprises entre a et b ; ce qui est toujours facile; car soit $a < b$, il suffit de substituer successivement pour x dans $f(x)$, les nombres entiers consécutifs à partir de a , jusqu'à ce qu'on trouve deux nombres entiers $a, a+1$, qui fournissent deux résultats $f(a), f(a+1)$, de signes contraires, a sera la plus petite valeur entière approchée d'une racine R , de l'équation (1).

Nous allons faire voir comment on peut calculer la racine R à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé, lorsqu'on connaît d'ailleurs la plus petite valeur entière approchée de R .

268. 1^{re} Méthode. Soit l'équation

$$(2) \dots x^3 - 112x + 448 = 0.$$

Désignons son premier membre par $f(x)$, et pour simplifier les calculs, observons qu'on peut mettre $f(x)$ sous la forme $x^3 - 112(x - 4)$; les valeurs $x = 5, x = 6$, donnant pour

$f(x)$ deux résultats de signes contraires, la plus petite valeur entière approchée de la racine R comprise entre 5 et 6 est 5.

Si l'on veut obtenir cette racine à moins d'un dixième d'unité, on mettra successivement pour x dans $x^3 - 112(x - 4)$, les valeurs,

$$5, \quad 5,1, \quad 5,2, \dots, \quad 5,9, \quad 6,$$

qui diffèrent entre elles de 0,1; et comme les hypothèses $x=5$, $x=6$, ont donné pour $f(x)$ deux résultats de signes contraires, on obtiendra nécessairement un changement de signe dans les résultats de deux de ces substitutions consécutives. On trouve en effet, que $x=5,4$ et $x=5,5$, fournissent deux résultats de signes contraires; la racine R tombe donc entre 5,4 et 5,5. De sorte que chacun de ces nombres exprime R à moins d'un dixième d'unité.

Si l'on veut obtenir R à moins d'un centième d'unité, on substituera pour x , dans $x^3 - 112(x - 4)$, les nombres

$$5,40, \quad 5,41, \quad 5,42, \quad 5,43, \text{ etc.},$$

qui diffèrent entre eux de 0,01, et l'on reconnaîtra que la racine cherchée tombe entre 5,42 et 5,43; de sorte que chacun de ces nombres exprime R à moins d'un centième d'unité.

Continuant ces calculs, on trouvera que la racine cherchée est 5,42758 etc.

REMARQUE. Ce procédé donnera toujours le moyen de calculer une des racines comprises entre a et b , avec autant d'exactitude qu'on voudra.

Méthode de NEWTON.

269. 2^e MÉTHODE. Quand on connaît une valeur suffisamment approchée d'une racine incommensurable, on peut quelquefois calculer cette racine avec un plus grand degré d'approximation, par un procédé qui est dû à NEWTON.

Soit a la valeur à moins d'un dixième d'unité d'une racine réelle incommensurable R de l'équation (1)... $f(x) = 0$.

Pour obtenir une plus grande approximation, on fait $x = \alpha + z$, et z a autant de valeurs réelles que x ; mais la valeur particulière de z que l'on veut calculer, est moindre que $\frac{1}{10}$; car elle exprime ce qu'il faut ajouter à α pour obtenir la racine R . Nous ne considérerons que cette valeur particulière de z .

Cela posé: d'après ce qu'on a vu (n° 251), si l'on fait $x = \alpha + z$ dans l'équation (1) ... $f(x) = 0$, elle deviendra

$$f(\alpha) + zf'(\alpha) + \frac{1}{2}z^2f''(\alpha) + \dots + z^m = 0; \text{ d'où}$$

$$(2) \dots z = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{f'(\alpha)} \left\{ \frac{1}{2}z^2f''(\alpha) + \frac{1}{2 \cdot 3}z^3f'''(\alpha) + \dots + z^m \right\}.$$

La valeur de z étant moindre que $\frac{1}{10}$, les puissances z^2 , z^3 , etc., sont respectivement moindres que $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc. On conçoit donc que dans la relation (2), la somme des termes qui contiennent z^2 , z^3 , ..., z^m , sera souvent moindre que $\frac{1}{100}$; et dans ce cas la relation

$$(3) \dots z = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

fournira une valeur de z à moins de $\frac{1}{100}$ d'unité. On calculera donc le quotient de la division de $-f(\alpha)$ par $f'(\alpha)$ avec deux décimales; ce quotient ajouté à α , donnera une valeur ζ de R qui sera approchée à moins de $\frac{1}{100}$ d'unité.

Pour obtenir une plus grande approximation, on fait $x = \zeta + z$; z est moindre que $\frac{1}{100}$ et l'équation (1) conduit à

$$(4) \dots z = -\frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{1}{f'(\zeta)} \left\{ \frac{1}{2}z^2f''(\zeta) + \frac{1}{2 \cdot 3}z^3f'''(\zeta) + \dots + z^m \right\}.$$

z étant moindre que $\frac{1}{100}$, les puissances z^2 , z^3 , etc., sont res-

pectivement moindres que $\frac{1}{100^2}$, $\frac{1}{100^3}$, etc.; et par suite, la somme des termes qui suivent $\frac{f'(z)}{f'(\zeta)}$ est généralement moindre que $\frac{1}{100^2}$; dans ce cas, la formule

$$(5) \dots z = -\frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)},$$

donne z à moins de $\frac{1}{100^2}$. De sorte qu'en calculant le quotient de $-f(\zeta)$ par $f'(\zeta)$ avec quatre décimales, et en ajoutant ce quotient à ζ , le résultat fournit une nouvelle valeur γ de R qui est approchée à moins de $\frac{1}{100^2}$.

En continuant ainsi, on voit que dans l'hypothèse actuelle, on obtient à chaque opération le double du nombre des décimales qu'on a trouvées dans l'opération précédente.

La formule (6) $\dots z = -\frac{f(x)}{f'(x)}$ conduisant aux mêmes résultats (3), (5), etc., quand on donne successivement à x les valeurs α , ζ , etc., on peut établir cette règle générale :

Soit α la valeur, à moins d'un dixième d'unité, d'une racine réelle incommensurable R de l'équation (1) $\dots f(x) = 0$; pour obtenir des valeurs plus approchées de cette racine, faites $x = \alpha$ dans (6) et calculez z avec deux décimales; ajoutez cette valeur approchée de z à α ; la somme sera une 2^e valeur ζ de R approchée à moins de 0,01. Faites $x = \zeta$ dans (6), et calculez z avec quatre décimales; ajoutez cette nouvelle valeur approchée de z à ζ ; la somme sera une 3^e valeur γ de R , approchée à moins de 0,0001. Et ainsi de suite.

Lorsque les quantités qu'on néglige dans les formules (2), (4), etc., ne sont pas respectivement moindres que $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100^2}$, etc., la méthode précédente est en défaut. Ces valeurs des quantités qu'on néglige n'étant jamais connues d'avance, il est indispen-

sable de vérifier à chaque opération si les décimales que l'on conserve dans les valeurs de z , fournissent les valeurs de la racine cherchée R avec l'approximation indiquée.

A cet effet, on peut faire usage du procédé suivant :

Pour découvrir si une valeur R' de R calculée avec n décimales, ne diffère de la valeur exacte de R que d'une quantité moindre que $\frac{1}{10^n}$, on fait successivement $x = R' + \frac{1}{10^n}$, $x = R' - \frac{1}{10^n}$ dans $f(x)$; si les résultats sont de signes contraires, R sera compris entre ces deux valeurs de x , de sorte que R' exprimera R à moins de $\frac{1}{10^n}$. Si les résultats sont de même signe, la méthode de NEWTON sera en défaut.

EXEMPLE. Soit toujours l'équation,

$$x^3 - 112x + 448 = 0; \text{ on a}$$

$$f(x) = x^3 - 112(x - 4), \quad f'(x) = 3x^2 - 112.$$

Les hypothèses $x = 5,4$, $x = 5,5$, donnant deux valeurs de $f(x)$ qui sont de signes contraires, il tombe une racine R de l'équation proposée entre $5,4$ et $5,5$; de sorte que la valeur de R à moins d'un dixième d'unité est $\alpha = 5,4$.

Pour obtenir la racine R à $0,01$ près, on fait $x = 5,4$ dans

$$(1) \dots z = -\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^3 - 112(x - 4)}{3x^2 - 112},$$

et l'on trouve $z = \frac{0,664}{24,52} = 0,02$ etc.

Conservant les deux premières décimales de z , on ajoute $0,02$ à $5,4$, ce qui fournit la 2^e valeur approchée $\zeta = 5,42$ de R .

Pour s'assurer que $5,42$ exprime R à moins de $0,01$, on fait successivement $x = 5,41$ et $x = 5,43$ dans la valeur $x^3 - 112(x - 4)$ de $f(x)$, les résultats étant de signes contraires, la racine R tombe entre $5,41$ et $5,43$; de sorte que $5,42$ exprime R à moins de $0,01$.

Si l'on veut une plus grande approximation, on fera $x = 5,42$

dans la formule (1), et on calculera z avec quatre décimales, ce qui donnera $z = 0,0075$, $R = 5,4275$.

Cette valeur de R est approchée à moins de 0,0001; car en faisant $x = 5,4274$ et $x = 5,4276$ dans $f(x)$, on obtient deux résultats de signes contraires.

Méthode des substitutions successives de LAGRANGE.

270. 3^e MÉTHODE. Lorsqu'on sait que deux nombres entiers consécutifs ne comprennent qu'une seule racine d'une équation, la méthode du n° 161 fournit le moyen de calculer cette racine avec une approximation donnée. En effet, soit toujours l'équation

$$(1) \dots x^3 - 112x + 448 = 0,$$

dans laquelle $x = 5$ et $x = 6$ ont fourni deux résultats de signes contraires, et supposons qu'on sache qu'il ne tombe qu'une seule racine R entre 5 et 6.

Pour approcher davantage de cette racine, on pose

$$x = 5 + \frac{1}{z}.$$

La substitution de cette valeur de x dans l'équation (1) conduit à

$$(2) \dots 13z^3 - 37z^2 + 15z + 1 = 0.$$

Cette équation n'admet qu'une seule valeur réelle de z plus grande que l'unité; car autrement il tomberait plus d'une valeur réelle de x entre 5 et 6; ce qui est contre l'hypothèse.

Pour obtenir la valeur entière approchée z de z , il suffit de donner successivement à z , dans le premier membre de l'équation (2), les valeurs 1, 2, 3, etc., on obtiendra nécessairement deux résultats de signes contraires avant de parvenir à la limite supérieure des racines positives de l'équation (2); car deux de ces substitutions consécutives ne pouvant comprendre qu'une seule racine de l'équation (2), tant qu'on trouvera des résultats de même signe, les substitutions ne comprendront aucune racine, et quand on arrivera à substituer les deux nombres en-

tiers consécutifs qui comprennent la valeur positive de x , on en sera averti par deux résultats de signes contraires. On trouve ainsi que x est compris entre 2 et 3. On fait

$$x = 2 + \frac{1}{x_1}$$

dans l'équation (2), ce qui conduit à

$$(3) \dots 13x_1^3 - 23x_1^2 - 41x_1 - 13 = 0;$$

et comme on est certain que x_1 n'a qu'une seule valeur réelle plus grande que l'unité, on obtiendra la plus petite valeur entière approchée de x_1 en donnant successivement à x_1 les valeurs 1, 2, 3, etc.; les valeurs correspondantes du premier membre de l'équation (3) étant -64 , -83 , $+8$, etc., la plus petite valeur entière approchée de x_1 est 2.

Continuant ces calculs, on trouve

$$x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}, \quad x_3 = 19 + \frac{1}{x_4}, \text{ etc.};$$

ce qui conduit à la valeur de R en fraction continue.

Si l'on s'arrête à $x_3 = 19$, la réduite correspondante $\frac{749}{138}$ sera trop petite, mais l'erreur sera moindre que $\frac{1}{138^2}$ ou que 0,00005 etc.; calculant le quotient de la division de 749 par 138, avec quatre décimales, on trouve que la valeur de R , à moins de 0,0001, est 5,4275.

En général, lorsqu'on a trouvé la plus petite valeur entière approchée α d'une racine incommensurable positive R de l'équation (1) $\dots f(x) = 0$, et lorsqu'on sait de plus qu'il ne tombe que cette racine entre α et $\alpha + 1$, la méthode précédente fournit le moyen de calculer cette racine avec autant d'exactitude qu'on veut. On fait $x = \alpha + \frac{1}{x}$ dans (1); ce qui conduit à une transformée (2) $\dots \phi(x) = 0$; cette dernière a nécessairement une seule racine réelle positive plus grande que l'unité, car il ne tombe qu'une valeur de x entre α et $\alpha + 1$. L'équa-

tion (2) n'ayant qu'une racine plus grande que l'unité, on obtiendra la plus petite valeur entière approchée ζ de cette racine, en donnant successivement à z les valeurs 1, 2, 3, etc. On fera $z = \zeta + \frac{1}{z_1}$ dans (2); cela donnera une transformée en z_1 , qui n'aura qu'une racine réelle plus grande que l'unité; on calculera la plus petite valeur entière approchée γ de z_1 ; et ainsi de suite. La racine incommensurable R , comprise entre α et $\alpha + 1$, sera exprimée par une fraction continue indéfinie; et par conséquent, on pourra en déduire la valeur de cette racine avec une approximation donnée (n° 159).

REMARQUE. La méthode de LAGRANGE conduit ordinairement à des calculs plus longs que celle de NEWTON, mais elle a sur cette dernière l'avantage de ne jamais être en défaut.

271. Lorsqu'en substituant pour x des nombres entiers consécutifs dans une équation du $m^{\text{ième}}$ degré $f(x) = 0$, on trouve $m - 1$ changemens de signes dans les valeurs correspondantes de $f(x)$, on est certain que les m racines de cette équation sont réelles, et la méthode de LAGRANGE fournit le moyen de calculer les valeurs de ces racines avec une approximation donnée.

En effet, les $m - 1$ changemens de signes de $f(x)$, indiquent la présence de $m - 1$ racines comprises entre les nombres qui ont fourni des résultats de signes contraires; ces $m - 1$ racines sont donc réelles, et par suite la $m^{\text{ième}}$ racine est nécessairement réelle (n° 226, 5°). Or, on connaît les plus petites valeurs entières approchées de $m - 1$ racines, et l'on est certain qu'il ne peut tomber plus d'une racine entre deux nombres entiers consécutifs qui ont fourni deux résultats de signes contraires; on pourra donc approcher autant qu'on voudra de ces $m - 1$ racines, par l'une quelconque des méthodes des n° 268 et 270, et on en déduira la $m^{\text{ième}}$ racine (n° 226, 5°).

EXEMPLE. Reprenons l'équation $x^3 - 112x + 448 = 0$; et pour faciliter les substitutions, mettons son premier membre sous les formes $x^3 + 112(4 - x)$, $x^3 - 112(x - 4)$. Lorsqu'on y met successivement pour x les valeurs,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc.,

les valeurs correspondantes du premier membre sont

+ 448, + 337, + 232, + 139, + 64, + 13, - 8, + 7, etc.

L'équation proposée a donc une racine comprise entre 5 et 6, et une autre entre 6 et 7 (n° 260).

On a vu (pages 413, 417 et 418) que la valeur approchée de la première racine est 5,427 etc.

On trouvera de même que la deuxième racine est 6,768 etc.

La somme de ces deux racines étant 12,195 etc., la troisième racine est - 12,195 etc.

272. Lorsqu'en substituant dans le premier membre d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré (1) ... $f(x) = 0$, les nombres entiers 0, 1, 2, 3, etc., 0, - 1, - 2, - 3, etc., compris entre les limites supérieures des racines positives et négatives de cette équation, les résultats ne présentent pas $m-1$ changemens de signes, on ne connaît plus le nombre des racines réelles de l'équation (1); car il arrive quelquefois que deux nombres consécutifs qui fournissent deux résultats de même signe comprennent un nombre pair de racines réelles, et que deux nombres qui fournissent deux résultats de signes contraires comprennent un nombre impair de racines réelles.

On évite cet inconvénient en calculant une quantité δ moindre que la différence entre deux racines réelles quelconques de l'équation (1) proposée, et en substituant successivement pour x tous les nombres

0, δ , 2δ , 3δ , etc., 0, - δ , - 2δ , - 3δ , etc.;

compris entre zéro et les limites supérieures des racines positives et négatives de l'équation (1). En effet :

1°. Lorsqu'on obtiendra deux résultats de signes contraires, il y aura une racine réelle de l'équation (1) comprise entre les deux nombres $n\delta$, $n\delta + \delta$, qui auront fourni ces deux résultats; et il n'y en aura qu'une, car pour qu'il y en eût deux, il faudrait que leur différence fût moindre que la différence

δ entre les deux nombres substitués, ce qui est contre l'hypothèse.

2°. Quand deux substitutions $n\delta$, $n\delta + \delta$, fourniront deux résultats de même signe, il n'y aura pas de racine de l'équation (1) entre $n\delta$ et $n\delta + \delta$; car s'il y en avait, elles seraient en nombre pair, il y en aurait donc au moins deux, ce qui est impossible.

On obtiendra donc ainsi autant de changemens de signes dans les résultats des substitutions, indiquées, qu'il y a de racines réelles dans la proposée; ce qui indiquera la présence de toutes ces racines, et ce qui donnera leurs valeurs approchées à moins de δ .

Si δ était plus grand que l'unité, on trouverait facilement les plus petites valeurs entières approchées de toutes les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$; car il ne tomberait qu'une seule racine entre les deux nombres entiers consécutifs qui substitués dans $f(x)$ auraient fourni deux résultats de signes contraires, et par conséquent, une quelconque des méthodes des n°s 268 et 270, fournirait les racines incommensurables avec une approximation donnée.

Mais le procédé que nous donnerons (n° 296) fournissant toujours une valeur $\frac{a}{c}$ de δ moindre que l'unité, dans laquelle a et c sont des nombres entiers connus, on peut ramener la question à substituer des nombres entiers qui diffèrent de a , et qui sont tels que deux substitutions consécutives ne peuvent jamais comprendre plus d'une racine. En effet, si les différences positives, entre les racines réelles a , b , c , etc., de l'équation (1) ... $f(x) = 0$, sont $a - b$, $a - c$, etc., on aura

$$\frac{a}{c} < a - b, \frac{a}{c} < a - c, \text{ etc.}; \text{ d'où } a < ac - bc, a < ac - cc, \text{ etc.}$$

Par conséquent, en formant l'équation dont les racines sont ac , bc , cc , etc., le nombre entier a sera moindre que la plus petite des différences entre les racines ac , bc , cc , etc., de cette nouvelle équation; il suffit donc de chercher l'équation dont

les racines sont égales à celles de l'équation (1) multipliées par ϵ ; ce qui revient à faire $y = \epsilon x$; la substitution de la valeur $\frac{y}{\epsilon}$ de x , dans (1), fournira l'équation demandée (2)... $F(y) = 0$; cette dernière aura autant de racines réelles que la proposée, car les valeurs de y déduites de (2), divisées par ϵ , fourniront les racines de l'équation (1)... $f(x) = 0$.

Le nombre entier a étant moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles de l'équation (2), pour obtenir autant de changemens de signes dans les valeurs de $F(y)$ qu'il y a de racines réelles dans l'équation (2), et pour trouver toutes ces racines à moins de a unités, il suffit de donner successivement à y les valeurs $0, a, 2a, 3a$, etc., $0, -a, -2a, -3a$, etc., depuis zéro jusqu'aux limites supérieures des racines de l'équation (2); les valeurs correspondantes de $F(y)$ présenteront autant de changemens de signes que l'équation (2) renferme de racines réelles, car deux substitutions consécutives ne peuvent jamais comprendre plus d'une racine de l'équation (2).

Connaissant chaque racine réelle à moins de a unités, on obtiendra les plus petites valeurs entières approchées de ces racines en substituant successivement pour y les nombres entiers compris entre chaque couple de valeurs de y qui ont donné des résultats de signes contraires; et ensuite l'une quelconque des méthodes des nos 268 et 270 fournira toutes les racines réelles de l'équation (2) avec une approximation donnée γ . Ces valeurs de y divisées par ϵ , donneront les racines de l'équation $f(x) = 0$, à moins de $\frac{\gamma}{\epsilon}$ d'unité.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation (1)... $x^3 - 7x + 7 = 0$.

On verra (n° 296) que la fraction $\frac{1}{4}$ est moindre que la plus petite des différences entre les racines de l'équation (1). On fera donc $y = 4x$, d'où $x = \frac{y}{4}$; la substitution de cette valeur

de x dans l'équation (1) conduit à

$$(2) \dots y^2 - 112y + 448 = 0.$$

Les différences entre les racines de l'équation (2) sont plus grandes que l'unité, la limite supérieure des racines positives est 12, et cette équation ne peut avoir plus de deux racines réelles positives (n° 263); par conséquent, pour découvrir les plus petites valeurs entières approchées des racines positives, il suffit de mettre successivement au lieu de y , dans le premier membre de l'équation (2), les nombres 0, 1, 2, 3, ..., 12, en ayant soin de s'arrêter lorsqu'on aura trouvé deux changemens de signes dans les résultats. On verra de cette manière que l'équation (2) a deux racines réelles positives qui sont comprises, l'une entre 5 et 6, l'autre entre 6 et 7. On trouvera, comme dans le n° 271, que ces racines sont $y = 5,427$ etc., $y = 6,768$ etc. On en déduira que la troisième racine est $y = -12,195$ etc., (n° 226, 5°).

Divisant ces valeurs de y par 4, on trouve que les racines de l'équation (1) sont,

$$1,356 \text{ etc.}, \quad -1,692 \text{ etc.}, \quad -3,048 \text{ etc.}$$

2° EXEMPLE. Soit l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

On verra (n° 295, 6°) que cette équation ne peut avoir qu'une seule racine réelle; cette racine étant positive (n° 263) et moindre que $1 + \sqrt{5}$ ou que 4, il suffit de donner à x les valeurs 0, 1, 2, 3; les valeurs correspondantes de $x^3 - 2x - 5$ étant -5 , -6 , -1 , $+16$, la plus petite valeur entière approchée de la racine réelle est $+2$. En opérant comme dans le n° 270, on trouve que cette racine est 2,0945514 etc.

REMARQUE. On peut toujours éviter de substituer des nombres négatifs; car si l'on change x en $-x$ dans l'équation dont on cherche les racines négatives, les racines positives de la transformée, prises avec le signe $-$, seront les racines négatives de l'équation proposée (n° 226, 7°).

273. Les ÉQUATIONS HOMOGÈNES (*) qui ne renferment que

(*) On dit qu'une équation est *homogène* lorsque tous ses termes sont du même degré.

deux lettres a, x , peuvent toujours se transformer en équations numériques, en y faisant $x = ay$.

EXEMPLE. Soit l'équation homogène

$$x^4 + ax^3 - 7a^2x^2 - a^3x + 6a^4 = 0.$$

Si l'on y fait $x = ay$, et si l'on divise ensuite tous les termes par a^4 , on sera conduit à l'équation numérique

$$y^4 + y^3 - 7y^2 - y + 6 = 0.$$

Cette dernière donne

$$y = 1, \quad y = -1, \quad y = 2, \quad y = -3;$$

les valeurs correspondantes de x , sont $+a, -a, +2a$ et $-3a$.

274. PROBLÈME. Soit proposé de trouver les valeurs de x qui satisfont en même temps à plusieurs équations à une seule inconnue,

$$(1) \dots A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \text{ etc.}$$

Le moyen le plus naturel serait de chercher les racines de ces équations. Mais le principe du n° 220 fournit le moyen de parvenir directement à l'équation qui détermine les valeurs de x communes aux équations proposées, sans qu'il soit nécessaire de résoudre séparément chacune des équations (1). En effet, soient $\alpha, \zeta, \dots, \omega$, les valeurs de x qui satisfont au système des équations proposées, chacune de ces valeurs réduisant les fonctions A, B, C , etc., à zéro, ces fonctions sont divisibles exactement par chacun des facteurs premiers $x - \alpha, x - \zeta, \dots, x - \omega$; elles sont donc divisibles par le produit de ces facteurs.

Par conséquent, pour obtenir les valeurs de x qui satisfont à la fois aux équations (1), il suffit de chercher le plus grand commun diviseur entre les premiers membres A, B, C , etc. Lorsqu'on trouve un commun diviseur $\phi(x)$, l'équation $\phi(x) = 0$ fournit les valeurs $\alpha, \zeta, \dots, \omega$, de x demandées. Lorsqu'il n'y a pas de commun diviseur en x , une même valeur de x ne peut satisfaire à la fois aux équations proposées; de sorte que ces équations sont incompatibles.

EXEMPLE. Soient les équations

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0,$$

$$x^3 - 28x + 48 = 0, \quad x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0.$$

Le plus grand commun diviseur entre leurs premiers membres étant $x - 2$, l'équation $x - 2 = 0$ fournit la valeur $x = 2$, qui satisfait aux équations proposées.

Et en effet, ces équations reviennent à

$$(x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0, \quad (x - 2)(x - 4)(x + 6) = 0,$$

$$(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 3) = 0.$$

Recherche des racines égales incommensurables.

275. Lorsqu'après avoir ôté d'une équation toutes ses racines commensurables, on est parvenu à une équation $f(x) = 0$ qui ne renferme plus que des racines incommensurables et imaginaires, la recherche des racines incommensurables exige que l'on substitue des nombres qui diffèrent entre eux d'une quantité δ moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles de l'équation proposée; ce qui n'est praticable que lorsque toutes les racines sont inégales, car la différence entre deux racines égales est zéro.

On doit donc chercher d'abord si l'équation proposée renferme des racines égales. A cet effet, on calcule le plus grand commun diviseur entre le premier membre $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$.

Quand $f(x)$ et $f'(x)$ n'ont pas de commun diviseur en x , l'équation $f(x) = 0$ n'a que des racines inégales, (n° 249).

Lorsque $f(x)$ et $f'(x)$ ont un plus grand commun diviseur en x , l'équation $f(x) = 0$ a des racines égales (n° 249), et on ne peut plus calculer directement ses racines incommensurables. Nous allons faire voir que dans ce cas, le principe du n° 249 fournit le moyen de faire dépendre la résolution de l'équation $f(x) = 0$, de celle de plusieurs équations d'un degré moindre qui n'ont que des racines inégales et dont les racines sont celles de la proposée.

276. 1^{re} MÉTHODE. Soit l'équation donnée

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx^2 + tx + u = 0,$$

et supposons pour fixer les idées qu'elles renferment α racines égales à a , ζ racines égales à b , γ racines égales à c , et des racines inégales, d , e ; son premier membre $f(x)$ sera identiquement égal au produit des facteurs $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\zeta$, $(x-c)^\gamma$, $x-d$, $x-e$; de sorte que

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\zeta (x-c)^\gamma (x-d) (x-e).$$

Or, d'après le principe du n° 249, le plus grand diviseur commun à $f(x)$ et $f'(x)$ est

$$\phi(x) = (x-a)^{\alpha-1} (x-b)^{\zeta-1} (x-c)^{\gamma-1}.$$

Divisant $f(x)$ par $\phi(x)$, on obtient un quotient

$$Q_1 = (x-a) (x-b) (x-c) (x-d) (x-e).$$

Le plus grand diviseur commun à $\phi(x)$ et Q_1 , est

$$X = (x-a) (x-b) (x-c).$$

La division de Q_1 par X fournit le quotient

$$X_1 = (x-d) (x-e).$$

La recherche des racines de l'équation $f(x) = 0$, ne dépend donc que de la résolution de deux équations $X = 0$, $X_1 = 0$, qui ne renferment que des racines inégales.

L'équation $X = 0$ détermine toutes les racines qui entrent plusieurs fois dans $f(x) = 0$; et l'équation $X_1 = 0$ donne les racines inégales de $f(x) = 0$.

Or, en supposant toujours que d est connu (page 272), on sait trouver les racines réelles inégales d'une équation qui n'a pas de racines égales; on est donc en état de déterminer toutes les racines réelles d'une équation numérique quelconque.

EXEMPLE. $f(x) = x^6 - 2x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 18x + 18.$

On trouve $\phi(x) = x^3 - 3$, $Q_1 = x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 6$,

$$X = x^3 - 3, \quad X_1 = x^3 - 2x + 2.$$

L'équation $x^2 - 3 = 0$, donne les racines égales $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, de $f(x) = 0$; et l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$, fournit les racines inégales, $1 + \sqrt{-1}$, $1 - \sqrt{-1}$, de $f(x) = 0$.

Pour déterminer le degré de multiplicité de la racine $+\sqrt{3}$, on fait $x = +\sqrt{3}$ dans les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, etc., jusqu'à ce qu'on en obtienne une qui ne se réduise pas à zéro (n° 258). On trouve que $x = \sqrt{3}$ rend nulle $f'(x)$ et ne réduit pas $f''(x)$ à zéro. La racine $+\sqrt{3}$ n'entre donc que deux fois dans l'équation proposée.

On verrait de même que la racine $-\sqrt{3}$ entre deux fois dans $f(x) = 0$.

On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \sqrt{3})^2 (x + \sqrt{3})^2 (x - 1 - \sqrt{-1})(x - 1 + \sqrt{-1}) \\ &= \{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})\}^2 (x - 1 - \sqrt{-1})(x - 1 + \sqrt{-1}) \\ &= (x^2 - 3)^2 \times (x^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

On pouvait parvenir plus simplement au même résultat; car le plus grand commun diviseur $\phi(x)$ entre $f(x)$ et $f'(x)$ était $x^2 - 3$, ou $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$, il résulte du principe du n° 249 que chacun des facteurs $x + \sqrt{3}$, $x - \sqrt{3}$, entre deux fois dans $f(x)$.

Dans cet exemple, l'équation $X = 0$, qui renferme les racines égales de la proposée, n'étant que du second degré, on a pu en déduire les valeurs exactes $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, des racines égales incommensurables de l'équation $f(x) = 0$; et le procédé du n° 258 a fait connaître le degré de multiplicité de ces racines.

Mais quand l'équation $X = 0$ est d'un degré supérieur au second, il n'est plus possible d'obtenir les valeurs exactes de ses racines incommensurables; de sorte que le procédé du n° 258 ne peut plus servir à déterminer leur degré de multiplicité. Nous allons indiquer une méthode qui offre le double avantage de faire dépendre la résolution de l'équation proposée d'autres équations les plus simples possibles, qui indiquent d'avance le degré de multiplicité des racines de la proposée.

277. 2^e MÉTHODE. Désignons par X_1 le produit des facteurs premiers $x - a_1, x - b_1, \dots, x - k_1$, qui n'entrent qu'une fois dans $f(x)$; par X_2 le produit des facteurs premiers $x - a_2, x - b_2, \dots, x - k_2$, qui entrent deux fois dans $f(x)$; par X_3 le produit des facteurs premiers $x - a_3, x - b_3, \dots, x - k_3$, qui entrent trois fois dans $f(x)$; et ainsi de suite. Nous aurons

$$X_1 = (x - a_1)(x - b_1) \dots (x - k_1), X_2 = (x - a_2)(x - b_2) \dots (x - k_2),$$

$$X_3 = (x - a_3)(x - b_3) \dots (x - k_3), X_4 = (x - a_4)(x - b_4) \dots (x - k_4), \text{ etc.}$$

$$f(x) = X_1 \times X_2^2 \times X_3^3 \times X_4^4 \text{ etc.}$$

Le procédé du n° 276 conduirait aux deux équations

$$X_1 = 0, X_2 X_3 X_4 \text{ etc.} = 0.$$

Nous allons voir comment on parvient aux équations plus simples,

$$(1) \dots X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, \text{ etc.}$$

A cet effet, on cherche le plus grand commun diviseur $\phi(x)$ entre $f(x)$ et $f'(x)$; il résulte du principe du n° 249 que

$$\phi(x) = X_2 X_3^2 X_4^3 \text{ etc.}$$

Opérant sur $\phi(x)$ comme on a opéré sur $f(x)$, on cherche le plus grand commun diviseur $\phi_1(x)$ entre $\phi(x)$ et sa fonction dérivée. On a $\phi_1(x) = X_3 X_4^2$ etc.

On cherche de même le plus grand commun diviseur $\phi_2(x)$ entre $\phi_1(x)$ et sa fonction dérivée. On a $\phi_2(x) = X_4$ etc.

Continuant ces calculs, on parviendra toujours à une fonction qui ne contiendra plus de facteurs égaux, et on en sera averti, car il n'existera pas de commun diviseur entre cette fonction et sa dérivée.

Si cette fonction est $\phi_2(x)$, on sera certain que $f(x)$ ne renferme pas de facteurs égaux élevés à des puissances supérieures à la quatrième; de sorte que dans ce cas

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4, \quad \phi(x) = X_2 X_3^2 X_4^3,$$

$$\phi_1(x) = X_3 X_4^2, \quad \phi_2(x) = X_4.$$

On connaît donc X_4 .

Pour trouver les autres facteurs X_1, X_2, X_3 , on divise successivement chacune des fonctions connues $f(x), \phi(x), \phi_1(x), \phi_2(x)$, par la suivante; ce qui fournit des quotiens

$$Q_1 = X_1 X_2 X_3 X_4, \quad Q_2 = X_2 X_3 X_4, \quad Q_3 = X_3 X_4.$$

On sait d'ailleurs que $\phi_4(x) = X_4$.

On divise ensuite chacune des fonctions $Q_1, Q_2, Q_3, \phi_4(x)$, par la suivante; les quotiens sont les fonctions demandées X_1, X_2, X_3 .

Lorsqu'on aura ainsi calculé les fonctions X_1, X_2, X_3, X_4 , on pourra obtenir les racines incommensurables des équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0,$$

puisque chacune de ces équations n'a que des racines inégales; et l'on connaît d'avance le degré de multiplicité de ces racines, car les racines de $X_1 = 0$ entrent une seule fois dans l'équation (1)... $f(x) = 0$, celles de $X_2 = 0$ entrent deux fois dans (1), celles de $X_3 = 0$ entrent trois fois dans (1); et ainsi de suite.

EXEMPLE. Soit

$$f(x) = x^6 - 2x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 18x + 18 = 0.$$

Le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$ est $\phi(x) = x^2 - 3$. La fonction $\phi(x)$ n'ayant pas de commun diviseur avec sa dérivée $2x$, les facteurs de $\phi(x)$ sont inégaux, ils entrent deux fois dans $f(x)$, et $f(x)$ ne renferme pas de facteurs premiers élevés à des puissances supérieures à la seconde, car autrement $\phi(x)$ renfermerait encore des facteurs égaux.

On a donc

$$f(x) = X_1 X_2^2, \quad \phi(x) = X_2 = x^2 - 3.$$

Pour obtenir X_1 , on divise d'abord $f(x)$ par $\phi(x)$, ce qui fournit le quotient exact

$$Q_1 = X_1 X_2 = x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 6.$$

La division de Q_1 par $\phi(x)$ donne le quotient $X_1 = x^2 - 2x + 2$.

L'équation $X_1 = 0$, détermine les racines inégales

$$1 + \sqrt{-1}, \quad 1 - \sqrt{-1}, \quad \text{de } f(x) = 0.$$

L'équation $X_2 = 0$, fournit les racines $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, qui entrent deux fois dans $f(x) = 0$.

Ce qui s'accorde avec les résultats obtenus par la 1^{re} méthode.

2^e EXEMPLE. Soit

$$f(x) = x^8 - 13x^6 + 14x^5 + 35x^4 - 84x^3 + 98x^2 - 98x + 49.$$

On trouve $\varphi(x) = x^3 - 7x + 7$.

Les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ n'ayant pas de commun diviseur, on a $f(x) = X_1 X_2^2$, $\varphi(x) = X_2 = x^3 - 7x + 7$,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = X_1 X_2 = x^5 - 6x^3 + 7x^2 - 7x + 7 = Q_1.$$

La division de Q_1 par $\varphi(x)$ donne le quotient $X_1 = x^2 + 1$.

L'équation $X_1 = 0$ donne les racines inégales $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, de $f(x) = 0$.

L'équation $X_2 = 0$, fournit les racines qui entrent deux fois dans $f(x) = 0$; on a vu (page 423) que ces racines sont 1,356 etc., 1,692 etc., $-3,048$ etc.

On a $f(x) = X_1 X_2^2 = (x^2 + 1)(x^3 - 7x + 7)^2$.

278. Les théories que nous venons d'exposer conduisent à cette règle générale : *Pour trouver les racines réelles d'une équation numérique à une seule inconnue x , ramenez d'abord cette équation à la forme*

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx + t = 0,$$

les coefficients $p, q, \dots, s, t$, désignant des nombres entiers (n° 254).

Les racines commensurables de l'équation (1) seront des nombres entiers $a, b, c, \dots, k$, (n° 254); calculez ces racines par la méthode du n° 256, et déterminez ensuite les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \nu$, des facteurs $x - a, x - b, x - c, \dots, x - k$, correspondans (n° 258); divisez le premier membre de l'équation (1), par le produit des facteurs $(x - a)^\alpha, (x - b)^\beta, (x - c)^\gamma, \dots, (x - k)^\nu$; le quotient égalé à zéro donnera une équation (2). $\therefore x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \dots + Mx + N = 0$, qui n'aura plus de racines commensurables.

Pour obtenir les racines de l'équation (2), décomposez cette équation en d'autres équations,

$$(3) \dots X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, \text{ etc. ,}$$

qui ne renferment que des racines inégales (n° 277); ces racines seront celles de l'équation (2); vous connaîtrez leur degré de multiplicité, car $X_1 = 0$ donne toutes les racines qui entrent une seule fois dans (2); $X_2 = 0$ détermine toutes les racines qui entrent deux fois dans (2); et ainsi de suite. La question sera donc réduite à résoudre des équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \text{ etc. ,}$ qui n'ont que des racines inégales; la méthode du n° 270., conduira aux valeurs approchées des racines réelles des équations (3); ces racines seront les racines réelles incommensurables de l'équation (1). Le premier membre de l'équation (1) sera le produit des facteurs $(x - a)^{\alpha}, (x - b)^{\beta}, (x - c)^{\gamma}, \dots, (x - k)^{\omega}, X_1, X_2^2, X_3^3, \text{ etc.}$

EXEMPLE. Soit l'équation

$$(4) \dots y^3 + \frac{7}{32y^2} + \frac{21}{8} - y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{21}{16y} = 0.$$

On chassera d'abord les dénominateurs; ce qui donnera

$$(5) \dots 32y^5 - 32y^4 - 48y^3 + 84y^2 - 42y + 7 = 0.$$

On pourrait ramener cette dernière à la forme (1), en faisant $y = \frac{x}{32}$ (n° 254); mais il est plus simple d'observer que l'équation (5) revenant à

$$(2y)^5 - 2(2y)^4 - 6(2y)^3 + 21(2y)^2 - 21(2y) + 7 = 0,$$

il suffit de supposer $2y = x$, d'où

$$(6) \dots x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 21x^2 - 21x + 7 = 0 = f(x).$$

La seule racine commensurable de l'équation (6) est + 1.

Pour déterminer le degré de multiplicité de cette racine, on calcule les dérivées de $f(x)$; on trouve

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 42x - 21, \\ f''(x) &= 20x^3 - 24x^2 - 36x + 42, \text{ etc.} \end{aligned}$$

L'hypothèse $x = 1$, donnant $f'(x) = 0$, $f''(x) = +2$, le facteur $x - 1$ entre deux fois dans $f(x)$. Divisant $f(x)$ par $(x - 1)^2$, le quotient égalé à zéro conduit à une équation

$$(7) \dots x^3 - 7x + 7 = 0,$$

qui n'a plus de racines commensurables; le polynome..... $x^3 - 7x + 7$, n'ayant pas de commun diviseur avec sa dérivée $3x^2 - 7$, toutes les racines de l'équation (7) sont inégales; on a vu (page 423) que les valeurs de ces racines sont

$$1,356 \text{ etc.}, \quad 1,692 \text{ etc.}, \quad -3,048 \text{ etc.}$$

Or $y = \frac{1}{2}x$. Par conséquent, l'équation (4) a deux racines égales à $+\frac{1}{2}$ et trois racines incommensurables inégales

$$+0,678 \text{ etc.}, \quad +0,846 \text{ etc.}, \quad -1,524 \text{ etc.}$$

279. Il résulte de ce qui précède, que pour être en état de calculer avec certitude des valeurs aussi approchées qu'on veut de toutes les racines incommensurables d'une équation numérique à une seule inconnue, il suffit de connaître une quantité δ moindre que la différence entre deux racines quelconques d'une équation $f(x) = 0$, qui ne renferme que des racines inégales. Or, la quantité δ serait facile à déterminer si l'on savait former l'équation $\phi(y) = 0$, dont les racines sont les différences entre les racines de l'équation $f(x) = 0$; car la limite inférieure des racines de l'équation $\phi(y) = 0$, exprimerait δ . Il reste donc à faire voir comment on calcule l'équation aux différences $\phi(y) = 0$. Ce calcul exigeant que l'on sache éliminer une inconnue entre deux équations numériques d'un degré quelconque, nous sommes conduits à exposer la *Théorie de l'élimination*. Nous en déduirons le moyen de calculer δ sans résoudre aucune équation; et nous aurons ainsi complété tout ce qui est relatif à la résolution des équations numériques à une seule inconnue.

Nous aurions pu exposer la théorie de l'élimination entre deux équations à deux inconnues, avant la résolution des équations numériques à une seule inconnue, ce qui aurait servi à déterminer δ (n° 279); mais l'ordre que nous avons suivi nous

a paru plus naturel, et il offre d'ailleurs l'avantage de graduer les difficultés.

§ VI. Théorie de l'élimination. Résolution de deux équations numériques à deux inconnues.

280. Lorsqu'on veut résoudre deux équations entre deux inconnues x, y , on cherche les divers systèmes de valeurs de x et y qui rendent les équations identiques; chacun de ces systèmes fournit une solution des équations proposées; et selon que des valeurs substituées pour x et y , satisfont ou ne satisfont pas à la fois aux deux équations proposées, on dit que ces valeurs sont *bonnes* ou qu'elles sont *étrangères*.

Nous supposons que les équations ne renferment que des puissances entières positives des inconnues, et que tous les coefficients sont des nombres entiers.

281. Quand l'une des deux équations proposées ne renferme que l'une des inconnues x, y , on obtient toutes les solutions de ces équations en résolvant des équations à une seule inconnue. En effet; soit le système

$$F(y) = 0, f(x, y) = 0.$$

La première équation déterminera les valeurs de y , et chacune de ces valeurs, substituée dans la seconde équation, donnera une équation qui ne contiendra plus que la seule inconnue x et qui fournira par conséquent les valeurs correspondantes de cette inconnue.

282. Lorsque, les deux inconnues entrant à la fois dans chacune des équations proposées, une de ces équations est du premier ou du second degré par rapport à l'une des inconnues, on peut ramener ce cas au précédent. En effet :

1°. Soient deux équations

$$px - q = 0, f(x, y) = 0,$$

dans lesquelles p et q désignent des fonctions entières quelconques de y . La 1^{re} équation donne $x = \frac{q}{p}$, et la substitution de cette valeur de x dans $f(x, y) = 0$, fournit l'équation à une seule inconnue $f\left(\frac{q}{p}, y\right) = 0$, qui détermine les valeurs de y ; les valeurs correspondantes de x se déduisent de l'équation $px - q = 0$.

EXEMPLE. Soient $x - 2y = 0$, $x^2 - 2xy + (y^2 - y) = 0$.

La 1^{re} équation donne $x = 2y$; la substitution de cette expression de x dans la 2^e équation, conduit à l'équation $y^2 - y = 0$, qui donne $y = 0$ et $y = 1$; les valeurs correspondantes de x , déduites de la relation $x = 2y$, sont $x = 0$ et $x = 2$.

Les bonnes valeurs de x étant 0 et 2, l'équation qui les détermine est $(x - 0)(x - 2) = 0$, ou $x^2 - 2x = 0$.

Et en effet, si pour éliminer y on tire de $x - 2y = 0$, la valeur $\frac{1}{2}x$ de y , et si l'on remplace y par $\frac{1}{2}x$ dans... $x^2 - 2xy + (y^2 - y) = 0$, on parviendra à $x^2 - 2x = 0$.

2°. Soient les deux équations

$$px^2 + qx + r = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

dans lesquelles p, q, r , sont des fonctions entières quelconques de y ; la première équation donne

$$x = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}, \quad x = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}.$$

Si pour éliminer x , on substitue la première valeur de x dans $f(x, y) = 0$, et si l'on développe les puissances indiquées, on parviendra à un résultat de la forme

$$(1) \dots P + Q \sqrt{q^2 - 4pr} = 0,$$

dans lequel P et Q seront des fonctions entières et rationnelles de y ; car m désignant un nombre entier quelconque, on a

$$(\sqrt{a})^{2m} = \{(\sqrt{a})^2\}^m = \{a\}^m = a^m,$$

$$(\sqrt{a})^{2m+1} = (\sqrt{a})^{2m} \sqrt{a} = a^m \sqrt{a}.$$

L'équation (1) fournira des valeurs de y , qui conviendront nécessairement aux équations proposées.

Pour trouver l'équation qui donne les autres valeurs de y , il suffit de substituer la seconde valeur de x dans $f(x, y) = 0$; le résultat de cette substitution est évidemment

$$(2) \dots P - Q \sqrt{q^2 - 4pr} = 0,$$

car la seconde valeur de x ne différant de la première que par le signe du radical, il suffit de changer le signe de ce radical dans la relation (1).

Toutes les valeurs de y qui conviennent aux équations proposées étant déterminées par les équations (1) et (2), l'ensemble de ces valeurs dépend de l'équation

$$(P + Q \sqrt{q^2 - 4pr}) (P - Q \sqrt{q^2 - 4pr}) = 0;$$

car pour que le produit de deux facteurs entiers devienne nul, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit zéro (n° 228).

La dernière équation revient à

$$P^2 - Q^2 (q^2 - 4pr) = 0.$$

Telle est l'équation en y qui résulte de l'élimination de x entre les équations proposées.

REMARQUE. On parvient au même résultat en faisant disparaître le radical dans l'une quelconque des équations (1) et (2); car elles donnent

$$P = -Q \sqrt{q^2 - 4pr}, \quad P = +Q \sqrt{q^2 - 4pr},$$

et en élevant les deux membres au carré, afin de faire disparaître le radical, chaque équation conduit à

$$P^2 = Q^2 (q^2 - 4pr), \quad \text{d'où} \quad P^2 - Q^2 (q^2 - 4pr) = 0.$$

EXEMPLE. Soient les deux équations

$$(3) \dots x^2 - 2yx + y^2 - y = 0,$$

$$(4) \dots x^2 - 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x - y^3 + y^2 - 2y = 0.$$

La première donne $x = y \pm \sqrt{y}$.

Substituant la valeur $y + \sqrt{y}$ de x dans (4), on trouve toutes réductions faites $y - \sqrt{y} = 0$.

L'autre valeur $y - \sqrt{y}$ de x substituée dans (4) conduirait à $y + \sqrt{y} = 0$.

L'équation qui détermine toutes les bonnes valeurs de y est donc

$$(y + \sqrt{y})(y - \sqrt{y}) = 0, \text{ ou } y^2 - y = 0.$$

On parvient directement à cette équation, en faisant disparaître le radical dans l'une quelconque des équations

$$y + \sqrt{y} = 0, \quad y - \sqrt{y} = 0,$$

car elles reviennent à $y = -\sqrt{y}$, $y = +\sqrt{y}$, et en élevant au carré les deux membres de ces nouvelles équations, on trouve $y^2 = y$, d'où $y^2 - y = 0$.

L'équation $y^2 - y = 0$, donne $y = 0$ et $y = 1$.

Pour obtenir la valeur de x correspondante à $y = 0$, on fait $y = 0$ dans (3) et (4), ce qui donne $x^2 = 0$ et $x^2 + x = 0$.

Le plus grand commun diviseur entre x^2 et $x^2 + x$ étant x , la valeur de x correspondante à $y = 0$ est $x = 0$ (n° 274).

De même, pour trouver la valeur de x correspondante à $y = 1$, on fait $y = 1$, dans (3) et (4); ce qui donne

$$x^2 - 2x = 0, \quad x^2 - 3x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Le plus grand commun diviseur entre les premiers membres de ces deux dernières équations étant $x - 2$, on obtient la valeur de x demandée, en posant $x - 2 = 0$; d'où $x = 2$.

Les valeurs de x qui satisfont aux équations proposées étant zéro et 2, l'équation qui résulterait de l'élimination de y entre ces équations est $(x - 0)(x - 2) = 0$, ou $x^2 - 2x = 0$.

283. Nous venons de voir que l'élimination de l'une des inconnues est facile à effectuer, lorsqu'on sait tirer d'une des équations proposées la valeur de cette inconnue en fonction de l'autre inconnue. Mais comme cela n'est praticable que dans des cas très particuliers, et comme ce procédé a d'ailleurs l'incon-

viennent d'introduire des radicaux, nous allons donner une méthode générale, qui n'exige pas qu'on sache tirer d'une des équations la valeur de l'une des inconnues en fonction de l'autre.

Soient les deux équations (1)... $F(x, y) = 0, f(x, y) = 0$.

Nous rappellerons d'abord que si $x = a, y = c$, est une solution des équations (1), la substitution de ces valeurs de x et y dans les premiers membres $F(x, y), f(x, y)$ de ces équations, donnera des résultats $F(a, c), f(a, c)$, qui devront être idéalement nuls; et que réciproquement, si en faisant $x = a, y = c$ dans les premiers membres des équations (1), les résultats $F(a, c), f(a, c)$, se réduisent à zéro, le système $x = a, y = c$, sera une solution des équations (1).

Cela posé: soit $x = a, y = c$, une solution des équations (1). Si au lieu de substituer simultanément les valeurs a, c , de x, y , on ne met d'abord que la valeur c de y ; $F(x, y)$ et $f(x, y)$ deviendront $F(x, c)$ et $f(x, c)$; l'hypothèse $x = a$ devant réduire $F(x, c)$ et $f(x, c)$ à zéro, chacune de ces fonctions de x est divisible par $x - a$; elles ont donc un plus grand commun diviseur $\phi(x)$, qui contient le facteur $x - a$.

Toute valeur c de y , qui satisfait aux équations (1), jouit donc de la propriété quand on la substitue dans $F(x, y)$ et $f(x, y)$, de conduire à des résultats $F(x, c), f(x, c)$, qui ont un commun diviseur $\phi(x)$.

RÉCIPROQUEMENT. Lorsqu'en faisant $y = c$ dans $F(x, y)$ et $f(x, y)$, les résultats $F(x, c), f(x, c)$ ont un plus grand commun diviseur $\phi(x)$, la valeur c de y convient aux équations (1).

En effet; si l'on divise $F(x, c)$ et $f(x, c)$ par $\phi(x)$, les quotiens M, N , ne renfermeront que des puissances entières positives de x ; on aura

$$F(x, c) = \phi(x) \times M, \quad f(x, c) = \phi(x) \times N.$$

Toute valeur finie a de x , qui réduira $\phi(x)$ à zéro, donnera $F(a, c) = 0, f(a, c) = 0$; car $\phi(a) = 0$, et aucun des polynomes entiers M, N , ne peut devenir infini. Par conséquent, $y = c, x = a$, sera une solution des équations (1); et l'équa-

tion $\phi(x) = 0$, déterminera toutes les valeurs de x qui correspondent à $y = \zeta$.

284. On en déduit cette règle générale : *Pour découvrir si une valeur ζ de y convient aux équations*

$$(1) \dots F(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

il suffit de faire $y = \zeta$, dans les premiers membres.

Quand les résultats $F(x, \zeta), f(x, \zeta)$, ont un plus grand commun diviseur $\phi(x)$, la valeur ζ de y convient aux équations proposées ; et l'équation à une seule inconnue $\phi(x) = 0$, fournit toutes les bonnes valeurs de x correspondantes à $y = \zeta$.

Lorsqu'en faisant $y = \zeta$ dans $F(x, y)$ et $f(x, y)$, les résultats $F(x, \zeta), f(x, \zeta)$, n'ont pas de commun diviseur en x , la valeur ζ de y ne convient pas aux équations proposées, et l'on dit qu'elle est ÉTRANGÈRE.

Il faut bien remarquer que cette manière de vérifier si une valeur de y convient aux équations (1) proposées, exige que l'on connaisse la valeur exacte de y .

285. Nous venons de voir que si y était connu, il serait facile d'en déduire les équations qui déterminent les valeurs de x correspondantes; mais les valeurs de y qui sont propres à satisfaire aux équations proposées $F(x, y) = 0, f(x, y) = 0$, ne sont jamais données d'avance.

Pour découvrir ces bonnes valeurs de y , on observe qu'elles doivent jouir de la propriété, si on les substituait dans les premiers membres de ces équations, d'introduire un commun diviseur en x entre les fonctions de x qui en résulteraient. Opérons donc comme si y étant connu, il s'agissait de trouver les valeurs de x correspondantes. A cet effet, on cherche le plus grand commun diviseur entre les polynômes $F(x, y), f(x, y)$; et comme on veut parvenir au reste indépendant de x , il faut ordonner ces polynômes par rapport aux puissances décroissantes de x , en ayant soin de ne supprimer aucun facteur fonction de y . Lorsqu'on sera parvenu au reste R indépendant de x , les bonnes valeurs de y devront le réduire à zéro; et réciproquement, les valeurs de y qui réduiront ce reste à zéro conviendront aux équations proposées, puisque substituées dans les

premiers membres de ces équations, elles introduiront un commun diviseur en x entre les fonctions de x qui en résulteront ; l'équation qui détermine toutes les bonnes valeurs de y est donc $R=0$.

Nous supposons ici que toute valeur ζ de y , propre à introduire un commun diviseur fonction de x entre $F(x, \zeta)$ et $f(x, \zeta)$, réduit le reste R à zéro ; et que réciproquement toute valeur ζ de y qui réduit le reste R à zéro, introduit un commun diviseur fonction de x entre $F(x, \zeta)$ et $f(x, \zeta)$.

Quand ces deux conditions ont lieu, l'équation $R=0$ détermine toutes les *bonnes* valeurs de y , et elle n'en donne pas d'autres. On dit par cette double raison que $R=0$ est l'équation *finale* en y qui résulte de l'élimination de x entre les équations proposées.

286. Nous allons faire voir que les deux conditions précédentes ont toujours lieu, quand dans la recherche du plus grand commun diviseur entre $F(x, y)$ et $f(x, y)$, on parvient au reste R indépendant de x sans qu'il soit nécessaire, pour n'obtenir que des termes entiers dans les quotiens, de multiplier les dividendes par des fonctions de y , en ayant d'ailleurs le soin de ne supprimer dans les restes aucun facteur fonction de y .

Désignons par A et B les premiers membres des équations proposées $F(x, y)=0$, $f(x, y)=0$.

Lorsque le plus fort exposant de x dans A n'est pas moindre que dans B , la recherche du plus grand commun diviseur de A et B conduit à diviser A par B ; ce qui fournit un quotient entier Q' et un reste R' *moindre* que le diviseur B (*).

On a l'identité $A=BQ'+R'$.

Elle démontre que toutes les valeurs de x et y qui réduisent A et B à zéro, rendent R' nul ; et que toutes les valeurs de x et y qui réduisent B et R' à zéro, rendent A nul ; car d'après l'hy-

(*) Lorsque nous dirons qu'un reste est *moindre* que le diviseur, nous entendrons que le dividende et le diviseur étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre x , le plus fort exposant de cette lettre est moindre dans le reste que dans le diviseur (n° 26, page 31).

pothèse actuelle, le quotient Q' ne contenant que des puissances entières positives de x et de y , il ne peut devenir infini pour des valeurs finies de ces inconnues.

Les solutions des équations proposées

$$(1) \dots A = 0, \quad B = 0,$$

sont donc les mêmes que celles des équations

$$(2) \dots B = 0, \quad R' = 0.$$

La question est ainsi réduite à résoudre le système des équations (2) qui est plus simple par rapport à x , que le système (1).

Divisant B par R' , on obtient un quotient entier Q'' , et un reste R'' moindre que R' . On a l'identité $B = R'Q'' + R''$.

Elle démontre que les solutions des équations (2) sont les mêmes que celles des équations

$$(3) \dots R' = 0, \quad R'' = 0.$$

Le système (3) est plus simple, par rapport à x , que le système (2), car les plus forts exposans de x dans (3) sont respectivement moindres que dans (2).

Les valeurs des inconnues qui réduisent deux restes consécutifs à zéro, sont donc les mêmes que celles qui satisfont aux équations (1) proposées.

Continuant ces calculs, on parviendra toujours à un reste R indépendant de x ; car les exposans de x sont des nombres entiers positifs qui diminuent dans les restes successifs. Si R_1 désigne le reste précédent; les solutions des équations proposées seront les mêmes que celles des équations (4) $\dots R = 0, R_1 = 0$; de sorte que la résolution des équations (1) $\dots A = 0, B = 0$, qui contenaient chacune les deux inconnues x, y , ne dépend plus que du système équivalent (4) $\dots R = 0, R_1 = 0$, dans lequel R ne renferme que la seule inconnue y .

L'équation finale en y , qui résulte de l'élimination de x entre les équations (1), est donc $R = 0$.

L'équation $R = 0$, fournira les bonnes valeurs de y ; et en les substituant dans $R_1 = 0$, l'équation en x qui en résultera déterminera les bonnes valeurs de x correspondantes.

EXEMPLE. Soient les deux équations

$$A = x^3 - 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x - (y^3 - y^2 + 2y) = 0,$$

$$B = x^2 - 2yx + (y^2 - y) = 0.$$

La division de A par B fournit le quotient entier $x - y$, et le reste $R' = x - 2y$.

On divise B par R' , ce qui donne le quotient x et le reste $R = y^2 - y$.

Les solutions des équations proposées sont donc les mêmes que celles des équations

$$x - 2y = 0, \quad y^2 - y = 0.$$

L'équation finale en y est $y^2 - y = 0$, ou $y(y - 1) = 0$.

On en tire $y = 0$ et $y = 1$; les valeurs correspondantes de x , déduites de $x - 2y = 0$, sont $x = 0$ et $x = 2$. Ce qui s'accorde avec les résultats qui ont été obtenus (page 436).

REMARQUE. Il est facile de reconnaître si les équations proposées admettent une valeur nulle de l'une des inconnues.

Par exemple, pour savoir si $y = 0$, est une bonne valeur de y , on fait $y = 0$, dans A et B; quand les résultats, X, X_1 , ont un plus grand commun diviseur D, fonction de x , la valeur $y = 0$ convient aux équations (1)... $A = 0$, $B = 0$, car combinée avec une valeur quelconque de x tirée de $D = 0$, elle fournit une solution des équations (1).

Lorsque les résultats X, X_1 , n'ont pas de plus grand commun diviseur en x , une même valeur de x ne peut pas les réduire à zéro, et par conséquent la valeur $y = 0$ ne convient pas aux équations (1).

On vérifiera d'une manière analogue si $x = 0$, convient aux équations (1).

Nous venons de voir que le système

$$(1) \dots A = 0, \quad B = 0,$$

peut être remplacé par le suivant

$$(2) \dots R = 0, \quad R_1 = 0,$$

et que toute solution de l'un de ces systèmes convient à l'autre.

Nous allons examiner quelques cas particuliers qui peuvent se présenter.

1°. Lorsqu'une valeur ζ de y , tirée de $R=0$, réduit tous les termes de R_1 à zéro, on est certain qu'elle rendra nuls tous les restes précédens, ainsi que A et B , (page 440).

Par conséquent, $y=\zeta$ satisfait aux équations (1), quelle que soit d'ailleurs la valeur qu'on donne à x , et les restes R , R_1 ont un facteur commun $y-\zeta$.

Pour déconvrir toutes les solutions des équations

$$(2) \dots R = 0, R_1 = 0.$$

on ordonne R_1 par rapport à x ; on cherche le plus grand commun diviseur Y , fonction de y , entre R et les coefficients des diverses puissances de x dans R_1 , on divise R , et R par Y , les quotiens sont des polynomes entiers r_1 , r , et le système (2) revient à

$$(3) \dots rY = 0, r_1Y = 0.$$

L'équation $Y=0$, donne des valeurs de y qui satisfont aux équations (3), quel que soit x .

Toutes les autres solutions des équations (3) dépendent du système

$$(4) \dots r = 0, r_1 = 0.$$

L'équation $r=0$ fournit des valeurs de y , et ces valeurs substituées dans $r_1=0$ donnent une équation en x qui détermine les valeurs de x correspondantes.

EXEMPLE. Soient les équations

$$A = (y-2)x^2 + (y-2)x - (y^3 - 2y^2 + 3y - 6) = 0,$$

$$B = (y-2)x + (y^3 - y - 2) = 0.$$

La division de A par B fournit le quotient entier $x-y$ et le reste $R = y^3 - 5y + 6$.

Les solutions du système proposé sont les mêmes que celles du système $B=0$, $R=0$. Considérons ce dernier système.

L'équation finale $y^3 - 5y + 6 = 0$ donne $y=3$ et $y=2$.

La valeur $+3$ de y substituée dans $B=0$, donne $x=-4$. Ce qui fournit une première solution $y=3$, $x=-4$, des équations proposées.

La valeur $+2$ de y donnant $B=0$, et par suite $A=0$, on satisfait aux équations proposées en combinant cette valeur de y avec des valeurs quelconques de x .

Pour découvrir si le système $B=0$, $R=0$, admet d'autres solutions, on cherche le plus grand commun diviseur Y entre R et les coefficients $y-2$, y^2-y-2 , de x dans B ; on trouve $Y=y-2$. On divise B et R par $y-2$, ce qui donne des quotiens $x+y+1$, $y-3$; les équations $B=0$, $R=0$, reviennent à

$$(y-2)(x+y+1)=0, \quad (y-2)(y-3)=0.$$

On satisfait à ce dernier système en faisant $y-2=0$, d'où $y=2$; on peut combiner cette valeur de y avec des valeurs arbitraires de x .

Les autres solutions des équations proposées sont fournies par le système $x+y+1=0$, $y-3=0$; il donne $y=3$, $x=-4$.

2°. Quand on parvient à un reste identiquement nul, les premiers membres A , B , des équations proposées, ont un plus grand commun diviseur D qui contient nécessairement x . On a

$$A=D \times P, \quad B=D \times Q.$$

L'équation $D=0$ détermine une infinité de solutions des équations (1); les autres solutions se déduisent du système

$$P=0, \quad Q=0.$$

Si D est fonction de la seule inconnue x , les valeurs de cette inconnue tirées de $D=0$, satisferont aux équations proposées, quelles que soient les valeurs arbitraires que l'on donne à y .

Si D est fonction de x et de y , chaque valeur de l'une des inconnues x , y , fournira des valeurs correspondantes de l'autre inconnue.

3°. Quand le reste R indépendant de x est un nombre N , les équations proposées $A=0$, $B=0$, sont incompatibles; car en désignant toujours par R_1 le reste qui précède R , les solutions de ces équations sont les mêmes que celles des équations $R_1=0$, $N=0$, et cette dernière est absurde.

Pour concevoir comment les deux équations $A=0$, $B=0$, peuvent être incompatibles, quoiqu'elles admettent séparément

une infinité de solutions, il suffit d'observer que lorsque la recherche du plus grand commun diviseur des premiers membres A, B , conduit à un reste numérique N , la substitution d'une valeur quelconque de y dans A et B , donne deux fonctions de x qui ne sauraient jamais être réduites à zéro par une même valeur de x , puisqu'en cherchant le plus grand commun diviseur de ces fonctions de x , on parviendra toujours au même reste numérique N .

Les raisonnemens et les calculs précédens s'appliquent encore au cas où il suffit de multiplier les dividendes successifs par des nombres, pour rendre le premier terme de chaque dividende partiel exactement divisible par le premier terme du diviseur. En effet, soient $C, C', C'',$ etc., les nombres par lesquels on doit multiplier les dividendes successifs, $A, B, R',$ etc., pour rendre les divisions possibles, on aura les identités

$$CA = BQ' + R', \quad C'B = R'Q'' + R'', \text{ etc.},$$

et ces identités font voir que les valeurs de x, y , qui réduisaient A et B à zéro, sont encore les mêmes que celles qui réduisent deux restes consécutifs quelconques à zéro.

Par la même raison, les valeurs de x et y qui réduisent un polynome fonction de x et y à zéro, ne changeant pas lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ce polynome par un nombre, on simplifie les calculs en supprimant dans chaque reste le plus grand commun diviseur numérique qui peut se trouver entre les termes de ce reste.

287. Nous avons supposé dans la théorie de l'élimination que nous venons d'exposer, que tous les termes des quotiens étaient entiers par rapport à y (*); mais cela n'arrive qu'à très rarement. Cependant, pour que l'on soit certain que les valeurs de x et y , qui réduisent deux restes consécutifs quelconques à zéro, sont les mêmes que celles qui satisfont aux équations pro-

(*) Les quotiens sont toujours entiers par rapport à x ; car on arrête chaque division, lorsqu'on parvient à un reste qui contient x à un degré moindre que le diviseur.

posées (1)... $A=0$, $B=0$, il faut que les quotiens ne contiennent y dans aucun dénominateur.

En effet; supposons que la division de A par B ne puisse pas conduire à un reste R' d'un degré moindre par rapport à x que B , sans que le quotient Q' renferme y en dénominateur; ce quotient, entier par rapport à x , mais fractionnaire par rapport à y , sera de la forme $\frac{N}{Y}$, Y contenant y . L'identité

$$A=BQ'+R', \text{ deviendra } A=\frac{BN}{Y}+R'; \text{ d'où } R'=A-\frac{BN}{Y}.$$

Si l'on met dans cette dernière pour x et y des valeurs qui réduisent A et B à zéro, Y pourra devenir nul, $\frac{BN}{Y}$ et R' pourront se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$; de sorte qu'on ne saura plus si R' est réduit à zéro.

On ne sera donc pas certain que toutes les solutions des équations

$$(1) \dots A=0, B=0,$$

se trouvent parmi les solutions des équations

$$(2) \dots B=0, R'=0.$$

Réciproquement, lorsque des valeurs de x et y qui réduisent B et R' à zéro rendent Y nul, la valeur de A se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, de sorte qu'on ignore si elles réduisent A à zéro.

Les équations (2) peuvent donc fournir des solutions étrangères aux équations (1).

On ne peut donc plus affirmer que les solutions des équations $A=0$, $B=0$, sont les mêmes que celles des équations $B=0$, $R'=0$. Et par conséquent, on ne saurait plus faire usage de la méthode que nous avons précédemment indiquée.

Pour remédier à cet inconvénient, on évite les quotiens fractionnaires, en multipliant les dividendes par des fonctions convenables de y .

Ainsi, dans la division de A par B , on multiplie les dividendes successifs par des facteurs tels que le coefficient du

premier terme de chaque dividende partiel soit exactement divisible par le coefficient du premier terme de B. Si a désigne le produit de tous ces facteurs, la division de Aa par B fournira un quotient entier Q' et un reste $R' < B$. On aura

$$Aa = BQ' + R'.$$

Cette identité démontre que toute solution $x = a$, $y = c$ des équations proposées (1)... $A = 0$, $B = 0$, convient aux équations (2)... $B = 0$, $R' = 0$; car aucune des quantités entières a , Q' ne saurait devenir infinie quand on y fait $x = a$, $y = c$.

La réciproque n'est pas généralement vraie : une solution $x = a'$, $y = c'$, des équations (2), peut ne pas convenir aux équations (1). En effet; les valeurs a' , c' , de x et y , substituées dans l'identité $Aa = BQ' + R'$, donnant $Aa = 0$, il peut arriver qu'elles ne réduisent pas A à zéro, puisque a étant fonction de y , l'hypothèse $y = c'$ peut rendre a nul.

Quand la valeur $y = c'$ ne réduit pas le multiplicateur a à zéro, la solution $x = a'$, $y = c'$, convient nécessairement aux équations (1).

Par conséquent, toutes les solutions des équations (1) se trouvent parmi les solutions des équations (2); mais les équations (2) peuvent donner en outre des valeurs de x et y étrangères aux équations (1) proposées.

Opérant sur les équations (2) comme sur les équations (1), on est conduit à diviser B par R' ; soit b le produit de tous les facteurs par lesquels il faudrait multiplier les dividendes partiels pour éviter les coefficients fractionnaires, la division de Bb par R' fournira un quotient entier Q'' et un reste $R'' < R'$.

On aura $Bb = R'Q'' + R''$.

Les identités $Aa = BQ' + R'$, $Bb = R'Q'' + R''$, démontrent que toutes les solutions des équations

$$(1)... A = 0, \quad B = 0,$$

réduisent les restes successifs R' , R'' , à zéro. Ces solutions se trouvent donc parmi celles du système (3)... $R' = 0$, $R'' = 0$.

La réciproque n'est pas généralement vraie, car une solution

$x=a', y=c'$, du système (3)... $R'=0$; $R''=0$, peut ne pas convenir aux équations proposées (1)... $A=0$, $B=0$.

Par exemple, si $y=c'$ donne $b=0$, les valeurs $x=a', y=c'$ qui rendent R' et R'' nuls, pourront donner $Bb=0$, sans réduire B à zéro; de sorte que la solution $x=a', y=c'$ du système (3), sera étrangère au système (1).

Mais, si $y=c'$ ne réduit ni b ni a à zéro, on sera certain que $x=a', y=c'$ est une solution des équations (1).

En continuant ainsi à diviser les restes successifs les uns par les autres, on verra que toutes les valeurs de x et y qui conviennent aux équations proposées, réduisent deux restes consécutifs quelconques à zéro; mais que des valeurs de x et y qui réduisent deux restes consécutifs à zéro, peuvent ne pas convenir aux équations proposées.

Par conséquent, si l'on continue les calculs jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste R indépendant de x , et si R_1 désigne le reste précédent, le système (4)... $R=0$, $R_1=0$, fournira toutes les solutions des équations (1)... $A=0$, $B=0$, et quelquefois il donnera en outre des valeurs de x et y qui ne conviendront pas aux équations (1) proposées. On suppose toujours qu'on ne supprime dans les restes successifs aucun facteur fonction des inconnues.

L'équation $R=0$ renferme donc toutes les bonnes valeurs de y , mais quelquefois elle fournit en outre des valeurs de y qui ne conviennent pas aux équations proposées.

Lorsque le reste R indépendant de x n'a aucun commun diviseur fonction de y avec les quantités a , b , etc., par lesquelles on a multiplié les dividendes successifs pour rendre les divisions possibles, les solutions des équations proposées sont les mêmes que celles des équations $R_1=0$, $R=0$; de sorte que $R=0$ est l'équation finale en y .

En effet; supposons, pour fixer les idées, que la deuxième division conduise à un reste R'' indépendant de x . On aura

$$(2) \dots Aa = BQ' + R', \quad Bb = R'Q'' + R''.$$

Il s'agit de faire voir que R'' étant premier avec a et avec b ,

les solutions du système (1)... $A=0$, $B=0$, sont les mêmes que celles du système (3)... $R'=0$, $R''=0$.

Les identités (2) démontrent que toute solution $x=a$, $y=c$, du système (1) donne (3)... $R'=0$, $R''=0$.

RÉCIPROQUEMENT, soit $x=a$, $y=c$, une solution du système (3); les identités (2) prouvent que ces valeurs de x et y réduisent B et A à zéro; car R' étant premier avec b et avec a , la valeur $y=c$ tirée de $R''=0$, ne peut réduire ni b ni a à zéro.

Par la même raison, lorsqu'une valeur de y tirée de $R''=0$, ne réduit à zéro aucun des multiplicateurs a , b , on est certain que cette valeur convient aux équations (1) proposées.

Quand le reste R'' indépendant de x , a un facteur commun fonction de y avec un des multiplicateurs a , b , l'équation $R''=0$, peut donner des valeurs étrangères de y ; car par exemple, si R'' et b ont un commun diviseur $y-c$, la solution $x=a$, $y=c$ des équations (3)... $R'=0$, $R''=0$, réduisant b à zéro, la relation $Bb=0$, déduite de $Bb=R'Q''+R''$, peut avoir lieu sans que B devienne nul. Dans ce cas, on reconnaîtra si $x=a$, $y=c$, convient aux équations proposées en substituant ces valeurs dans A et B .

EXEMPLE. Soient les deux équations

$$\begin{aligned} A &= (y-1)x^2 + 2x - 5y + 3 = 0, \\ B &= \quad \quad \quad yx^2 + 9x - 10y = 0. \end{aligned}$$

Les polynomes A , B étant du même degré en x , il est indifférent de diviser A par B , ou B par A .

Si l'on opère de la première manière, on rendra la division possible en multipliant A par y , et l'on divisera Ay par B , ce qui fournira le quotient entier $y-1$ et le reste

$$R' = (-7y + 9)x + (5y^2 - 7y).$$

Ce reste étant moindre que B , on doit diviser B par R' , et pour éviter les fractions, on multiplie B par $(-7y + 9)$; ce qui conduit à diviser $(-7y + 9)B$ par R' ; le premier terme du quotient est yx et le reste est,

$$(-5y^3 + 7y^2 - 63y + 81)x + (70y^2 - 90y).$$

Pour éviter les fractions, on multiplie ce reste par le coefficient $-7y+9$ du premier terme du diviseur R' , et on divise le produit par R' ; ce qui donne le deuxième terme

$$(-5y^3 + 7y^2 - 63y + 81)$$

du quotient, et le reste

$$R = 25y^5 - 70y^4 - 126y^3 + 414y^2 - 243y.$$

Au lieu de multiplier deux fois par $-7y+9$, comme on vient de le faire, on peut multiplier B par $(-7y+9)^2$ et diviser le produit par R' .

Dans l'exemple actuel, l'équation $R=0$ peut admettre des valeurs de y étrangères aux équations proposées; car il existe un commun diviseur y entre le reste R et le multiplicateur y dont on a fait usage pour rendre la première division possible.

Pour découvrir si la valeur $y=0$, déduite de $R=0$, convient aux équations $A=0$, $B=0$, on fait $y=0$ dans A et B ; les résultats $-x^2+2x+3$, $+9x$, n'ayant pas de commun diviseur fonction de x , la valeur $y=0$ est étrangère (n° 284). On supprime cette valeur étrangère en divisant R par $y=0$, ou par y , ce qui conduit à

$$(1) \dots 25y^4 - 70y^3 - 126y^2 + 414y - 243 = 0.$$

Cette dernière équation donne $y=1$ et $y=3$.

Pour obtenir ses deux autres racines, on divise son premier membre par le produit y^2-4y+3 des facteurs $y-1$, $y-3$, correspondans aux racines $+1$, $+3$; le quotient égalé à zéro, fournit les deux autres racines

$$y = \frac{3}{5}(-1 + \sqrt{10}), \quad y = \frac{3}{5}(-1 - \sqrt{10}).$$

L'équation (1) ne renferme pas de valeurs étrangères de y ; car les quatre valeurs de y , déduites de cette équation, ne réduisent à zéro aucun des multiplicateurs y , $(-7y+9)^2$, dont on a fait usage pour rendre les divisions possibles (page 447).

Pour obtenir les valeurs de x correspondantes aux quatre

bonnes valeurs de y , on pourrait faire successivement

$$y=1, y=3, y=\frac{3}{5}(-1+\sqrt{10}), y=\frac{3}{5}(-1-\sqrt{10}),$$

dans A et B; on chercherait chaque fois le plus grand commun diviseur entre les fonctions de x qui en résulteraient, et ces communs diviseurs égaux à zéro, donneraient les valeurs demandées.

$$x=1, x=2, x=-5-\sqrt{10}, x=-5+\sqrt{10}.$$

Mais, on parvient plus simplement aux mêmes résultats en mettant successivement les valeurs de y dans l'équation $R=0$, et en déduisant x de l'équation qui en résulte.

288. Lorsqu'une valeur ζ de y , tirée de $R=0$, rend nul le reste précédent R_1 , cela indique que plusieurs valeurs de x correspondent à $y=\zeta$. Pour obtenir ces valeurs de x , on fait $y=\zeta$ dans les restes précédents; jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste qui ne soit pas nul; ce dernier reste égalé à zéro fournit les valeurs de x correspondantes à $y=\zeta$.

Quand la valeur ζ tirée de $R=0$, réduit à zéro tous les restes ainsi que A et B, il existe un commun diviseur $y-\zeta$ entre A et B, et on satisfait aux équations proposées, ...
(1) . . . $A=0, B=0$, en combinant la valeur $y=\zeta$ avec des valeurs arbitraires de x .

Pour découvrir les autres solutions du système $A=0, B=0$, on cherche le plus grand commun diviseur δ entre les coefficients des diverses puissances de x dans A, et le plus grand commun diviseur γ entre les coefficients des diverses puissances de x dans B. On divise A par δ , et B par γ , ce qui fournit des quotiens A', B' ; on a $A=\delta A', B=\gamma B'$. On cherche le plus grand commun diviseur Y entre δ et γ ; on divise δ et γ par Y, ce qui fournit des quotiens exacts p, q ; on a

$$\delta=pY, \gamma=qY, A=pYA', B=qYB';$$

de sorte que les équations proposées reviennent à
(2) . . . $pYA'=0, qYB'=0.$

Les valeurs de y tirées de $Y=0$, satisfont aux équations (2) quel que soit x .

Les autres solutions des équations proposées dépendent du système

$$(3) \dots pA' = 0, \quad qB' = 0.$$

Les quantités p, q , étant des fonctions de y premières entre elles, une même valeur de y ne saurait les réduire simultanément à zéro. Il n'existe donc que trois manières de satisfaire au système (3), savoir :

$$p=0, \quad B'=0 \parallel q=0, \quad A'=0 \parallel A'=0, \quad B'=0.$$

L'équation $p=0$ fournit des bonnes valeurs de y , et en les substituant dans $B'=0$, on obtient des équations en x qui déterminent les valeurs de x correspondantes.

De même, $q=0$ donne des valeurs de y ; ces valeurs substituées dans $A'=0$, fournissent des équations en x qui déterminent les valeurs correspondantes de x .

Enfin, pour obtenir les solutions du système $A'=0, B'=0$, dans lequel A' et B' n'ont plus de facteur fonction de la seule inconnue y , on opérera comme il a été indiqué (n° 287). On parviendra à un reste r fonction de y et si r_1 désigne le reste précédent, les solutions des équations $r=0, r_1=0$, conduiront à celles du système $A'=0, B'=0$.

Mais, une valeur ζ de y tirée de $r=0$, ne réduira jamais à zéro tous les restes, ainsi que A' et B' ; car si cela arrivait, A' et B' auraient encore un commun diviseur $y-\zeta$; ce qui est contre l'hypothèse.

289. Lorsque dans le cours des divisions successives, on aperçoit un facteur commun à tous les termes de l'un des restes, on peut simplifier les calculs.

EXEMPLE. Soient les équations

$$x^3 + 2yx^2 + 2y(y-2)x + y^3 - 4 = 0, \quad x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0,$$

et désignons leurs premiers membres par A et B ; la division de A par B donne le quotient x et le reste $R' = (y-2)x + (y^3-4)$.

Cé reste contient le facteur $y-\frac{1}{2}$, car y^3-4 est le produit

de $y-2$ par $y+2$. On a donc

$$R' = (y-2) \times (x+y+2).$$

Les solutions des équations proposées étant les mêmes que celles des équations $B=0$, $R'=0$ (n° 286), il suffit de traiter les deux systèmes

$$B=0, \quad y-2=0 \parallel B=0, \quad x+y+2=0.$$

Le premier donne les deux solutions

$$y=2, \quad x=0 \parallel y=2, \quad x=-4.$$

Pour trouver les solutions du second système, on divise B par $x+y+2$; ce qui fournit le quotient $x+y-2$ et le reste y^2-5y+6 ; les équations

$$y^2-5y+6=0, \quad x+y+2=0,$$

déterminent les deux autres solutions

$$y=2, \quad x=-4 \parallel y=3, \quad x=-5.$$

L'équation finale en y est donc (n° 224)

$$(y-2)(y-2)(y-2)(y-3)=0, \quad \text{ou}$$

$$y^4-9y^3+30y^2-44y+24=0.$$

On parvient au même résultat en ne décomposant pas le reste R' en deux facteurs; car le procédé général du n° 287 conduit à diviser $B(y-2)^2$ par R' ; ce qui donne le reste

$$y^4-9y^3+30y^2-44y+24.$$

290. En général, lorsqu'on peut décomposer les premiers membres des équations proposées (1)... $A=0$, $B=0$, en facteurs algébriques entiers, la résolution de ces équations devient plus facile; car en égalant à zéro l'un quelconque des facteurs de A et l'un des facteurs de B , les solutions des deux équations qui en résultent appartiennent aux équations (1).

EXEMPLE. Soient

$$A=x^2+2yx+y^2-1, \quad B=x^2-2(y+1)x+(y^2+2y-3)$$

Pour décomposer A en facteurs du premier degré, on résout l'équation $A=0$, par rapport à x ; ce qui donne $x=-y\pm 1$.

Chacune des hypothèses $x=-y+1$, $x=-y-1$, réduisant A à zéro, A est égal au produit des facteurs premiers $x+y-1$, $x+y+1$, (n° 224); de sorte que

$$A=(x+y-1)(x+y+1).$$

On trouvera de même que

$$B=(x-y+1)(x-y-3).$$

Toutes les solutions des équations $A=0$, $B=0$, seront donc fournies par les quatre systèmes

$$\begin{aligned} x+y-1=0, \quad x-y+1=0; & \text{ d'où } x=0, y=+1, \\ x+y-1=0, \quad x-y-3=0; & \text{ d'où } x=+2, y=-1, \\ x+y+1=0, \quad x-y+1=0; & \text{ d'où } x=-1, y=0, \\ x+y+1=0, \quad x-y-3=0; & \text{ d'où } x=+1, y=-2. \end{aligned}$$

On voit que l'équation finale en y est

$$(y-1)(y+1)(y-0)(y+2)=0, \text{ ou } y^4+2y^3-y^2-2y=0,$$

et que l'équation finale en x est

$$(x-0)(x-2)(x+1)(x-1)=0, \text{ ou } x^4-2x^3-x^2+2x=0.$$

291. Le procédé du plus grand commun diviseur, fournit souvent le moyen de décomposer les premiers membres des équations proposées en facteurs entiers. En effet, soient les deux équations entre x et y ,

$$M=0, \quad N=0.$$

On peut décomposer le polynôme entier M en trois facteurs U , U' , U'' , le premier fonction de la seule inconnue y , le deuxième fonction de x , et le troisième fonction de x et y .

Pour trouver le premier facteur, on ordonne M par rapport à x , et on cherche le plus grand commun diviseur U fonction de y entre les coefficients des diverses puissances de x (n° 27); on divise M par U , ce qui fournit un quotient exact Q , et l'on a $M=U \times Q$.

On obtient le facteur U' , fonction de x , en ordonnant le po-

lyhome Q par rapport à y et en calculant le plus grand commun diviseur U' fonction de x , entre les coefficients des diverses puissances de y dans Q ; le quotient de Q par U' est une fonction U'' de x et y , et l'on a

$$Q = U'U'', \quad M = U \times U' \times U''.$$

On décompose de même N en trois facteurs V, V', V'' , le premier fonction de y , le deuxième fonction de x , et le troisième fonction de x, y ; ce qui donne

$$N = V \times V' \times V''.$$

On cherche le plus grand commun diviseur Y de U et V , puis le plus grand commun diviseur X de U' et V' , et enfin le plus grand commun diviseur D de U'' et V'' ; on divise U et V par Y , ce qui donne des quotiens exacts u, v ; on divise ensuite U' et V' par X , ce qui fournit des quotiens exacts u', v' ; enfin on divise U'' et V'' par D , ce qui donne des quotiens exacts A, B . Il en résulte:

$$U = uY, \quad U' = u'X, \quad U'' = DA, \quad M = YXDuu'A,$$

$$V = vY, \quad V' = v'X, \quad V'' = DB, \quad N = YXDvv'B.$$

La question se trouve ainsi réduite à déterminer toutes les valeurs de x et y qui satisfont au système

$$(1) \quad YXDuu'A = 0, \quad YXDvv'B = 0.$$

Pour y parvenir, on égale successivement à zéro, l'un quelconque des facteurs de M , et l'un des facteurs de N ; les deux équations qui en résultent fournissent des solutions des équations proposées; et l'ensemble de toutes ces solutions détermine toutes les valeurs des inconnues x, y , (n° 228).

Discutons ces différens systèmes d'équations.

En général, Y, u et v sont des fonctions de la seule inconnue y ; X, u' et v' sont des fonctions de x ; et D, A, B , sont des fonctions de x et y . D'ailleurs, u et v sont premiers entre eux; il en est de même de u' et v' , ainsi que de A et B . De sorte que le plus grand commun diviseur de M et N est YXD . Cela posé :

1°. On satisfait aux équations (1) en égalant à zéro l'un quelconque des facteurs communs Y, X, D .

L'équation $Y=0$ déterminera un nombre limité de valeurs de y , avec chacune desquelles on pourra combiner des valeurs arbitraires de x . De sorte que y sera déterminé, tandis que x sera indéterminé.

L'équation $X=0$, déterminera x ; et y sera d'ailleurs arbitraire.

Enfin, l'équation $D=0$, contenant x et y , on pourra donner des valeurs quelconques à x ou à y , l'équation résultante ne contenant plus que l'autre inconnue, déterminera les valeurs correspondantes de cette dernière inconnue.

Ainsi, chacune des équations $Y=0, X=0, D=0$, fournira une infinité de solutions des équations (1) proposées, et l'on obtiendra ces solutions en résolvant des équations à une seule inconnue.

2°. Les autres manières de satisfaire aux équations proposées consistent à égaliser à zéro, en même temps, l'un des facteurs u, u', A , de la première équation, et l'un des facteurs v, v', B , de la seconde. Ce qui fournit neuf systèmes.

Or, on ne peut pas avoir en même temps $u=0$ et $v=0$; car ces facteurs ne contiennent que y , et n'ont plus de facteur commun; donc aucune valeur de y ne peut les rendre nuls tous deux à la fois.

Par une raison semblable, on ne saurait avoir en même temps $u'=0, v'=0$.

Il ne reste donc que les sept systèmes possibles.

$$\begin{array}{l} u=0 \parallel u'=0 \parallel u=0 \parallel u'=0 \parallel v=0 \parallel v'=0 \parallel A=0, \\ v'=0 \parallel v=0 \parallel B=0 \parallel B=0 \parallel A=0 \parallel A=0 \parallel B=0. \end{array}$$

Dans le système $u=0, v'=0$, chacune des valeurs de y tirée de l'équation à une seule inconnue $u=0$, peut se combiner avec l'une quelconque des valeurs de x tirées de l'équation à une seule inconnue $v'=0$. De sorte que si m et n désignent les degrés des équations $u=0, v'=0$, le nombre des solutions fournies par ce système sera $m \times n$.

Par une raison semblable, le système $u' = 0, v = 0$, fournira un nombre de solutions marqué par le produit des degrés des équations à une seule inconnue $u' = 0, v = 0$.

Dans le système $u = 0, B = 0$, la première équation ne contenant que y donnera un nombre limité de valeurs de cette inconnue, et chacune de ces valeurs substituée dans $B = 0$, fournira une équation en x d'où l'on tirera les valeurs correspondantes de x .

On voit semblablement que chacun des trois systèmes

$$\begin{array}{l} u' = 0 \parallel v = 0 \parallel v' = 0, \\ B = 0 \parallel A = 0 \parallel A = 0, \end{array}$$

fournit un nombre limité de valeurs de x, y , et que l'on obtient ces valeurs en résolvant des équations à une seule inconnue.

Enfin, dans le dernier système, $A = 0, B = 0$, chacune des quantités A, B , contenant les deux inconnues x, y , le procédé du n° 287 fournira le moyen de ramener la question à traiter deux équations dans l'une desquelles il n'entrera qu'une seule des inconnues; ces deux nouvelles équations fourniront toutes les solutions du système $A = 0, B = 0$, et elles pourront donner en outre des *valeurs étrangères*; le procédé du n° 283 fournira le moyen de distinguer les *bonnes valeurs* de x et y .

Les polynomes A, B , n'ayant aucun facteur commun, le système $A = 0, B = 0$, ne peut admettre qu'un nombre limité de solutions, et une valeur de x ou de y ne saurait à elle seule réduire simultanément A et B à zéro.

292. Pour résoudre trois équations

$$(1) \dots P = 0, \quad (2) \dots Q = 0, \quad (3) \dots R = 0,$$

qui renferment trois inconnues x, y, z , on élimine successivement z entre (1), (2), et (1), (3); cela conduit à deux équations

$$(4) \dots F(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

qui servent à déterminer x et y . L'élimination de x entre les

équations (4) conduit à une équation (5)... $\phi(y) = 0$, qui détermine toutes les valeurs de y . Soit ζ une de ces valeurs; on fait $y = \zeta$ dans $F(x, y)$ et $f(x, y)$, on cherche le plus grand commun diviseur X , des résultats $F(x, \zeta)$, $f(x, \zeta)$; l'équation $X = 0$, fournit les valeurs de x correspondantes à $y = \zeta$; si a désigne une racine de $X = 0$, l'une des solutions des équations (4) est $x = a$, $y = \zeta$. La substitution de ces valeurs de x et y , dans P , Q , R , fournit trois fonctions de z ; on cherche leur plus grand commun diviseur Z ; l'équation $Z = 0$ détermine les valeurs de z correspondantes à $x = a$, $y = \zeta$.

EXEMPLE. Soient les trois équations

$$(1) \dots x + y + z - 6 = 0, \quad (2) \dots z^2 - x^2 - y^2 - 4 = 0,$$

$$(3) \dots z^2 + xy - x^2 - 7 = 0.$$

L'élimination de z entre (1), (2), et entre (1), (3), donne

$$(4) \dots (y-6)x - 6y + 16 = 0, \quad 3(y-4)x + y^2 - 12y + 20 = 0.$$

Éliminant x entre ces deux dernières équations, il vient

$$(5) \dots y^3 - 19y + 18 = 0.$$

Une des racines de l'équation (5) est $y = 1$; pour obtenir les valeurs correspondantes de x et de z , on fait $y = 1$ dans les équations (4); elles donnent $x = -2$; supposant $y = 1$, $x = 2$, dans (1), (2), (3), il vient

$$z - 3 = 0, \quad z^2 - 9 = 0, \quad z^2 - 9 = 0; \text{ d'où } z = 3,$$

de sorte que $y = 1$, $x = 2$, $z = 3$, est une solution des équations proposées.

Divisant $y^3 - 19y + 18$ par $y - 1$, le quotient égalé à zéro déterminera les deux autres valeurs de y ; les équations (4) fourniront les valeurs correspondantes de x , et ensuite les équations (1), (2), (3), donneront les valeurs de z .

293. En général : La résolution de n équations d'un degré quelconque entre n inconnues, conduit à des équations dans chacune desquelles il n'entre qu'une seule inconnue.

Quand on a n équations entre $n + m$ inconnues, on peut assigner des valeurs arbitraires à m inconnues, car il reste n

équations qui servent à déterminer les n autres inconnues. On peut aussi déduire des n équations données, une relation entre $m+1$ quelconques des $n+m$ inconnues, car il suffit d'éliminer les $n-1$ autres inconnues.

Enfin, lorsqu'on a $n+m$ équations entre n inconnues, l'élimination des n inconnues fournit m équations de condition; la possibilité de satisfaire au système proposé, dépend de ces équations de condition.

§ VII. Équation aux différences. Calcul d'une quantité moindre que la plus petite des différences entre les racines prises deux à deux d'une équation donnée.

294. Nous allons calculer l'équation aux différences....
 (2)... $\phi(y) = 0$, qui a pour racines toutes les différences entre les racines $a, b, c, \dots, k$, d'une équation du $m^{\text{ème}}$ degré (1)... $f(x) = 0$.

Soient z et z' des racines quelconques de l'équation (1); chacune des quantités z, z' , aura m valeurs $a, b, c, \dots, k$; et on exprimera que z, z' sont racines de l'équation (1) en posant

$$f(z) = 0, \quad f(z') = 0. \quad \text{Soit, } z' - z = y.$$

Le système de ces trois dernières équations déterminera toutes les valeurs de y correspondantes aux m valeurs.... $a, b, c, \dots, k$, de chacune des inconnues z, z' ; ces valeurs de y exprimeront donc toutes les différences entre les m racines de l'équation (1); et par conséquent, on obtiendra l'équation en y qui déterminé ces différences, en éliminant z' et z entre les équations

$$(3)... f(z) = 0, \quad f(z') = 0, \quad z' - z = y.$$

Pour éliminer z' , on remplace cette inconnue par sa valeur $z + y$ tirée de $z' - z = y$; l'équation $f(z') = 0$ devient $f(z + y) = 0$, et d'après ce qu'on a vu (n° 251), si l'on développe $f(z + y)$ suivant les puissances croissantes de y , l'é-

quation $f(z+y)=0$, deviendra

$$(4) \dots f(z) + yf'(z) + \frac{y^2}{2}f''(z) + \frac{y^3}{2.3}f'''(z) + \dots + y^m = 0.$$

Cela posé : si l'on éliminait directement z entre cette dernière équation et $f(z)=0$, l'équation finale $F(y)=0$ déterminerait non-seulement les $m(m-1)$ différences

$$\begin{aligned} b-a, \quad c-a, \dots, k-a, \\ a-b, \quad c-b, \dots, k-b, \text{ etc.}, \end{aligned}$$

entre chacune des m racines $a, b, c, \dots, k$, et les $m-1$ autres, mais en outre les m différences

$$a-a, \quad b-b, \quad c-c, \dots, k-k,$$

entre chaque racine et elle-même; car l'équation finale $F(y)=0$ doit fournir les m^2 valeurs de y qui résultent de la relation $y=z'-z$ en donnant successivement à z et z' les m valeurs $a, b, c, \dots, k$.

L'équation $F(y)=0$, admettant m racines nulles, son premier membre serait divisible par y^m , et le quotient égalé à zéro donnerait l'équation demandée (2) $\dots \phi(y)=0$, dont les racines sont les $m(m-1)$ différences entre chaque racine de l'équation (1) et les $m-1$ autres.

Mais, on peut parvenir directement à l'équation (2), en observant d'abord que $f(z)$ étant nul, l'équation (4) se réduit à

$$(5) \dots yf'(z) + \frac{1}{2}y^2f''(z) + \frac{1}{2.3}y^3f'''(z) + \dots + y^m = 0.$$

Or, pour une valeur a de z , la relation $y=z'-z$ donne $y=z'-a$; l'équation (5) devient

$$yf'(a) + \frac{1}{2}y^2f''(a) + \frac{1}{2.3}y^3f'''(a) + \dots + y^m = 0;$$

les m racines de cette dernière équation sont les m différences $a-a, b-a, c-a, \dots, k-a$, entre la racine a' et les m racines $a, b, c, \dots, k$; car les valeurs de y correspon-

dantes à $z = a$ sont fournies par la relation $y = z' - a$, en donnant successivement à z' ses m valeurs $a, b, c, \dots, k$.

On voit donc que dans l'équation (5), chacune des m valeurs $a, b, c, \dots, k$, de z , fournit une valeur nulle de y .

Pour supprimer les m valeurs $a - a, b - b, c - c, \dots, k - k$, de y , qui sont nulles, il suffit de diviser le premier membre de l'équation (5) par y ; alors dans l'équation résultante

$$f'(z) + \frac{1}{2} y f''(z) + \frac{1}{2 \cdot 3} y^2 f'''(z) + \dots + y^{m-1} = 0,$$

chacune des m valeurs de z , fournit $m - 1$ valeurs correspondantes de y qui expriment les $m - 1$ différences entre cette valeur de z et les $m - 1$ autres. De sorte que les m valeurs nulles, $a - a, b - b, \dots, k - k$, de y , qui satisfaisaient au système

$$f(z) = 0, \quad y f'(z) + \frac{1}{2} y^2 f''(z) + \frac{1}{2 \cdot 3} y^3 f'''(z) + \dots + y^m = 0,$$

ne se trouvent plus dans le nouveau système

$$(6) \dots f(z) = 0, \quad f'(z) + \frac{1}{2} y f''(z) + \frac{y^2}{2 \cdot 3} f'''(z) + \dots + y^{m-1} = 0.$$

Le système (6) déterminant pour y , les $m(m - 1)$ différences entre chacune des m racines $a, b, \dots, k$, et les $m - 1$ autres, si l'on élimine z entre ces équations, l'équation finale en y sera l'équation aux différences

$$(2) \dots \varphi(y) = 0.$$

On parviendra au même résultat en éliminant x entre

$$(7) \dots f(x) = 0 \text{ et } f'(x) + \frac{1}{2} y f''(x) + \frac{y^2}{2 \cdot 3} f'''(x) + \dots + y^{m-1} = 0,$$

car le système (7) se déduit du système (6), en changeant z en x dans (6).

Par conséquent : Pour déterminer l'équation aux différences (2) $\dots \varphi(y) = 0$ de l'équation donnée $f(x) = 0$, il suffit de calculer l'équation finale résultante de l'élimination de x entre les équations (7).

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$. On a
 $f(x) = x^3 - 7x + 7, f'(x) = 3x^2 - 7, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6$.

Toutes les autres dérivées de $f(x)$ étant nulles, l'équation générale

$$f'(x) + \frac{1}{2} y f''(x) + \frac{1}{2 \cdot 3} y^2 f'''(x) + \text{etc.} = 0,$$

se réduit à

$$(3x^2 - 7) + 3xy + y^2 = 0, \text{ ou à } 3x^2 + 3yx + y^2 - 7 = 0.$$

De sorte qu'il s'agit d'éliminer x entre

$$x^3 - 7x + 7 = 0 \text{ et } 3x^2 + 3yx + y^2 - 7 = 0.$$

Le résultat de cette élimination est l'équation aux différences

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 49 = 0.$$

2^e EXEMPLE. Soit l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

On trouve que l'équation aux différences est

$$y^6 - 12y^4 + 36y^2 + 643 = 0.$$

295. Les équations (1)... $f(x) = 0$, (2)... $\phi(y) = 0$, jouissent des propriétés suivantes :

1^o. L'équation (1) étant du $m^{\text{ième}}$ degré, l'équation (2) aux différences est du $m(m-1)^{\text{ième}}$ degré ; car chacune des m racines de l'équation (1) donnant $m-1$ différences entre cette racine et les $m-1$ autres, ces m racines déterminent $m(m-1)$ différences qui sont les racines de l'équation (2).

2^o. L'équation aux différences ne contient que des puissances paires de l'inconnue ; car toutes ses racines sont égales deux à deux et de signes contraires (n^o 231).

Posant donc $m(m-1) = 2n$, l'équation aux différences sera de la forme

$$y^{2n} + Py^{2n-2} + Qy^{2n-4} + \dots + Sy^2 + T = 0,$$

ce qui revient à

$$(3) \dots (y^n)^2 + P(y^n)^{n-1} + Q(y^n)^{n-2} + \dots + Sy^n + T = 0.$$

3°. Soit $y^2 = z$; l'équation (3) devient

$$(4) \dots z^n + Pz^{n-1} + Qz^{n-2} + \dots + Sz + T = 0.$$

Cette dernière est l'équation aux quarrés des différences, parce que ses racines sont les quarrés des différences entre les racines de l'équation (1) prises deux à deux.

4°. Quand l'équation (1) n'a que des racines réelles, l'équation (4) n'a que des variations de signes; car les quarrés des différences entre ces racines étant réels et positifs, toutes les racines de l'équation (4) sont réelles et positives.

5°. Nous démontrerons dans le neuvième chapitre que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que lorsque l'équation (4) n'a que des variations, l'équation (1) a toutes ses racines réelles.

6°. Il résulte de (4°) que toutes les fois que l'équation (4) a des permanences, l'équation (1) a nécessairement des racines imaginaires.

EXEMPLE. Soit l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

L'équation aux différences est

$$y^6 - 12y^4 + 36y^2 + 643 = 0.$$

Cette dernière équation ayant une permanence, l'équation en x a des racines imaginaires (6°), et n'a par conséquent qu'une seule racine réelle, car les racines imaginaires sont toujours en nombre pair (n° 265, page 412).

7°. Si les racines de l'équation (1) ne font que changer de signes, l'équation (2) aux différences restera la même; car les différences entre deux racines quelconques a, b , de l'équation (1) étant $a - b$ et $b - a$, les différences entre $-a$ et $-b$ sont les mêmes.

296. Il est maintenant facile de calculer la quantité δ moindre que la plus petite des différences entre les racines d'une équation donnée $f(x) = 0$, dont toutes les racines sont inégales. A cet effet, on cherche l'équation aux différences, $\phi(y) = 0$, des racines de la proposée, et l'une quelconque des limites inférieures des racines positives de $\phi(y) = 0$, exprime δ .

EXEMPLE. Soit $x^3 - 7x + 7 = 0$;
on vient de voir (page 461) que l'équation aux différences est

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 49 = 0.$$

La limite inférieure des racines positives de cette dernière équation étant $\frac{1}{4}$ (2^e Exemple, page 377), on a $\delta = \frac{1}{4}$.

REMARQUE. Nous avons supposé que l'élimination conduisait à l'équation aux différences (2)... $\phi(y) = 0$; mais on a vu (n^o 287) que cette élimination donne quelquefois une équation $\phi(y) \times F(y) = 0$ compliquée de valeurs étrangères de y ; cependant on peut prendre pour δ l'une quelconque des limites inférieures des racines positives de l'équation $\phi(y) \times F(y) = 0$; car cette limite est à plus forte raison moindre que la plus petite racine positive de l'équation (2)... $\phi(y) = 0$.

§ VIII. Equations binomes et trinomes; équations irrationnelles.

297. Les équations qui peuvent se ramener à la forme $y^m \pm b = 0$, ont reçu le nom d'équations binomes.

Les équations binomes n'ont pas de racines égales; car le binome $y^m \pm b$ n'a pas de diviseur commun avec sa dérivée my^{m-1} .

Pour simplifier la résolution des équations binomes, on cherche d'abord la valeur arithmétique α de $\sqrt[m]{b}$; on fait $y = \alpha x$; substituant cette valeur de y dans $y^m \pm b = 0$, remplaçant b par α^m , et divisant ensuite par α^m , la question se trouve réduite à résoudre l'équation $x^m \pm 1 = 0$.

1^o. Soit l'équation (1)... $x^m - 1 = 0$;
une de ses racines est $+1$.

La division de $x^m - 1$ par $x - 1$ donnant le quotient exact $x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x^2 + x + 1$, (page 33), on a l'identité

$$x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x^2 + x + 1);$$

et les autres racines de l'équation (1) dépendent de l'équation

$$(3) \dots x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x^2 + x + 1 = 0.$$

Lorsque m est un nombre impair, l'équation (3) n'a pas de racine réelle; car des valeurs positives de x ne sauraient y satisfaire, et une valeur négative de x ne réduisant jamais $x^m - 1$ à zéro, cette valeur ne peut satisfaire à l'équation (3).

Quand m est un nombre pair $2n$, l'équation $x^{2n} - 1 = 0$ a deux racines réelles $+1, -1$.

Pour trouver les autres racines, on divise $x^{2n} - 1$ par le produit $x^2 - 1$ des facteurs $x - 1, x + 1$; le quotient égalé à zéro conduit à

$$(4) \dots x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + x^2 + 1 = 0.$$

Cette équation n'a pas de racine réelle; car tous les exposants de x étant des nombres pairs, une valeur réelle de x ne saurait y satisfaire.

Pour résoudre l'équation (4), on y fait $x^2 = z$; elle se réduit à

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0;$$

cette dernière détermine $n - 1$ valeurs de z , et la relation $x = \pm \sqrt{z}$ donne les $2n - 2$ racines de l'équation (4).

Le binôme $x^{2n} - 1$ étant le produit de $x^2 + 1$ par $x^{2n-2} - 1$, les racines de l'équation $x^{2n} - 1 = 0$, peuvent aussi se déduire des équations plus simples $x^2 + 1 = 0, x^n - 1 = 0$.

2°. Soit l'équation (2) $\dots x^m + 1 = 0$.

Lorsque m est un nombre impair $2n + 1$, l'hypothèse $x = -1$ satisfait à l'équation (2). Pour obtenir les autres racines, on divise $x^{2n+1} + 1$ par $x + 1$; le quotient (page 34) égalé à zéro donne

$$(5) \dots x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \dots + x^2 - x + 1 = 0,$$

et on a l'identité

$$x^{2n+1} + 1 = (x + 1)(x^{2n} - x^{2n-1} + \dots + x^2 - x + 1).$$

Toutes les racines de l'équation (5) sont imaginaires; car elle n'a pas de racines réelles négatives (page 368, 2° REMARQUE), et chacune de ses racines devant réduire $x^{2n+1} + 1$ à zéro, l'équation (5) n'admet pas de valeurs positives de x .

Quand m est un nombre pair, l'équation (2) $\dots x^m + 1 = 0$,

n'a pas de racine réelle, car toute puissance paire d'une quantité réelle est positive.

D'après cette discussion : l'équation $x^{2n+1} - 1 = 0$ a une seule racine réelle $+1$; l'équation $x^{2n} - 1 = 0$ n'a que deux racines réelles $+1$, -1 ; la seule racine réelle de l'équation $x^{2n+1} + 1 = 0$ est -1 , et l'équation $x^{2n} + 1 = 0$ n'a pas de racine réelle.

Appliquons cette théorie générale à des exemples.

L'équation $x^2 - 1 = 0$ donne $x = +1$, $x = -1$.

Les racines de $x^2 + 1 = 0$ sont $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

Les racines de $x^4 - 1 = 0$, sont déterminées par les équations $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 1 = 0$; car $x^4 - 1$ est le produit de $x^2 - 1$ par $x^2 + 1$. Ces racines sont donc ± 1 et $\pm \sqrt{-1}$.

Une des racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$ étant $+1$, on obtient les deux autres racines en égalant à zéro le quotient de $x^3 - 1$ par $x - 1$; ce qui donne $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$.

On trouve de même que les trois racines de $x^3 + 1 = 0$, sont -1 et $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$.

On obtient les racines de $x^6 - 1 = 0$, en égalant à zéro les facteurs $x^3 - 1$, $x^3 + 1$, de $x^6 - 1$. Ce qui fournit les six racines ± 1 , $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$.

298. Un radical a autant de valeurs qu'il y a d'unités dans son indice. En effet, si l'on désigne par y la valeur de $\sqrt[m]{p}$, il faudra que la $m^{\text{ième}}$ puissance de y reproduise p , c'est-à-dire que $y^m = p$; et comme cette équation admet m valeurs inégales de y (n° 297), le principe est démontré.

Pour calculer les m valeurs de $\sqrt[m]{p}$, nous distinguerons deux cas :

1°. Quand p est un nombre positif, on prend la valeur

arithmétique c de $\sqrt[m]{p}$, on fait $y = cx$ dans $y^m - p = 0$, ce qui conduit à $x^m - 1 = 0$; d'où $x = \sqrt[m]{1}$.

Les m racines de cette dernière équation expriment les m valeurs $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, de la racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité; et en multipliant la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique c de $\sqrt[m]{p}$, par chacune des m racines $a_1, a_2, \dots, a_m$, de l'unité, les produits $ca_1, ca_2, ca_3, \dots, ca_m$, sont les m valeurs de $\sqrt[m]{p}$.

Suivant que l'indice m est pair ou impair, le radical a deux valeurs réelles, ou n'a qu'une seule valeur réelle (n° 297).

2°. Lorsque p est un nombre négatif $-b$, on a

$$y^m + b = 0, \quad y = \sqrt[m]{-b}.$$

On cherche la valeur arithmétique c de $\sqrt[m]{b}$, et en faisant $y = cx$ dans $y^m + b = 0$, on trouve

$$x^m + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[m]{-1}.$$

Les m racines de $x^m + 1 = 0$ expriment les m valeurs de $\sqrt[m]{-1}$; et en multipliant c par chacune de ces valeurs, les m produits sont les m valeurs de $\sqrt[m]{-b}$.

Si m est pair, toutes les valeurs de $\sqrt[m]{-b}$ seront imaginaires; et si m est impair, le radical n'aura qu'une seule valeur réelle (n° 297).

1^{er} EXEMPLE. Calculer les trois valeurs de $\sqrt[3]{8}$.

On cherche les racines $+1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$ de $x^3 - 1 = 0$;

la valeur arithmétique de $\sqrt[3]{8}$ étant 2, les valeurs de $\sqrt[3]{8}$ sont $+2, -1 + \sqrt{-3}$, et $-1 - \sqrt{-3}$.

REMARQUE. Les deux racines cubiques imaginaires de l'unité jouissent de la propriété remarquable que le carré de chacune d'elles reproduit l'autre. En effet, soient

$$\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}), \quad \zeta = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}).$$

Les racines de $x^3 - 1 = 0$, étant $+1$, α et ζ , on a $\alpha^3 = 1$, et le principe du n° 225 donne $1 \times \alpha \times \zeta = 1$; donc

$$\alpha^3 = 1 \times \alpha \times \zeta, \quad \text{d'où} \quad \alpha^3 = \zeta.$$

Toutes les puissances des racines cubiques imaginaires α , α^2 , de l'unité, reproduisent les racines 1 , α , α^2 ; car la relation $\alpha^3 = 1$ donne

$$\alpha^{3n} = 1, \quad \alpha^{3n+1} = \alpha^{3n} \times \alpha = \alpha, \quad \alpha^{3n+2} = \alpha^{3n} \times \alpha^2 = \alpha^2.$$

2^e EXEMPLE. Déterminer les six valeurs de $\sqrt[6]{+1}$.

On pose $x^6 - 1 = 0$.

Nous avons vu (page 465) que les valeurs de x sont données par les équations $x^3 - 1 = 0$, $x^3 + 1 = 0$.

Les trois racines de $x^3 - 1 = 0$, étant $+1$, α et α^2 , celles de $x^3 + 1 = 0$, qui n'en diffèrent que par le signe, sont -1 , $-\alpha$ et $-\alpha^2$.

Les six valeurs de $\sqrt[6]{+1}$ sont, donc ± 1 , $\pm \alpha$, $\pm \alpha^2$.

299. Le procédé du n° 139 conduirait aux m valeurs de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un polynome P ; car la racine $m^{\text{ième}}$ du premier terme de P ayant m valeurs, chacune d'elles exprime le premier terme d'une des m racines du polynome proposé, et la division fournit les autres termes de chaque racine. Mais, on parvient plus simplement aux mêmes résultats en multipliant la valeur arithmétique de $\sqrt[m]{P}$ par chacune des m valeurs de $\sqrt[m]{1}$.

300. Les règles qui ont été données pour opérer sur les valeurs arithmétiques des radicaux, ne sont pas toujours applicables aux valeurs algébriques de ces radicaux.

Par exemple, la valeur arithmétique de $\sqrt[m]{a}$ est la même que celle de $\sqrt[mn]{a^n}$, (page 225, 5°); mais les valeurs algébriques de ces radicaux sont différentes, car le premier radical a m valeurs inégales, tandis que le second en a $m \times n$.

Pour lever toutes les difficultés relatives au calcul des radicaux algébriques, il suffit d'opérer successivement sur chacune des valeurs de ces radicaux.

EXEMPLE. Calculer le produit de $\sqrt[3]{8}$ par $\sqrt[6]{729}$.

Les valeurs arithmétiques de ces radicaux étant $+2$ et $+3$, on a $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[6]{729} = 2\sqrt[3]{1} \times 3\sqrt[6]{1} = 6\sqrt[3]{1} \times \sqrt[6]{1}$.

La question est donc réduite à former le produit de $\sqrt[3]{1}$ par $\sqrt[6]{1}$; multipliant successivement chacune des valeurs $+1, \alpha, \alpha^2$, de $\sqrt[3]{1}$, par chacune des valeurs $\pm 1, \pm \alpha, \pm \alpha^2$ de $\sqrt[6]{1}$, et ayant égard aux relations $\alpha^3 = 1, \alpha^4 = \alpha$, on verra que le produit de $\sqrt[3]{1}$ par $\sqrt[6]{1}$, n'a que les six valeurs différentes $\pm 1, \pm \alpha, \pm \alpha^2$; l'expression générale du produit de $\sqrt[3]{1}$ par $\sqrt[6]{1}$ est donc $\sqrt[6]{1}$.

La règle qui a été donnée (page 225, 5°) conduirait directement au même résultat, en réduisant d'abord les radicaux au plus petit indice commun.

Équations trinomes réductibles au second degré.

301. La résolution des équations binomes donne le moyen de calculer les racines des ÉQUATIONS TRINOMES de la forme

$$(1) \dots x^m + px^m + q = 0;$$

car en faisant $x^m = y$, l'équation (1) devient

$$y^2 + 2py + q = 0; \text{ d'où } y = -p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Désignant ces deux valeurs de y par a et b , la question est réduite à résoudre les équations binomes $x^m = a, x^m = b$.

REMARQUE. L'équation (1) n'admet jamais plus de quatre racines réelles; car lorsque a et b sont réels, chaque équation binome ne peut donner plus de deux valeurs réelles de x

(n° 297); et si a ou b est imaginaire, b par exemple, aucune valeur réelle de x ne saurait satisfaire à $x^m = b$, puisque la $m^{\text{ième}}$ puissance d'une quantité réelle ne peut être égale à une imaginaire b .

Résolution des Équations irrationnelles.

302. Nous allons actuellement nous occuper des *équations irrationnelles*, c'est-à-dire des équations dans lesquelles les inconnues entrent sous des radicaux.

Pour résoudre ces équations, on égale chaque radical à une nouvelle inconnue; on fait ensuite disparaître les radicaux; ce qui fournit des *équations rationnelles* entre les inconnues primitives et les nouvelles inconnues; l'élimination de ces nouvelles inconnues conduit à des équations rationnelles entre les inconnues primitives, et nous avons vu comment on résout ces dernières équations.

1^{er} EXEMPLE. Soit (1)... $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 5$.

On fait $\sqrt{x} = y$ et $\sqrt{x-5} = z$; d'où

$$(2)... y + z = 5, \quad y^2 = x, \quad z^2 = x - 5.$$

Pour obtenir l'équation finale en x , il suffit d'éliminer y et z entre les équations (2); à cet effet, on remplace d'abord y par sa valeur $5 - z$ tirée de $y + z = 5$, l'équation $y^2 = x$ devient $z^2 - 10z + 25 - x = 0$; or, $z^2 + 5 - x = 0$; l'élimination de z entre ces deux dernières conduit à $x = 9$; cette valeur de x satisfait à l'équation (1).

REMARQUE. Le seul moyen de rendre l'équation (1) rationnelle, est de faire disparaître les radicaux en les élevant au carré; ce qui fait disparaître le double signe dont la valeur de chaque radical doit être affectée; chacune des équations

$$(3)... \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 5, & -\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 5, \\ -\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 5, \end{cases}$$

conduirait donc à la même valeur $x = 9$; et cependant en ne

prenant que la valeur arithmétique de chaque radical, la valeur $x=9$ ne satisfait à aucune des équations (3).

En général, lorsqu'on fait disparaître les radicaux contenus dans des équations, les valeurs des inconnues tirées des équations rationnelles qui en résultent, peuvent ne convenir qu'à certaines combinaisons des diverses valeurs dont ces radicaux sont susceptibles.

Ainsi, l'équation $\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 5$, n'admet pas de solutions arithmétiques; mais en prenant la valeur négative de $\sqrt{x-5}$, l'hypothèse $x=9$ fournit une solution algébrique de cette équation.

2^e EXEMPLE. Soit (1) ... $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$;

on fait $\sqrt[3]{2-x} = y$, $\sqrt{x-1} = z$; d'où

(2) ... $y = 1 - z$, (3) ... $y^3 = 2 - x$, (4) ... $z^2 = x - 1$.

Pour éliminer y , on remplace y par sa valeur $1 - z$, et les équations (3), (4), deviennent

$$z^3 - 3z^2 + 3z - (x-1) = 0, \quad z^2 - (x-1) = 0.$$

Éliminant z entre ces deux dernières, on trouve

$$(x-1)(x^2 - 12x + 20) = 0; \text{ d'où } x=1, \quad x=2, \quad x=10.$$

§ IX. Des équations réciproques.

303. Lorsque α désignant une racine quelconque d'une équation, $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine, on dit que cette équation est *réciproque*.

Nous allons chercher les relations qui doivent exister entre les coefficients d'une équation pour qu'elle soit *RÉCIPROQUE*.

Afin de fixer les idées, considérons d'abord l'équation de degré impair (1) ... $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$.

Pour qu'elle soit *réciproque*, il faut et il suffit qu'en changeant x en $\frac{1}{x}$, la nouvelle équation

$$\frac{1}{x^5} + \frac{p}{x^4} + \frac{q}{x^3} + \frac{r}{x^2} + \frac{s}{x} + t = 0,$$

admette les mêmes racines que la proposée.

Multipliant par x^5 , divisant par t , et ordonnant suivant les puissances décroissantes de x , on obtient la transformée

$$(2) \dots x^5 + \frac{s}{t}x^4 + \frac{r}{t}x^3 + \frac{q}{t}x^2 + \frac{p}{t}x + \frac{1}{t} = 0.$$

Les équations (1), (2), devant avoir les mêmes racines, les coefficients des puissances semblables de x doivent être égaux dans les premiers membres de ces équations (n° 226, 6°). Les relations demandées sont donc

$$(3) \dots \frac{s}{t} = p, \quad \frac{r}{t} = q, \quad \frac{q}{t} = r, \quad \frac{p}{t} = s, \quad \frac{1}{t} = t,$$

La dernière donne $t^2 = 1$, d'où $t = +1$ et $t = -1$.

Substituant ces valeurs de t dans (3), on voit

que $t = +1$ donne $s = p, \quad r = q,$

et que $t = -1$ donne $s = -p, \quad r = -q.$

Ce qui conduit aux équations réciproques

$$(4) \dots x^5 + px^4 + qx^3 + qx^2 + px + 1 = 0,$$

$$(5) \dots x^5 + px^4 + qx^3 - qx^2 - px - 1 = 0.$$

Par conséquent : *Pour qu'une équation de degré impair soit RÉCIPROQUE, il faut et il suffit que les coefficients des termes également distans des extrêmes soient égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires.*

304. *Toute équation réciproque de degré impair a une racine égale à -1 ou à $+1$, selon que les coefficients des termes également distans des extrêmes sont égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires; et en divisant le premier membre par le facteur correspondant $x + 1$, ou $x - 1$, on obtient une équation réciproque de degré pair dans laquelle les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux et de même signe. En effet:*

1°. L'hypothèse $x = -1$ satisfait à l'équation (4); son premier membre est donc divisible par $x + 1$ (n° 221).

Pour faciliter cette division, on observe que l'équation (4) peut se mettre sous la forme

$$(x^5 + 1) + px(x^3 + 1) + qx^2(x + 1) = 0.$$

On a vu (n° 29) que les binômes $x^5 + 1$, $x^3 + 1$, sont divisibles par $x + 1$, et fournissent les quotiens $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $x^2 - x + 1$. Divisant donc le premier membre de la dernière équation par $x + 1$, ce qui ôte la racine -1 , et ordonnant le quotient, on parvient à l'équation réciproque

$$x^4 + (p - 1)x^3 + (1 - p + q)x^2 + (p - 1)x + 1 = 0.$$

REMARQUE. On pouvait prévoir que l'équation (4) aurait une racine égale à -1 , et que son premier membre divisé par $x + 1$ conduirait à une équation réciproque. En effet, les cinq racines de cette équation sont nécessairement de la forme $a, \frac{1}{a}, b, \frac{1}{b}, c$, et leur produit $a \times \frac{1}{a} \times b \times \frac{1}{b} \times c$, ou c , est égal au dernier terme $+1$ de l'équation (4) pris avec un signe contraire (n° 225); donc $c = -1$. D'ailleurs, si l'on égale à zéro le quotient du 1^{er} membre de l'équation (4) par $x + 1$, l'équation qui en résultera sera réciproque, puisque ses racines sont $a, \frac{1}{a}, b$ et $\frac{1}{b}$.

2°. L'hypothèse $x = 1$ satisfait à l'équation (5); son premier membre est donc divisible par $x - 1$.

Pour faciliter la division, on met l'équation (5) sous la forme

$$(x^5 - 1) + px(x^3 - 1) + qx^2(x - 1) = 0.$$

Les quotiens des binômes $x^5 - 1$, $x^3 - 1$, par $x - 1$, étant

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \text{ et } x^2 + x + 1 \text{ (n° 29),}$$

la dernière équation divisée par $x - 1$ conduit à l'équation réciproque

$$x^4 + (p + 1)x^3 + (1 + p + q)x^2 + (p + 1)x + 1 = 0.$$

Le principe est donc démontré.

365. Occupons-nous actuellement des équations de degré pair, et considérons l'équation

$$(1) \dots x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0.$$

Pour qu'elle soit réciproque, il faut et il suffit que si l'on y change x en $\frac{1}{x}$, l'équation transformée

$$\frac{1}{x^6} + \frac{p}{x^5} + \frac{q}{x^4} + \frac{r}{x^3} + \frac{s}{x^2} + \frac{t}{x} + u = 0,$$

admette les mêmes racines que la proposée.

Multipliant par x^6 , divisant par u , et ordonnant suivant les puissances décroissantes de x , on trouve

$$(2) \dots x^6 + \frac{t}{u}x^5 + \frac{s}{u}x^4 + \frac{r}{u}x^3 + \frac{q}{u}x^2 + \frac{p}{u}x + \frac{1}{u} = 0.$$

Les équations (1) et (2) devant avoir les mêmes racines, les coefficients des puissances semblables de x doivent être égaux; les relations demandées sont donc

$$(3) \dots \frac{t}{u} = p, \quad \frac{s}{u} = q, \quad \frac{r}{u} = r, \quad \frac{q}{u} = s, \quad \frac{p}{u} = t, \quad \frac{1}{u} = u.$$

La dernière donne $u^2 = 1$, d'où $u = \pm 1$.

Discutons ces deux valeurs de u .

Soit $u = +1$; les relations (3) s'accordent à donner $t = p$, $s = q$, $r = r$; et l'équation (1) devient

$$(4) \dots x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0.$$

Cette dernière équation est réciproque, quelles que soient les valeurs qu'on assigne aux coefficients p , q , r .

Soit $u = -1$. La relation $\frac{r}{u} = r$ devient $r = -r$, d'où $2r = 0$, $r = 0$; et les autres relations s'accordent à donner $t = -p$, $s = -q$; l'équation (1) devient

$$(5) \dots x^6 + px^5 + qx^4 - qx^2 - px - 1 = 0.$$

D'un autre côté, l'équation (4) étant réciproque, quel que soit r , on peut y faire $r = 0$, ce qui fournit l'équation réciproque (6) $\dots x^6 + px^5 + qx^4 + qx^2 + px + 1 = 0$.

Par conséquent : *Pour qu'une équation de degré pair soit réciproque, il faut et il suffit, si elle renferme le terme du milieu, que les coefficients des termes également distans des extrêmes soient égaux et de même signe; et si elle ne renferme pas le terme du milieu, il faut que les coefficients des termes également éloignés des extrêmes soient égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires.*

306. *Toute équation réciproque de degré pair, manquant du terme du milieu, et dans laquelle les coefficients des termes également distans des extrêmes sont égaux et de signes contraires, a une racine égale à +1 et une racine égale à -1; son premier membre divisé par le produit $x^2 - 1$ des facteurs $x - 1$, $x + 1$, correspondans aux racines +1, -1, conduit à une équation réciproque de degré pair qui est complète, et dans laquelle les coefficients des termes également distans des extrêmes sont égaux et de même signe.*

En effet, soit l'équation de cette espèce

$$(1) \dots x^6 + px^5 + qx^4 - qx^2 - px - 1 = 0.$$

Il est d'abord facile de voir qu'elle est satisfaite par chacune des hypothèses $x = +1$, $x = -1$, car les résultats

$$1 + p + q - q - p - 1, \quad 1 - p + q - q + p - 1,$$

sont identiquement nuls.

Pour faciliter la division du premier membre par $x^2 - 1$, on met l'équation proposée sous la forme

$$(2) \dots (x^6 - 1) + px(x^4 - 1) + qx^2(x^2 - 1) = 0.$$

Chacun des binomes $x^6 - 1$, $x^4 - 1$, est divisible exactement par $x^2 - 1$; car en faisant $x^2 = z$, ils deviennent $z^3 - 1$, $z^2 - 1$, et l'on a vu (n° 29) que ces deux derniers binomes divisés par $z - 1$, donnent les quotiens exacts $z^2 + z + 1$, $z + 1$; remplaçant z par x^2 , on voit que les quotiens des binomes $x^6 - 1$, $x^4 - 1$, par $x^2 - 1$, sont $x^4 + x^2 + 1$ et $x^2 + 1$.

Par conséquent, la division du premier membre de l'équation (2) par $x^2 - 1$ conduit à

$$(x^4 + x^3 + 1) + px(x^2 + 1) + qx^2 = 0, \text{ ou à}$$

$$(3) \dots x^4 + px^3 + (q+1)x^2 + px + 1 = 0.$$

Ce qui démontre les propriétés énoncées.

REMARQUE. On pouvait prévoir que le quotient du premier membre de l'équation proposée par $x^2 - 1$ conduirait à une équation réciproque. En effet, deux racines de l'équation (1) étant $+1$ et -1 , les quatre autres sont nécessairement de la forme $a, \frac{1}{a}, b, \frac{1}{b}$; or en divisant l'équation (1) par le produit $x^2 - 1$ des facteurs $x - 1, x + 1$, correspondans aux racines $+1, -1$, l'équation résultante aura pour racines $a, \frac{1}{a}, b, \frac{1}{b}$; elle sera donc réciproque.

307. Il est facile de conclure des propriétés que nous venons d'établir, que *la résolution d'une équation réciproque quelconque se réduit toujours à déterminer les racines d'une équation réciproque de degré pair, dans laquelle les coefficients des termes également distans des extrêmes sont égaux et de même signe.* En effet :

1°. Si l'équation proposée est d'un degré impair $2n + 1$, on pourra diviser son premier membre par $x + 1$ ou par $x - 1$, selon que le dernier terme sera $+1$ ou -1 , et le quotient égalé à zéro donnera une équation réciproque du degré pair $2n$, dans laquelle les coefficients des termes également distans des extrêmes seront égaux et de même signe, (n° 304).

2°. Si l'équation réciproque proposée étant d'un degré pair $2n$, les coefficients des termes également éloignés des extrêmes ne sont pas égaux et de même signe, il faudra nécessairement que ces coefficients soient égaux et de signes contraires, et que le terme du milieu (affecté de x^n) n'entre pas dans l'équation (n° 305). Dans ce cas, l'équation admettra les racines $+1, -1$, et son premier membre sera divisible exactement par $x^2 - 1$; le quotient égalé à zéro fournira une équation réciproque du degré pair $2n - 2$, qui déterminera les $2n - 2$ autres racines de l'équation proposée, et dans laquelle les coefficients

des termes également distans des extrêmes seront égaux et de même signe (n° 306).

Le principe énoncé est donc démontré.

308. La recherche des racines d'une équation réciproque quelconque, se trouvant ainsi réduite à la résolution d'une équation réciproque d'un degré pair $2n$ dans laquelle les coefficients des termes également distans des extrêmes sont égaux et de même signe, nous allons faire voir qu'il est toujours possible de faire dépendre la résolution de cette dernière équation de celle d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré.

Pour fixer les idées, considérons l'équation

$$(1) \dots x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0.$$

Cette équation étant réciproque, ses racines sont de la forme

$$a, \frac{1}{a}, b, \frac{1}{b}, c, \frac{1}{c}.$$

Or, pour ces six valeurs de x , la fonction $x + \frac{1}{x}$ n'a que les trois valeurs, $a + \frac{1}{a}$, $b + \frac{1}{b}$, $c + \frac{1}{c}$.

Posant donc $(2) \dots x + \frac{1}{x} = z$,

l'inconnue z n'aura que trois valeurs. Par conséquent, si l'on élimine x entre (1) et (2), l'équation finale en z sera du troisième degré; elle fournira les trois valeurs de z ; et en les substituant successivement dans (2), on obtiendra trois équations du second degré en x qui fourniront les six racines de l'équation (1).

Pour chaque valeur de z , l'équation (2) détermine deux racines réciproques de l'équation (1); car l'équation (2) revient à

$$(3) \dots x^2 - zx + 1 = 0,$$

et le dernier terme $+1$ de l'équation (3) exprimant le produit des deux racines de cette équation, si l'une de ces racines est a , l'autre sera $\frac{1}{a}$.

Pour simplifier les calculs relatifs à l'élimination de x entre (1) et (2), on observe que $x=0$ ne satisfaisant pas à l'équation (1), on ne change pas les racines de cette équation en divisant son premier membre par x^3 , ce qui conduit à

$$(5) \dots \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + p\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + q\left(x + \frac{1}{x}\right) + r = 0.$$

Il ne s'agit plus que d'exprimer les binômes qui entrent dans cette dernière équation, en fonction de z . On peut y parvenir en formant successivement le carré et le cube de la valeur $x + \frac{1}{x}$ de z ; car on trouve

$$z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, \quad \text{d'où} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2;$$

$$z^3 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3z; \quad \text{d'où}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z.$$

Substituant ces valeurs des binômes qui entrent dans (5), on trouve que l'équation finale en z est

$$(6) \dots z^3 + pz^2 + (q - 3)z + (r - 2p) = 0.$$

En général, lorsque l'équation proposée est du degré $2m$, en la divisant par x^m , on la ramène à la forme

$$(1) \dots \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + p\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \dots + k\left(x + \frac{1}{x}\right) + l = 0.$$

Pour résoudre cette dernière, on pose (2) $\dots x + \frac{1}{x} = z$; la fonction z n'ayant que m valeurs, dépend d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré, que l'on obtient en éliminant x entre (1) et (2). Cette élimination se réduit à exprimer les binômes qui entrent dans (1), en fonction de z . On y parviendrait en formant les puissances entières successives de l'expression $x + \frac{1}{x}$ de z ; mais on peut les obtenir par une formule très simple. En effet, la mul-

tiplication de $x^n + \frac{1}{x^n}$ par $x + \frac{1}{x}$ conduit à l'identité

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Remplaçant $x + \frac{1}{x}$ par z , on en déduit

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)z - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Cette dernière formule jouit de la propriété demandée; car en donnant successivement à n les valeurs 1, 2, 3, etc., et remplaçant les binômes qui entrent dans le second membre, par leurs valeurs en fonction de z , on trouve

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z, \text{ etc.}$$

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation réciproque

$$(1) \dots x^7 - 5x^6 + 8x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Une de ses racines est -1 .

Pour former l'équation qui détermine les autres racines, on divise le premier membre par $x + 1$; et en opérant comme il a été indiqué (page 472), on parvient à l'équation réciproque

$$(2) \dots x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 18x^2 + 14x - 6 = 0.$$

Pour résoudre cette dernière, on pose $x + \frac{1}{x} = z$, et afin d'éliminer plus facilement x , on divise tous les termes de (2) par x^3 , ce qui conduit à

$$(3) \dots \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 18 = 0.$$

Mais, $x + \frac{1}{x} = z$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z$.

Substituant ces valeurs dans (3), on parvient à

$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0; \text{ d'où } z = 1, z = 2, z = 3.$$

Or, $x + \frac{1}{x} = z$ donne (4)... $x = \frac{1}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - 4})$.

Si l'on met les valeurs de z dans la formule (4), les valeurs correspondantes de x seront

$$\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}), \quad 1 \pm 0, \quad \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}).$$

De sorte que les sept racines de l'équation (1) sont

$$-1, +1, +1, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}), \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}).$$

2^e EXEMPLE. Soit l'équation réciproque,

$$(5) \dots x^6 + 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 1 = 0.$$

Cette équation étant privée du terme du milieu, deux de ses racines sont $+1$ et -1 . Pour obtenir l'équation qui détermine les quatre autres racines, on divise le premier membre par le produit $x^2 - 1$ des facteurs $x - 1$, $x + 1$, correspondants aux racines $+1$, -1 ; et en opérant comme il a été indiqué (n^o 306), on trouve que l'équation demandée est

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Pour la résoudre, on pose $x + \frac{1}{x} = z$; et afin d'éliminer plus facilement z , on divise tous les termes par x^2 , ce qui conduit à

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0.$$

Or $x + \frac{1}{x} = z$ donne $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$;

l'équation finale en z est donc

$$(z^2 - 2) + 4z + 5 = 0; \text{ d'où } z = -1 \text{ et } z = -3.$$

Substituant ces valeurs de z dans (4), on trouve

$$x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}), \quad x = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5}).$$

REMARQUE. Les équations binomes $x^m - 1 = 0$, $x^m + 1 = 0$, étant réciproques, on peut les résoudre par les méthodes que nous venons d'exposer.

Par exemple, pour résoudre l'équation $x^4 + 1 = 0$, on divise d'abord ses termes par x^2 , ce qui donne

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 0. \text{ On pose } x + \frac{1}{x} = z; \text{ d'où}$$

$$(4) \dots x = \frac{1}{2} (z \pm \sqrt{z^2 - 4}) \text{ et } x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2.$$

L'équation $z^2 - 2 = 0$, donne $z = \pm \sqrt{2}$.

Substituant ces valeurs de z dans (4), on trouve que les racines de $x^4 + 1 = 0$, sont

$$\frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{-1}) \sqrt{2} \text{ et } \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{-1}) \sqrt{2}.$$

Les racines de $x^4 - 1 = 0$ sont ± 1 , $\pm \sqrt{-1}$, (page 465).

On verra de même que les racines de $x^5 - 1 = 0$ sont $+1$,

$$\frac{1}{4} \left\{ -1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{-2(5 + \sqrt{5})} \right\},$$

$$\frac{1}{4} \left\{ -1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-2(5 - \sqrt{5})} \right\}.$$

Ces racines prises avec des signes contraires expriment les racines de $x^5 + 1 = 0$; car $x^5 + 1 = 0$ se déduit de $x^5 - 1 = 0$, en changeant x en $-x$.

Les racines de $x^8 - 1 = 0$ sont déterminées par les équations $x^4 - 1 = 0$, $x^4 + 1 = 0$, car $x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1)$.

Enfin les racines de $x^{10} - 1 = 0$, dépendent des équations $x^5 - 1 = 0$, $x^5 + 1 = 0$, car $x^{10} - 1 = (x^5 - 1)(x^5 + 1)$.

CHAPITRE VIII.

PROBLÈMES.

§ 1^{er}. Questions relatives aux intérêts composés.

309. 1^{er} PROBLÈME. Déterminer combien le capital a francs vaudra dans t années ; en ayant égard aux intérêts composés d'année en année. L'intérêt de 100 francs par an est γ francs.

Nous supposons qu'on a pris les intérêts composés comme il a été indiqué (*Arith.*, n° 111, page 125) ; c'est-à-dire que si le temps t années est composé d'un nombre entier n d'années, et de m mois (m pouvant être entier ou fractionnaire, mais moindre que 12), on a eu égard aux intérêts des intérêts d'année en année pendant les n premières années ; et qu'on a placé ensuite le nouveau capital à intérêt simple pendant m mois. Cela posé :

L'intérêt de 1^{er} par an étant $\frac{\gamma}{100}$ francs,

1^{er} comptant vaut dans un an

$$\left(1 + \frac{\gamma}{100}\right) \text{ francs, ou } \left(\frac{100 + \gamma}{100}\right) \text{ francs, ou } 1^{\text{er}} \times \left(\frac{100 + \gamma}{100}\right).$$

Par conséquent, pour trouver combien une somme placée au commencement d'une année, vaut à la fin de cette année, il suffit de la multiplier par $\frac{100 + \gamma}{100}$.

Il en résulte que le capital a francs vaudra,

$$a \times \frac{100 + \gamma}{100} \text{ francs à la fin de la 1^{re} année,}$$

$$a \times \left(\frac{100 + \gamma}{100}\right)^2 \text{ francs à la fin de la 2^e année, ... , et}$$

$$a \times \left(\frac{100 + \gamma}{100}\right)^n \text{ francs à la fin de la } n^{\text{ième}} \text{ année.}$$

Il s'agit maintenant de trouver ce que cette dernière somme vaudra, lorsqu'on l'aura augmentée de ses intérêts simples pendant m mois. Or,

l'intérêt de 1^r en 1 mois est le 12^e de $\frac{\gamma}{100}$ francs, ou $\frac{\gamma}{1200}$;

l'intérêt de 1^r en m mois est donc $\frac{m\gamma}{1200}$ francs.

1^r payable à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année vaut donc m mois après, $1 + \frac{m\gamma}{1200}$ ou $\frac{1200 + m\gamma}{1200}$ francs.

Le capital α francs, qui valait $\alpha \left(\frac{100 + \gamma}{100}\right)^n$ à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année, vaudra donc dans n années m mois,

$$\alpha \left(\frac{100 + \gamma}{100}\right)^n \text{ fois } \frac{1200 + m\gamma}{1200} \text{ francs.}$$

Désignant donc par ζ francs la valeur cherchée du capital α francs après n années m mois, on aura

$$(1) \dots \zeta = \alpha \left(\frac{100 + \gamma}{100}\right)^n \times \left(\frac{1200 + m\gamma}{1200}\right).$$

Ce qui déterminera l'inconnue ζ .

La formule (1) donne le moyen de calculer l'une quelconque des quantités α , ζ , t , γ , quand les trois autres sont connues. On en déduit la solution des problèmes d'intérêt composé que nous avons traités dans l'Arithmétique.

Quand le temps t années est donné, on connaît n et m .

Lorsque ce temps est inconnu, on trouve n et m par une méthode analogue à celle qui a été exposée dans l'Arithmétique (31^e prob., pages 127 et 128).

Lorsque α , ζ , m et n étant donnés, on veut trouver le taux γ de l'argent, l'inconnue γ dépend de l'équation (1) qui est du $n + 1^{\text{ième}}$ degré. Cette équation ne peut admettre qu'une seule valeur réelle positive de γ ; car γ étant positif, le second membre augmente ou diminue en même temps que γ .

EXEMPLE. Trouver dans combien de temps le capital 480000 francs vaudra 564921 francs ; l'argent est à 5 pour 100.

On connaît $\alpha = 480000$, $\zeta = 564921$, $\gamma = 5$.

Le temps demandé t années (composé de n années m mois), étant compris entre n et $n+1$ années, la valeur de ζ est comprise entre $\alpha \left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^n$ et $\alpha \left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^{n+1}$, (*)

Par conséquent, si l'on pose

$$\zeta = \alpha \left(\frac{100+\gamma}{100}\right)^t,$$

la plus petite valeur entière approchée de t , tirée de cette équation, exprimera n .

Substituant les valeurs de α , ζ et γ , on trouve

$$564921 = 480000 (1,05)^t; \text{ d'où}$$

$$1564921 = 1480000 + t \times 1(1,05),$$

$$t = \frac{1564921 - 1480000}{1(1,05)} = \frac{0,07075}{0,02119} = 3,3 \text{ etc.}$$

Donc $n = 3$.

Pour déterminer m , on remplace α , ζ , γ et n par leurs valeurs, et la formule (1) donne

$$1200 + 5m = \frac{564921 \times 1200}{480000 \times (1,05)^3}.$$

On en déduit $m = 4$.

Si l'on fait usage des logarithmes, on aura

$$l(1200 + 5m) = 1564921 - 1480000 - 3l(1,05) + l1200.$$

Or, dans la recherche de n , on a déjà trouvé

(*) Cela résulte d'ailleurs de la formule (1), car elle revient à

$$\zeta = \alpha \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right)^n \left(1 + \frac{\gamma}{100} \times \frac{m}{12}\right),$$

et $\frac{m}{12}$ étant par l'hypothèse moindre que l'unité, cette valeur de ζ tombe entre $\alpha \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right)^n$ et $\alpha \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right)^{n+1}$.

$$564921 - 480000 = 0,07075, \quad l(1,05) = 0,02179.$$

D'ailleurs $l1200 = 3,07918$. On en déduit

$$l(1200 + 5m) = 3,08636 = l(1220), \quad 1200 + 5m = 1220, \quad m = 4.$$

Le temps cherché est donc 3 ans 4 mois.

2° PROBLÈME. Un particulier place a francs au commencement de la 1^{re} année, α_1 francs à la fin de la 1^{re} année, α_2 francs à la fin de la 2^e, ..., et enfin α_n francs à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année; l'intérêt annuel de 100 francs est γ francs, et on a égard aux intérêts composés d'année en année. Il s'agit de trouver la somme ζ francs qui sera due à ce particulier à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année.

D'après ce qu'on a vu (page 481); si l'on pose $\frac{100 + \gamma}{100} = b$, les $n + 1$ placements $a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, évalués à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année, vaudront respectivement

$$ab^n, \alpha_1 b^{n-1}, \alpha_2 b^{n-2}, \dots, \alpha_{n-1} b, \alpha_n; \text{ donc}$$

$$(1) \dots \zeta = ab^n + \alpha_1 b^{n-1} + \alpha_2 b^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} b + \alpha_n.$$

1^{er} EXEMPLE. Un particulier place a francs au commencement de la 1^{re} année, et α francs à la fin de chaque année; calculer la somme ζ francs qui lui sera due à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année.

On obtiendra la valeur de ζ en supposant dans la formule (1) que chacune des sommes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, est égale à α ; ce qui conduira à

$$\zeta = \frac{a(b^{n+1} - 1)}{b - 1}.$$

2° EXEMPLE. Un particulier place a francs au commencement de la 1^{re} année, et prélève δ francs à la fin de chaque année. Combien restera-t-il à ce particulier après n années.

Si l'on remplace chacune des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, par $-\delta$, la valeur correspondante de ζ exprimera la fortune du particulier à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année; on trouvera

$$(2) \dots \zeta = ab^n - \frac{\delta(b^n - 1)}{b - 1}.$$

Selon que cette valeur de f sera positive ou nulle ou négative, le particulier possédera C francs, ou ne possédera rien, ou devra C francs, à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année.

3^e EXEMPLE. Un particulier qui doit a francs, voudrait s'acquitter au moyen de n paiemens égaux effectués à la fin de chaque année. Calculer la valeur de chaque paiement.

On fera $C = 0$ dans la formule (2), la valeur correspondante de d exprimera l'inconnue du problème actuel; on trouvera

$$(3) \dots d = \frac{(b-1)ab^n}{b^n - 1}.$$

La formule (3) donne la solution des problèmes relatifs aux annuités.

Soient, $a = 11000$, $n = 2$, $\gamma = 20$;

on en déduit $b = \frac{6}{5}$, et la formule (3) conduit à $d = 7200$.

Ce qui s'accorde avec le résultat que l'on a obtenu (*Arith.*, 32^e problème, pages 128 et 129).

§ II. Problèmes qui dépendent de la théorie des progressions.

310. 3^e PROBLÈME. Deux progressions croissantes, l'une arithmétique, l'autre géométrique, ont le même premier terme 7, et le même nombre de termes; la raison de la 1^{re} progression est 5; la somme des termes de la 1^{re} progression, ajoutée à la somme des termes de la 2^e, donne 183; et en retranchant la 1^{re} somme de la 2^e, le reste est 111. Il s'agit de trouver ces progressions.

Cela se réduit à déterminer le nombre n des termes de chaque progression, et la raison q de la progression géométrique.

Les termes des deux progressions demandées sont

$$\begin{array}{ccccccc} 7, & 7+5, & 7+5 \times 2, & 7+5 \times 3, & \dots, & 7+5(n-1), \\ 7, & 7 \times q, & 7 \times q^2, & 7 \times q^3, & \dots, & 7 \times q^{n-1}. \end{array}$$

Or, d'après les formules connues,

$$s = \frac{n}{2} (a + s), \quad s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (\text{pages 268 et 272}),$$

la somme des termes de la première progression est

$$\frac{n}{2} \{ 7 + 7 + 5(n-1) \}, \quad \text{ou} \quad \frac{n}{2} (9 + 5n),$$

la somme des termes de la seconde progression est $\frac{7(q^n - 1)}{q - 1}$.

Il faut donc que

$$(1) \dots \frac{7(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{1}{2} n(9 + 5n) = 183,$$

$$(2) \dots \frac{7(q^n - 1)}{q - 1} - \frac{1}{2} n(9 + 5n) = 111.$$

Pour éliminer q , on retranche la 2^e équation de la 1^{re}, ce qui conduit à

$$n(9 + 5n) = 72; \quad \text{d'où} \quad n = 3 \quad \text{et} \quad n = -\frac{24}{5}.$$

Le nombre n des termes devant être entier et positif, on ne doit prendre que $n = 3$. Substituant cette valeur de n dans l'une quelconque des équations (1), (2), et divisant $q^3 - 1$ par $q - 1$, on parvient à

$$q^3 + q - 20 = 0; \quad \text{d'où} \quad q = 4 \quad \text{et} \quad q = -5.$$

Par conséquent, la progression arithmétique demandée est

$$\div 7.12.17,$$

et il y a deux progressions géométriques qui satisfont à la question, savoir

$$\div \div 7 : 28 : 112 \quad \text{et} \quad \div \div 7 : -35 : +175.$$

4^e PROBLÈME. Un nombre est formé de plusieurs chiffres qui composent, à partir du chiffre de l'ordre le plus élevé, une progression arithmétique croissante dont la raison est 2; la somme des chiffres de ce nombre est 25, et le nombre des produits distincts que ces chiffres peuvent fournir en les multipliant

deux à deux est égal à la somme des deux chiffres extrêmes. On propose de déterminer ce nombre.

Soit x le premier chiffre à gauche du nombre cherché, et supposons que ce nombre contienne n chiffres, les valeurs de ces n chiffres seront :

$$x, x+2, x+4, x+6, \dots, x+2(n-1),$$

leur somme sera $[2x + 2(n-1)] \times \frac{1}{2}n$, ou $n(x+n-1)$;

le nombre de leurs produits deux à deux sera $\frac{1}{2}n(n-1)$,

et la somme des chiffres extrêmes se réduira à $2x + 2(n-1)$.

On devra donc avoir,

$$(1) \dots n(x+n-1) = 25, \quad (2) \dots \frac{1}{2}n(n-1) = 2(x+n-1).$$

Pour éliminer x , on égale les deux valeurs de $x+n-1$ tirées de (1) et (2), ce qui conduit à

$$n^3 - n^2 - 100 = 0.$$

La seule racine réelle de cette équation étant 5, on fait $n=5$ dans (1) ou (2), ce qui donne $x=1$. Le nombre demandé est donc 13579. Il est facile de s'assurer que ce nombre satisfait à toutes les conditions du problème.

5^e PROBLÈME. Déterminer la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

Soient $a, b, c, d, \dots, k, l$, les termes de la progression, et δ la raison; on a

$$b=a+\delta, \quad c=b+\delta, \quad d=c+\delta, \dots, \quad l=k+\delta; \quad \text{d'où}$$

$$b^m = a^m + ma^{m-1}\delta + \frac{1}{2}m(m-1)a^{m-2}\delta^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)a^{m-3}\delta^3 + \text{etc.},$$

$$c^m = b^m + mb^{m-1}\delta + \frac{1}{2}m(m-1)b^{m-2}\delta^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)b^{m-3}\delta^3 + \text{etc.},$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$l^m = k^m + mk^{m-1}\delta + \frac{1}{2}m(m-1)k^{m-2}\delta^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)k^{m-3}\delta^3 + \text{etc.}$$

Ajoutant ces équations membre à-membre, et désignant par

$S_m, S_{m-1}, S_{m-2}, \text{etc.}$, les sommes des puissances $m, m-1, m-2, \text{etc.}$, des termes de la progression, on trouve

$$S_{m-1} = S_m - l^m + m\delta(S_{m-1} - l^{m-1}) + \frac{m}{2}(m-1)\delta^2(S_{m-2} - l^{m-2}) + \text{etc.};$$

d'où

$$(1) \dots S_{m-1} = l^{m-1} + \frac{1}{m\delta}(l^m - a^m) - \frac{(m-1)\delta}{2}(S_{m-2} - l^{m-2}) - \text{etc.}$$

Cette dernière formule fait dépendre S_{m-1} des puissances inférieures $S_{m-2}, S_{m-3}, \dots, S_2, S_1, S_0$.

Donnant successivement à m les valeurs 1, 2, etc., on trouve

$$S_0 = 1 + \frac{1}{\delta}(l - a), S_1 = l + \frac{l^2 - a^2}{2\delta} - \frac{1}{2}\delta(S_0 - 1), \text{etc.};$$

ce qui détermine les sommes $S_0, S_1, \text{etc.}$, en fonction du premier terme a , du dernier terme l , et de la raison δ .

Pour exprimer $S_0, S_1, \text{etc.}$, au moyen de a , de δ , et du nombre n des termes de la progression, il suffit de remplacer l par sa valeur $a + (n-1)\delta$, (page 268).

EXEMPLE. Soit proposé de calculer les sommes des puissances entières successives des n premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., $n-1, n$.

Dans ce cas, $a = 1, \delta = 1, l = n$; et la formule (1) conduit à

$$S_{m-1} = n^{m-1} + \frac{(n^m - 1)}{m} - \left(\frac{m-1}{2}\right)(S_{m-2} - n^{m-2}) - \text{etc.}$$

Donnant successivement à m les valeurs 1, 2, 3, 4; etc., on trouve

$$(2) \dots S_0 = n, S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}; \text{etc.}$$

On voit que la somme des cubes des nombres 1, 2, 3, ..., n , est égale au carré de la somme de ces nombres.

Soit $n = 5$, les relations (2) donnent

$$S_1 = 15, S_2 = 55, S_3 = 225 = 15^2 = S_1^2.$$

6^e PROBLÈME. Calculer le nombre des boulets contenus dans une FILE dont la base est un triangle équilatéral ABC (fig. 1),

ou un rectangle ABCD (fig. 3), ou un carré ABCD (fig. 4); tous les boulets se touchent et sont de même diamètre.

1°. Considérons la pile triangulaire SABC (fig. 1) ; pour calculer le nombre des boulets contenus dans cette pile, on la divise en tranches horizontales à partir du sommet S, on obtient les tranches représentées (fig. 2) (*); la première tranche contient un seul boulet S, la seconde *xy* en renferme $1 + 2$ ou 3, la troisième *abc* en contient $1 + 2 + 3$ ou 6, ..., et en général, la $n^{\text{ième}}$ tranche est composée de $1 + 2 + \dots + n$ boulets.

Les nombres 3, 6, ..., $1 + 2 + \dots + n$, etc., ont reçu le nom de *nombres triangulaires*, parce qu'ils expriment combien il faut prendre de cercles égaux et tangens pour qu'on puisse disposer ces cercles en forme de *triangle* (fig. 2).

Le nombre des boulets de la pile SABC (fig. 1), étant $1 + 3 + 6 + 10 + 15$ ou 35, on formerait des piles triangulaires en prenant $1 + 3$, ou $1 + 3 + 6$, ou $1 + 3 + 6 + 10$ boulets.

Les nombres $1 + 3$, $1 + 3 + 6$, etc., s'appellent des *nombres pyramidaux*, parce qu'ils expriment le nombre de sphères égales et tangentes qu'on peut disposer en *pyramide triangulaire*.

Les nombres de boulets contenus dans ces piles sont faciles à déterminer. En effet, en partant du sommet S, (fig. 1 et 2),

la 1^{re} tranche contient..... 1 boulet S,

la 2^e tranche *xy* en contient..... $1 + 2$,

la 3^e tranche *abc* en contient..... $1 + 2 + 3$,

⋮

⋮

la $(n-1)^{\text{ième}}$ en contient..... $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$.

Ajoutant les nombres contenus dans chaque colonne verticale, et désignant par X_{n-1} le nombre total de boulets des $n-1$ tranches, on voit que

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= (n-1) \text{ fois } 1 + (n-2) \text{ fois } 2 + (n-3) \text{ fois } 3 + \dots + \{n-(n-1)\} \text{ fois } (n-1) \\ &= n \{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\} - \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2\}. \end{aligned}$$

(*) La figure (2) représente les cinq sections horizontales faites dans la pyramide SABC (fig. 1), par des plans menés par les centres des boulets.

Lorsqu'on prend une tranche de plus, le nombre total des boulets des n tranches s'obtient en remplaçant n par $n+1$ dans X_{n-1} , ce qui conduit à

$$X_n = (n+1) \cdot (1+2+3+\dots+n) \div (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2).$$

Substituant pour $1+2+3+\dots+n$ et $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$, leurs valeurs $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, (page 488), on trouve

$$(1) \dots X_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Le nombre n des tranches est égal au nombre des boulets du côté AB de la pile SABC.

EXEMPLE. Soit la pile triangulaire SABC (fig. 1), composée des cinq tranches indiquées (fig. 2). On a $n=5$; la formule (1) donne $X_5=35$. Et en effet, les cinq tranches contiennent $1+3+6+10+15$ ou 35 boulets.

REMARQUE. Le nombre X des boulets contenus dans la pile tronquée abcABC (fig. 1), se déduit de la formule (1). En effet, désignons par m le nombre des boulets du côté ab de la tranche supérieure abc ; le côté ac de la tranche $ac\gamma$ immédiatement supérieure renfermant $m-1$ boulets, on obtient le nombre des boulets de la pile $Sac\gamma$ en remplaçant n par $m-1$ dans la formule (1); la différence entre les nombres de boulets des piles SABC, $Sac\gamma$, exprimant X , on trouve

$$(2) \dots X = \frac{1}{6} \{ n(n+1)(n+2) - (m-1)m(m+1) \}.$$

m et n sont les nombres de boulets des côtés ab , AB, des deux bases du tronc.

EXEMPLE. Soit la pile triangulaire tronquée abcABC (fig. 1), composée des trois tranches, abc , $a'b'c'$, ABC, (fig. 2). On a $m=3$, $n=5$; la formule (2) donne $X=31$.

Et en effet, les tranches abc , $a'b'c'$, ABC, contenant respectivement 6, 10 et 15 boulets, le nombre total de ces boulets est $6+10+15$ ou 31.

2°. Pour calculer le nombre Y_n des boulets contenus dans la pile rectangulaire EFABCD (fig. 3), nous désignerons par $\delta + 1$ le nombre des boulets de la file supérieure EF, et par n le nombre des tranches horizontales. Les faces latérales de la pile sont deux triangles équilatéraux EAD, FBC, et deux trapèzes EFBA, EFCD. La file supérieure EF contenant $\delta + 1$ boulets, la deuxième tranche $a'b'e'd'$ est un rectangle dont les côtés $a'b'$, $b'e'$, renferment respectivement $\delta + 2$ boulets et 2 boulets; il y a donc $(\delta + 2) \times 2$ boulets dans cette tranche; la troisième en contient $(\delta + 3) \times 3, \dots$; enfin, la $n^{\text{ième}}$ et dernière tranche ABCD renferme $(\delta + n)n$ boulets; les côtés AD, AB, contiennent respectivement n et $n + \delta$ boulets. On a donc

$$Y_n = (\delta + 1) \times 1 + (\delta + 2) \times 2 + (\delta + 3) \times 3 + \dots + (\delta + n) \times n \\ = \delta(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Remplaçant $1 + 2 + 3 + \dots + n$ et $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, par leurs valeurs $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, (page 488), on trouve

$$Y_n = \frac{1}{6}n(n+1)(3\delta + 2n + 1).$$

Dans cette formule, δ marque le nombre des boulets moins un de la file EF, et n représente le nombre des boulets du plus petit côté AD de la base inférieure.

Si l'on veut exprimer Y_n en fonction des nombres de boulets des côtés AD, AB, de la base inférieure, on fera $n + \delta = m$, d'où $\delta = m - n$.

Les côtés AD, AB, contiendront respectivement n et m boulets, et en remplaçant δ par $m - n$, on trouvera

$$(3) \dots Y_n = \frac{1}{6}n(n+1)(3m - n + 1).$$

EXEMPLE. Soit la pile rectangulaire EFABCD (fig. 3), composée de cinq tranches horizontales de boulets. On a

$$AD = n = 5, \quad AB = m = 8,$$

et la formule (3) donne $Y_5 = 100$.

Il est facile de vérifier l'exactitude de ce résultat; car la file supérieure EF renfermant 4 boulets, les côtés $a'b'$, $a'd'$, de la deuxième tranche contiennent respectivement 5 boulets et 2 boulets; de sorte que cette tranche est composée de 5×2 boulets. Par une raison semblable, la troisième tranche contient $(5+1) \times (2+1)$ ou 6×3 boulets; la quatrième en contient $(6+1) \times (3+1)$ ou 7×4 , et la cinquième en contient... $(7+1) \times (4+1)$ ou 8×5 .

Le nombre total de ces boulets est donc

$$4 + 5 \times 2 + 6 \times 3 + 7 \times 4 + 8 \times 5, \text{ ou } 100.$$

REMARQUE. Le nombre Y des boulets contenus dans une pile quadrangulaire tronquée $abcdABCD$ (fig. 3) se déduit de la formule (3), car il suffit de prendre la différence entre les nombres de boulets des piles EFABCD, $EFa'b'c'd'$.

Désignons par n' et m' les nombres de boulets des côtés ad , ab , de la base supérieure du tronc; les nombres de boulets des côtés $a'd'$, $a'b'$, de la base de la pile $EFa'b'c'd'$, seront $n'-1$ et $m'-1$; on obtiendra donc le nombre des boulets de cette dernière pile en remplaçant dans la formule (3), n et m par $n'-1$ et $m'-1$; ce qui donnera

$$(4) \dots Y = \frac{1}{6} \{ n(n+1)(3m-n+1) - (n'-1)n'(3m'-n'-1) \}.$$

Dans cette formule, n , m , n' et m' , sont les nombres de boulets des côtés AD, AB, ad , ab , des deux bases de la pile tronquée. Or,

$$AB = d + n = m, \quad ab = d + n' = m'; \text{ donc } m - n = m' - n';$$

Cette dernière relation donne le moyen d'éliminer de la formule (4), l'une quelconque des quantités n , m , n' , m' .

EXEMPLE. Soit la pile tronquée $abcdABCD$ (fig. 3), composée de trois tranches horizontales de boulets, on a

$$n = AD = 5, \quad m = AB = 8, \quad n' = ad = 3, \quad m' = ab = 6.$$

La formule (4) donne $Y = 100 - 14 = 86$.

Et en effet, le nombre des boulets contenus dans les trois tranches qui composent la pile $abcdABCD$ est

$$3 \times 6 + 4 \times 7 + 5 \times 8 \text{ ou } 86.$$

3°. Enfin, pour déterminer le nombre des boulets contenus dans une pile $SABCD$ (fig. 4), ou dans un tronc de pile $abcdABCD$, dont la base est un quarré $ABCD$, il suffit de faire $m = n$ et $m' = n'$, dans les formules (3) et (4); elles donnent

$$(5) \dots Y_s = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), Y = \frac{1}{6} \{ n(n+1)(2n+1) - (n'-1)n'(2n'-1) \}.$$

La pile $SABCD$ est terminée par un seul boulet, car on a $d = m - n = 0$, et la file EF (fig. 3) contient $d+1$ boulets.

EXEMPLE. Soient les deux piles $SABCD$, $abcdABCD$ (fig. 4), on a $n = 5$, $n' = 3$; les formules (5) donnent,

$$Y_s = 55, \quad Y = 50.$$

Et en effet, si l'on évalue les tranches qui composent ces piles, on verra que

$$Y_s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55, \quad Y = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50.$$

§ III. Questions relatives à la théorie générale des Équations.

311. 7° PROBLÈME. Déterminer les diviseurs du $n^{\text{ième}}$ degré du polynome (1) $\dots x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \dots + ax + t$, que nous désignerons par $f(x)$.

Ces diviseurs étant de la forme

$$x^s + ax^{s-1} + bx^{s-2} + cx^{s-3} + \dots + kx + l,$$

on divise $x^n + px^{n-1} + \text{etc.}$, par $x^s + ax^{s-1} + \text{etc.}$; ce qui conduit à un reste de la forme

$$Ax^{s-1} + Bx^{s-2} + Cx^{s-3} + \dots + Kx + L.$$

Ce reste devant être nul quel que soit x , les n équations

$$(2) \dots A = 0, B = 0, C = 0, \dots, K = 0, L = 0,$$

détermineront les n coefficients inconnus, $a, b, c, \dots, k, l$; chaque solution du système des équations (2) donnera un des diviseurs demandés.

Le nombre de ces diviseurs est

$$N = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

car le polynôme $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$, étant le produit de m facteurs du premier degré, tous les produits n à n de ces facteurs sont les diviseurs cherchés.

Par conséquent, si l'on élimine entre les équations (2) toutes les inconnues $a, b, c, \dots, k, l$, excepté une, l'équation finale sera du degré N .

1^{er} EXEMPLE. Calculer tous les diviseurs du premier degré du polynôme (1) $\dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx + t$.

Les diviseurs cherchés sont de la forme $x - a$, et l'on a démontré (n° 220) que la division du polynôme (1) par $x - a$ conduit au reste $f(a)$. Les racines de l'équation $f(a) = 0$, étant les mêmes que celles de $f(x) = 0$, on voit qu'il suffit de chercher les m racines $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_m$, de cette dernière équation; les diviseurs demandés sont

$$x - a_1, x - a_2, x - a_3, x - a_4, x - a_5, \dots, x - a_m.$$

2^e EXEMPLE. Calculer les diviseurs du second degré du polynôme (1) $\dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx + t$.

On divise ce polynôme par $x^2 + ax + b$; ce qui conduit à un reste de la forme $Ax + B$; les équations (2) $\dots A = 0, B = 0$, déterminent les inconnues a, b . Le nombre de ces diviseurs étant $\frac{1}{2}m(m-1)$, l'élimination d'une des inconnues a, b , entre les équations (2), conduira généralement à une équation du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$.

$$1^{\circ}. \text{ Soit } f(x) = x^3 - 2x - 4.$$

Les équations (2) $\dots A = 0, B = 0$, deviennent

$$(3) \dots a^3 - b - 2 = 0, \quad ab - 4 = 0;$$

l'élimination de b conduit à

$$a^3 - 2a - 4 = 0; \text{ d'où } a = 2, \quad a = -1 \pm \sqrt{-1}.$$

Supposant $a = 2$, les équations (3) donnent $b = 2$; ce qui fournit le diviseur du second degré $x^2 + 2x + 2$.

La division de $x^3 - 2x - 4$ par $x^2 + 2x + 2$, détermine le quotient exact $x - 2$.

$$2^\circ. \text{ Soit } f(x) = x^4 + x^3 + 2x + 6.$$

Les équations (2)... $A = 0$, $B = 0$, deviennent

$$2 + 2ab - a - a^3 = 0, \quad b^2 - (a^2 + 1)b + 6 = 0.$$

Une des solutions réelles de ces équations est $a = -2$, $b = 3$; ce qui détermine le diviseur $x^2 - 2x + 3$.

La division de $f(x)$ par $x^2 - 2x + 3$, fournit le quotient exact $x^2 + 2x + 2$; et les équations $x^2 - 2x + 3 = 0$, $x^2 + 2x + 2 = 0$, donnent les quatre racines

$$x = 1 \pm \sqrt{-2}, \quad x = -1 \pm \sqrt{-1} \text{ de } f(x) = 0.$$

312. 8^e PROBLÈME. Une racine α de l'équation $f(x) = 0$, satisfait à une condition donnée $\phi(\alpha) = 0$; déterminer cette racine.

Les équations $f(\alpha) = 0$, $\phi(\alpha) = 0$, devant admettre une même valeur de α , on cherche le plus grand commun diviseur $F(\alpha)$ entre $f(\alpha)$ et $\phi(\alpha)$; l'équation à une seule inconnue $F(\alpha) = 0$, détermine α (n^o 274).

EXEMPLE. Soient

$$f(x) = x^4 - 2x - 12 = 0, \quad \phi(\alpha) = \alpha^3 + 3\alpha - 14 = 0.$$

On a $f(\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha - 12$.

Le plus grand commun diviseur entre $f(\alpha)$ et $\phi(\alpha)$, est $F(\alpha) = \alpha - 2$; et l'équation $\alpha - 2 = 0$, détermine la racine demandée $\alpha = 2$.

9^e PROBLÈME. Deux racines α , β , de l'équation $f(x) = 0$, satisfont à une relation donnée $\phi(\alpha, \beta) = 0$; calculer ces racines.

Les racines cherchées doivent satisfaire aux conditions

$$(1) \dots f(\alpha) = 0, \quad (2) \dots f(\beta) = 0, \quad (3) \dots \phi(\alpha, \beta) = 0,$$

et toute solution commune à ces trois dernières équations jouit de la propriété demandée.

Pour découvrir ces solutions communes, on élimine ζ entre (2) et (3), ce qui conduit à une équation (4)... $F(\alpha) = 0$; les équations (1) et (4) devant admettre une même valeur de α , on obtiendra cette valeur en cherchant le plus grand commun diviseur A entre $f(\alpha)$ et $F(\alpha)$; l'équation $A = 0$ déterminera α .

Pour obtenir la valeur de ζ correspondante à une valeur particulière δ de α tirée de $A = 0$, on fait $\alpha = \delta$ dans $\varphi(\alpha, \zeta) = 0$, ce qui donne $\varphi(\delta, \zeta) = 0$; d'ailleurs $f(\zeta) = 0$. La valeur cherchée de ζ devant satisfaire à ces deux dernières équations, on cherche le plus grand commun diviseur B , fonction de ζ , entre $\varphi(\delta, \zeta)$ et $f(\zeta)$; l'équation $B = 0$ détermine les valeurs de ζ correspondantes à $\alpha = \delta$.

REMARQUE. Lorsque l'équation $\varphi(\delta, \zeta) = 0$ n'est que du premier ou du second degré, on peut éviter de calculer le plus grand commun diviseur entre $\varphi(\delta, \zeta)$ et $f(\zeta)$; car toute valeur de ζ , tirée de $\varphi(\delta, \zeta) = 0$, convient à la question si elle réduit $f(\zeta)$ à zéro.

1^{re} EXEMPLE. Soit

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0, \quad \varphi(\alpha, \zeta) = \zeta - \alpha + 1 = 0.$$

On a

$$f(\alpha) = \alpha^3 - 4\alpha^2 + \alpha + 6 = 0, \quad f(\zeta) = \zeta^3 - 4\zeta^2 + \zeta + 6 = 0.$$

Il s'agit de trouver les valeurs de α et ζ qui satisfont au système de ces trois dernières équations.

L'élimination de ζ entre $\varphi(\alpha, \zeta) = 0$, $f(\zeta) = 0$, conduit à

$$F(\alpha) = \alpha^3 - 7\alpha^2 + 12\alpha = 0.$$

Pour trouver le plus grand commun diviseur A entre $f(\alpha)$ et $F(\alpha)$, on supprime d'abord dans $F(\alpha)$ le facteur α qui est premier avec $f(\alpha)$, et la question se réduit à chercher le plus grand commun diviseur A entre $\alpha^3 - 4\alpha^2 + \alpha + 6$ et $\alpha^2 - 7\alpha + 12$; on trouve $A = \alpha - 3$; l'équation $\alpha - 3 = 0$, donne $\alpha = 3$.

Pour calculer la valeur de ζ correspondante à $\alpha = 3$, on fait $\alpha = 3$ dans $\varphi(\alpha, \zeta) = 0$, ce qui donne $\zeta - 2 = 0$; d'où $\zeta = 2$. Cette valeur de ζ réduisant $f(\zeta)$ à zéro, on voit que les racines cherchées sont $\alpha = 3$, $\zeta = 2$.

2^e EXEMPLE. On sait que l'équation

$$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0,$$

a deux racines égales et de signes contraires; il s'agit de trouver ces racines.

La relation $\phi(a, \zeta) = 0$, devient $a + \zeta = 0$. On a

$$f(a) = a^4 + a^3 - 7a^2 - a + 6 = 0,$$

$$f(\zeta) = \zeta^4 + \zeta^3 - 7\zeta^2 - \zeta + 6 = 0.$$

Pour éliminer ζ , on tire ζ de la relation $a + \zeta = 0$, ce qui donne $\zeta = -a$; et la substitution de la valeur $-a$ de ζ dans $f(\zeta) = 0$, donne

$$F(a) = a^4 - a^3 - 7a^2 + a + 6 = 0.$$

On cherche le plus grand commun diviseur A entre $f(a)$ et $F(a)$, et l'on trouve $A = a^2 - 1$; l'équation $a^2 - 1 = 0$ donne $a = +1$ et $a = -1$; les valeurs correspondantes de ζ , déduites de $a + \zeta = 0$, sont $\zeta = -1$, $\zeta = +1$. Chacune de ces valeurs de ζ satisfaisant à l'équation $f(\zeta) = 0$, on voit que les racines demandées sont $+1$ et -1 .

REMARQUE. On peut parvenir plus simplement aux valeurs de a qui conviennent au système $f(a) = 0$, $F(a) = 0$; car il donne

$$f(a) + F(a) = 2(a^4 - 7a^2 + 6) = 0,$$

$$f(a) - F(a) = 2a(a^2 - 1) = 0,$$

et l'équation $a^2 - 1 = 0$, fournit les deux valeurs $+1$, -1 , de a qui conviennent au système $f(a) = 0$, $F(a) = 0$.

3^e EXEMPLE. La différence entre deux racines inconnues a, ζ , de l'équation $f(x) = x^3 - 13x + 12 = 0$, est 2; trouver ces racines.

$$\text{On a } f(a) = a^3 - 13a + 12 = 0, f(\zeta) = \zeta^3 - 13\zeta + 12 = 0.$$

La relation $\phi(a, \zeta) = 0$, devient $\zeta - a - 2 = 0$; d'où $\zeta = a + 2$.

Substituant cette valeur de ζ dans $f(\zeta) = 0$, on trouve

$$F(a) = a^3 + 6a^2 - a - 6 = 0.$$

Le plus grand commun diviseur entre $f(a)$ et $F(a)$ est

$A = a - 1$. L'équation $A = 0$ donne $a = 1$; la valeur correspondante de ζ , déduite de $\zeta = a + 2$, est $\zeta = 3$. De sorte que les racines cherchées de $x^3 - 13x + 12 = 0$, sont $+1$ et $+3$; la troisième racine est $0 - (1 + 3)$ ou -4 (page 367, 5^e).

10^e PROBLÈME. On sait que les trois racines de l'équation

$$(1) \dots f(x) = x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$$

sont en progression arithmétique; il s'agit de trouver ces racines.

Les racines cherchées étant de la forme $a, a + \delta, a + 2\delta$, les relations du n^o 225 donnent

$$a + (a + \delta) + (a + 2\delta) = 15,$$

$$a(a + \delta) + a(a + 2\delta) + (a + \delta)(a + 2\delta) = 71.$$

Ces deux équations se réduisent à

$$a + \delta = 5, \quad 3a^2 + 6\delta a + 2\delta^2 = 71.$$

Pour en déduire les inconnues a, δ , on tire de la première équation, $\delta = 5 - a$; et en substituant cette valeur de δ dans la deuxième équation, on parvient à

$$a^2 - 10a + 21 = 0; \quad \text{d'où} \quad a = 7 \text{ et } a = 3;$$

les valeurs correspondantes de δ , déduites de $\delta = 5 - a$, sont $\delta = -2, \delta = +2$.

Chacun de ces deux systèmes détermine les mêmes racines 3, 5, 7, de l'équation (1).

11^e PROBLÈME. On sait qu'une équation du même degré $f(x) = 0$, a n racines qui forment une progression arithmétique dont la raison est une quantité donnée δ ; il s'agit de trouver ces n racines.

Si a désigne la plus petite des n racines cherchées, les $n - 1$ autres seront $a + \delta, a + 2\delta, \dots, a + (n - 1)\delta$, et on aura $f(a) = 0, f(a + \delta) = 0, f(a + 2\delta) = 0, \dots, f(a + n\delta - \delta) = 0$.

L'hypothèse $x = a$ réduisant à zéro les n fonctions

$$f(x), \quad f(x + \delta), \quad f(x + 2\delta), \dots, f(x + n\delta - \delta),$$

elles sont nécessairement divisibles par $x-a$; et par conséquent, si l'on cherche leur plus grand commun diviseur, ce diviseur égalé à zéro donnera $x=a$. Connaissant a et δ , on en déduira les $n-1$ autres racines $a+\delta, a+2\delta, \dots, a+(n-1)\delta$.

EXEMPLE. Soient, $n=3, \delta=2$, et

$$f(x) = x^3 - 13x^2 + 41x - 210 = 0.$$

On trouve que le plus grand commun diviseur des fonctions $f(x), f(x+2), f(x+4)$, est $x-3$; et l'équation $x-3=0$ détermine la racine $+3$ de $f(x)=0$; les deux autres racines demandées sont $3+2$ et $3+4$. La somme des trois racines 3, 5, 7, étant 15, la quatrième racine est $13-15$ ou -2 .

Lorsque les m racines de l'équation

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx + t = 0$$

forment une progression arithmétique dont la raison est une quantité connue δ , ces racines sont de la forme

$$a, a+\delta, a+2\delta, \dots, a+(m-1)\delta;$$

leur somme est $\frac{1}{2}m\{2a+(m-1)\delta\}$ (n° 147); et cette somme devant être égale à $-p$ (n° 225), on a

$$\frac{1}{2}m\{2a+(m-1)\delta\} = -p; \text{ d'où } (1) \dots a = -\frac{1}{2}(m-1)\delta - \frac{p}{m}.$$

EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0,$$

dont les racines forment une progression arithmétique ayant 2 pour raison; on aura $m=3, \delta=2, p=-15$, et la formule (1) donnera $a=3$. De sorte que les trois racines de l'équation $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ sont 3, 5 et 7.

313. 12^e PROBLÈME. On propose d'exprimer qu'une équation a deux racines égales et de signes contraires.

Soit l'équation

$$(1) \dots x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + qx^2 + rx + sx + t = 0.$$

Si l'on désigne par $+a$ et $-a$ les deux racines dont il s'a-

git, on aura

$$(2) \dots a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + Ca^{m-3} + \dots + qa^1 + ra^0 + sa + t = 0,$$

$$(3) \dots a^m - Aa^{m-1} + Ba^{m-2} - Ca^{m-3} + \dots \mp qa^1 \pm ra^0 \mp sa \pm t = 0,$$

et on prendra les signes supérieurs ou inférieurs, selon que m sera un nombre pair $2n$ ou un nombre impair $2n + 1$.

Les équations (2), (3), devant avoir des solutions communes, il faut que leurs premiers membres admettent un commun diviseur. Si l'on continue les calculs relatifs à la recherche du plus grand commun diviseur, jusqu'à ce qu'on parvienne à un diviseur du second degré, ce diviseur sera de la forme $a^2 - a$, et le reste correspondant sera indépendant de a ; on exprimera que l'équation (1) a deux racines égales et de signes contraires en égalant ce reste à zéro.

On peut simplifier les calculs précédents. En effet, supposons d'abord que m soit un nombre pair $2n$; les équations (2), (3), auront le même dernier terme $+t$; si on les ajoute membre à membre, et si on les retranche ensuite l'une de l'autre, on obtiendra le système équivalent

$$(4) \dots a^{2n} + Ba^{2n-2} + \dots + ra^2 + t = 0,$$

$$(5) \dots (Aa^{2n-1} + Ca^{2n-3} + \dots + qa^2 + s)a = 0.$$

Le dernier terme t n'étant pas supposé nul, on peut ôter le facteur a contenu dans l'équation (5), car l'hypothèse $a = 0$ ne satisfait pas à l'équation (4); si l'on supprime ce facteur, et si l'on pose ensuite $a^2 = x$, la question sera réduite à trouver les valeurs de x qui satisfont au système

$$(6) \dots \begin{cases} x^n + Bx^{n-1} + \dots + rx + t = 0, \\ Ax^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + qx + s = 0. \end{cases}$$

Pour y parvenir, on cherche le plus grand commun diviseur entre les premiers membres des équations (6), et on continue les calculs jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste R indépendant de x ; la condition nécessaire pour que l'équation (1) admette deux racines égales et de signes contraires est $R = 0$; le reste $\phi(x)$ qui précède R , devient le plus grand commun diviseur

des premiers membres des équations (6); et chaque valeur α de z , tirée de $\phi(z) = 0$, fournit deux racines $+\sqrt{\alpha}$, $-\sqrt{\alpha}$, de l'équation (1), car la relation $\alpha^2 = z$ donne $\alpha = \pm\sqrt{z}$.

EXEMPLE. Soit l'équation

$$(7) \dots x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

On a
$$\begin{aligned} \alpha^4 + A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D &= 0, \\ \alpha^4 - A\alpha^3 + B\alpha^2 - C\alpha + D &= 0; \end{aligned}$$

et en opérant comme il a été indiqué, on parvient aux équations

$$z^2 + Bz + D = 0, \quad Az + C = 0.$$

Pour chercher le plus grand commun diviseur entre les premiers membres de ces deux dernières équations, on multiplie $z^2 + Bz + D$ par A^2 , et le produit, divisé par $Az + C$, conduisant au reste $C^2 + DA^2 - ABC$, la relation qui exprime que l'équation (7) a deux racines égales et de signes contraires, est

$$(8) \dots C^2 + DA^2 - ABC = 0.$$

Quand A, B, C, D , satisfont à cette dernière condition, l'équation $Az + C = 0$ détermine une valeur α de z , et les racines demandées sont $+\sqrt{\alpha}$, $-\sqrt{\alpha}$.

On peut parvenir plus directement à la relation (8), car il suffit d'exprimer que $Az + C$ divise $z^2 + Bz + D$; ce qui revient à tirer de $Az + C = 0$, la valeur $-\frac{C}{A}$ de z , et à mettre cette valeur dans $z^2 + Bz + D = 0$.

Si l'on suppose $A = 1$, $B = -7$, $C = -1$, la relation (8) donnera $D = 6$; on aura $z = 1$, $\alpha = \pm 1$; l'équation (7) deviendra $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$, et cette dernière admet les racines $+1, -1$; ce qui s'accorde avec le 2^e exemple (p. 497).

Lorsque l'équation $\phi(z) = 0$ est du $n^{\text{ième}}$ degré, l'équation (1) admet n couples de racines égales deux à deux et de signes contraires.

On opère d'une manière semblable quand l'équation (1) est de degré impair.

13^e PROBLÈME. Déterminer les relations qui doivent exister entre les coefficients de l'équation

$$(1) \dots x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \dots + kx + l = 0,$$

pour que toutes les racines de cette équation soient égales entre elles.

1^{re} SOLUTION. Chacune des m racines devant être égale à une quantité inconnue $-a$, les relations du n^o 225 donnent

$$(2) \dots a = ma, b = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2, c = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3, \dots, k = ma^{m-1}, l = a^m.$$

La première équation donne $a = \frac{l}{m}$, et la substitution de cette valeur de a dans les $m-1$ autres équations (2), conduit aux relations demandées

$$(3) \dots \begin{cases} b = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{a}{m}\right)^2, \\ c = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{a}{m}\right)^3, \dots, k = m \left(\frac{a}{m}\right)^{m-1}, l = \left(\frac{a}{m}\right)^m. \end{cases}$$

Quand ces $m-1$ relations ont lieu, toutes les racines de l'équation (1) sont égales à $-\frac{a}{m}$. De sorte qu'on peut donner des valeurs arbitraires au coefficient a .

REMARQUE. Si chacune des m racines de l'équation (1) devait être égale à un nombre donné $-a$, les équations (2) exprimeraient les m relations demandées.

2^e SOLUTION. Le polynôme $x^m + ax^{m-1} + \dots + kx + l$, doit être égal au développement de $(x+a)^m$, et on a vu (n^o 127) que ce développement est

$$x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \dots + m a^{m-1} x + a^m.$$

Les coefficients des mêmes puissances de x devant être égaux dans ces deux polynômes, on en déduit les équations (2), et l'élimination de l'inconnue a conduit aux relations (3) demandées.

3^e SOLUTION. La racine $m^{i\text{ème}}$ de $x^m + ax^{m-1} + \dots$ devant être de la forme $x+a$, on calcule les deux premiers termes

$x + \frac{a}{m}$ de cette racine (n° 139); le reste correspondant

$$\left\{ b - \frac{m(m-1)a^2}{1 \cdot 2 \cdot m^2} \right\} x^{m-2} + \left\{ c - \frac{m(m-1)(m-2)a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^3} \right\} x^{m-3} + \text{etc.},$$

devant être nul quel que soit x , il faut que les coefficients des diverses puissances de x soient séparément nuls; ce qui fournit les relations (3) demandées.

4° SOLUTION. Le polynôme $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.}$, devant être de la forme $(x+a)^m$, sa dérivée $mx^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + \text{etc.}$ doit être égale à $m(x+a)^{m-1}$, (n° 248). Or, le quotient de $(x+a)^m$ par $m(x+a)^{m-1}$ est $\frac{x+a}{m}$ ou $\frac{x}{m} + \frac{a}{m}$; le quotient de

$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.}$, par $mx^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + \text{etc.}$, ne doit donc avoir que deux termes. Si l'on détermine les deux premiers termes $\frac{x}{m} + \frac{a}{m^2}$ de ce dernier quotient, le reste correspondant

$$\frac{2}{m} \left\{ b - \frac{m(m-1)a^2}{1 \cdot 2 \cdot m^2} \right\} x^{m-2} + \frac{3}{m} \left\{ c - \frac{ab(m-2)}{3m} \right\} x^{m-3} + \text{etc.},$$

devra être nul quel que soit x ; ce qui exige que les coefficients des diverses puissances de x soient séparément nuls. On en déduit les relations (3) demandées.

5° SOLUTION. Soit $f(x) = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + kx + l$.

Le polynôme $f(x)$ devant être égal à $(x+a)^m$, il résulte du principe du n° 249 que ses dérivées successives

$$f'(x) = mx^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + (m-2)bx^{m-3} + \text{etc.},$$

$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2} + (m-1)(m-2)ax^{m-3} + (m-2)(m-3)bx^{m-4} + \text{etc.},$$

$$\vdots$$

$$f^{m-1}(x) = m(m-1)(m-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot x + (m-1)(m-2)(m-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a,$$

doivent contenir respectivement les facteurs $(x+a)^{m-1}$, $(x+a)^{m-2}$, ..., $(x+a)$. Par conséquent, si l'on pose

$f^{m-1}(x) = 0$, la valeur $x = -\frac{a}{m}$ tirée de cette équation, sera

égale à $-a$; de sorte que $\alpha = \frac{a}{m}$. Or, l'hypothèse $x = -\frac{a}{m}$ doit réduire à zéro chacune des fonctions $f^{m-2}(x), f^{m-3}(x), \dots, f''(x), f'(x), f(x)$; on fera donc $x = -\frac{a}{m}$ dans ces $(m-1)$ fonctions de x , les résultats égaux à zéro conduiront aux relations (3).

14^e PROBLÈME. Déterminer les relations qui doivent exister entre les coefficients $a, b, \dots, k, l$, de l'équation

$$(1) \dots x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + kx + l = 0,$$

pour que n racines de cette équation soient égales entre elles.

Le polynôme $x^m + ax^{m-1} + \dots$, doit être le produit du développement de $(x+a)^n$ par un polynôme entier de la forme $x^{m-n} + px^{m-n-1} + \dots + sx + t$; par conséquent, si l'on effectue ce produit, et si on l'ordonne suivant les puissances décroissantes de x , on obtiendra un résultat de la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Kx + L,$$

qui devra être identiquement égal à

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + kx + l.$$

Il faudra donc que

$$(2) \dots A = a, B = b, \dots, K = k, L = l.$$

Pour en déduire les relations demandées, on élimine les $m-n+1$ inconnues $\alpha, p, \dots, s, t$, entre les m équations (2); ce qui conduit à $n-1$ équations de condition entre les m coefficients $a, b, \dots, k, l$. On peut donc assigner des valeurs arbitraires à $m-(n-1)$ coefficients de l'équation (1); les $n-1$ équations de condition donnent les valeurs correspondantes des $n-1$ autres coefficients de l'équation (1), et pour ces valeurs des m coefficients $a, b, \dots, k, l$, l'équation (1) admet nécessairement n racines égales entre elles.

REMARQUE. Le principe du n° 249 conduit à un plus grand nombre d'équations de condition. En effet, le polynôme

$x^m + ax^{m-1} + \text{etc.}$, devant admettre le facteur $(x+a)^n$, le plus grand commun diviseur entre ce polynôme et sa dérivée $mx^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + \text{etc.}$, doit être $(x+a)^{n-1}$; cherchant ce plus grand commun diviseur, on parviendra à un diviseur $A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + \dots + K'x + L'$; le reste correspondant, $Mx^{n-2} + Nx^{n-3} + \dots + Px + Q$, devant être nul quel que soit x , il faut d'abord que les m coefficients $a, b, \dots, k, l$, satisfassent aux $n-1$ conditions

$$(3) \dots M=0, N=0, \dots, P=0, Q=0;$$

et ces conditions ne paraissent pas suffisantes, puisque toutes les racines de l'équation

$$(4) \dots A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + \dots + K'x + L' = 0$$

devant être égales entre elles, on obtiendra $n-2$ autres équations entre $a, b, \dots, k, l$, (13^e Problème); ce qui fournira en tout $2n-3$ conditions, au lieu des $n-1$ conditions que l'on avait obtenues.

Pour lever cette difficulté, observons que les $n-1$ équations (3), qui expriment qu'il y a un commun diviseur du degré $n-1$ entre le polynôme $x^m + ax^{m-1} + \text{etc.}$ et sa dérivée, s'appliquent nécessairement au cas général où les $n-1$ facteurs $(x-a_1), (x-a_2), \dots, (x-a_{n-1})$, de ce diviseur sont inégaux; ce qui correspond au cas général où le premier membre de l'équation (1) contient les $2n-2$ facteurs égaux deux à deux,

$$(x-a_1)^2, (x-a_2)^2, \dots, (x-a_{n-1})^2;$$

de sorte que cette équation est de la forme

$$(5) \dots \{(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_{n-1})\}^2 \times R = 0.$$

Quand on suppose ensuite que les $n-1$ racines $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ de l'équation (4) sont égales entre elles, on obtient $n-2$ nouvelles conditions (13^e Problème); l'équation (5) devient

$$\{(x-a_1)^{n-1}\}^2 \times R = 0, \text{ ou } (x-a_1)^{2n-2} \times R = 0;$$

de sorte que l'ensemble des $2n-3$ conditions qui en résultent, exprime que l'équation (1) proposée a $2n-2$ racines égales, et

non pas seulement qu'elle en a n ; le dernier procédé devait donc conduire à $2n-3$ équations de condition (13^e Problème); on ne peut donc pas en faire usage pour résoudre le problème proposé.

Cette remarque mérite toute l'attention des élèves.

15^e PROBLÈME. *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients des équations à une seule inconnue*

$$(1) \dots x^n + Px^{n-1} + \text{etc.} = 0, \quad x^n + px^{n-1} + \text{etc.} = 0,$$

pour que ces équations admettent α solutions communes.

Il s'agit d'exprimer que les polynômes $x^n + Px^{n-1} + \text{etc.}$, $x^n + px^{n-1} + \text{etc.}$, ont un plus grand commun diviseur du degré α . A cet effet, on continue les calculs du n^o 215 jusqu'à ce qu'on parvienne à un diviseur du degré α ,

$$ax^\alpha + bx^{\alpha-1} + cx^{\alpha-2} + \dots + kx + l;$$

le reste correspondant

$$Ax^{\alpha-1} + Bx^{\alpha-2} + Cx^{\alpha-3} + \dots + Kx + L$$

devant être nul quel que soit x , les relations demandées sont

$$(2) \dots A=0, B=0, C=0, \dots, K=0, L=0.$$

Quand ces α relations sont satisfaites, l'équation

$$(3) \dots ax^\alpha + bx^{\alpha-1} + cx^{\alpha-2} + \dots + kx + l = 0$$

détermine les α valeurs de x qui satisfont au système (1).

EXEMPLE. On propose d'exprimer que les équations

$$(4) \dots x^3 + Qx + R = 0, \quad x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

admettent deux solutions communes.

On divise $x^3 + Qx + R$ par $x^3 + px^2 + qx + r$, ce qui donne le reste $-px^2 + (Q-q)x + (R-r)$; la division de $p^2(x^3 + px^2 + qx + r)$ par ce reste, conduit au reste du premier degré

$$\{p^2Q + (Q-q)^2 + p(R-r)\}x + p^2R + (Q-q)(R-r).$$

Ce dernier reste devant être nul quel que soit x , les relations demandées sont

$$(5) \dots p^2Q + (Q-q)^2 + p(R-r) = 0, \quad p^2R + (Q-q)(R-r) = 0.$$

On peut donc donner des valeurs arbitraires à trois des coefficients Q, R, p, q, r ; les équations (5) fournissent les valeurs correspondantes des deux autres coefficients, et ensuite les deux solutions du système (4) sont fournies par l'équation

$$(6) \dots -px^2 + (Q-q)x + (R-r) = 0.$$

Soient $Q = -19, R = -30, q = 1;$

les équations (4), (5), (6), se réduisent à

$$(7) \dots x^3 - 19x - 30 = 0, \quad x^3 + px^2 + x + r = 0,$$

$$(8) \dots p(r+30) = 400 - 19p^2, \quad 2(r+30) = 3p^2,$$

$$(9) \dots px^2 + 20x + (r+30) = 0.$$

Les relations (8) déterminent les trois systèmes

$$\begin{array}{l} p = +4 \\ r = -6 \end{array} \parallel \begin{array}{l} p = -10 \\ r = 120 \end{array} \parallel \begin{array}{l} p = -\frac{20}{3} \\ r = \frac{110}{3} \end{array}.$$

Chacun de ces systèmes, substitué dans (7), fournit deux équations du troisième degré qui ont deux racines communes, et ces deux racines se déduisent de l'équation (9).

Ainsi, pour $p = 4$ et $r = -6$, les équations (7) deviennent

$$(10) \dots x^3 - 19x - 30 = 0, \quad x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0;$$

et l'équation (9), qui se réduit à $x^2 + 5x + 6 = 0$, donne les deux valeurs $x = -2, x = -3$, qui satisfont au système (10).

REMARQUE. On pouvait prévoir qu'il y aurait trois manières d'introduire deux solutions communes aux équations (7); car ces équations revenant à

$$(x+2)(x+3)(x-5) = 0, \quad x^3 + px^2 + x + r = 0,$$

il y a trois manières de déterminer les coefficients p, r , de telle sorte que deux des racines $-2, -3, +5$, de la première équation, conviennent à la seconde.

Si $x = -2$ et $x = -3$ doivent satisfaire à $x^3 + px^2 + x + r = 0$,

on aura

$$-8+4p-2+r=0, \quad -27+9p-3+r=0; \text{ d'où } p=4, \quad r=-6.$$

Lorsqu'on demande que les α solutions communes aux équations (1) soient égales entre elles, il faut que les α racines de l'équation (3) soient égales entre elles; ce qui fournit $\alpha-1$ autres relations entre les coefficients des équations proposées.

16^e PROBLÈME. On propose d'exprimer qu'un polynôme du second degré en x et y , est décomposable en deux facteurs rationnels du premier degré.

Si le polynôme donné est

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e,$$

ses deux facteurs rationnels du premier degré seront de la forme

$$y - mx - n, \quad y - m'x - n'.$$

Leur produit

$$y^2 - (m + m')xy + mm'x^2 - (n + n')y + (mn' + nm')x + nn',$$

devant être identique avec le polynôme donné, on a

$$m + m' = -a, \quad mm' = b, \quad n + n' = -c, \quad mn' + nm' = d, \quad nn' = e.$$

Éliminant m, m', n, n' , entre ces cinq dernières équations, on parvient à l'équation de condition

$$(ae - 2d)^2 = (a^2 - 4b)(c^2 - 4e);$$

elle se réduit à $d^2 - acd = 4be - a^2e - bc^2$.

Quand les coefficients a, b, c, d, e , satisfont à cette condition, le polynôme donné est décomposable en deux facteurs $y - mx - n, y - m'x - n'$, et les valeurs des quatre inconnues m, n, m', n' , se déduisent de quatre quelconques des cinq équations

$$m + m' = -a, \quad mm' = b, \quad n + n' = -c, \quad mn' + nm' = d, \quad nn' = e.$$

Si l'on demandait que le polynôme fût un carré, il faudrait que l'on eût $m' = m$ et $n' = n$; les équations précédentes deviendraient

$$2m = -a, \quad m^2 = b, \quad 2n = -c, \quad 2mn = d, \quad n^2 = e.$$

Éliminant m et n , on parviendrait aux trois conditions

$$ac = 2d, \quad a^2 = 4b, \quad c^2 = 4e.$$

314. 17^e PROBLÈME. On propose de transformer l'équation

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx + t = 0,$$

en une autre $f(y) = 0$, qui ne renferme pas une puissance donnée de y .

On fait $x = y + a$ dans (1), et l'on développe les diverses puissances de $y + a$ suivant les puissances décroissantes de y ; le résultat est de la forme

$$(2) \dots y^m + Py^{m-1} + Qy^{m-2} + \dots + Sy + T = 0;$$

et l'on a

$$P = ma + p, \quad Q = \frac{1}{2} m(m-1)a^2 + (m-1)pa + q, \dots,$$

$$S = ma^{m-1} + (m-1)pa^{m-2} + (m-2)qa^{m-3} + \dots + s,$$

$$T = a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} + \dots + sa + t.$$

L'indéterminée a entrant dans tous les coefficients $P, Q, \dots, S, T$, servira à faire disparaître la puissance indiquée de y .

Quand il s'agit de faire disparaître le second terme, on égale son coefficient P à zéro; ce qui donne

$$ma + p = 0, \quad a = -\frac{p}{m}, \quad x = y - \frac{p}{m}.$$

Par conséquent : Pour faire disparaître le second terme d'une équation $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + sx + t = 0$, il suffit d'égaliser l'inconnue à une nouvelle inconnue augmentée du coefficient du second terme pris avec un signe contraire et divisé par l'exposant m du premier terme.

Et en effet, soient $a, b, \dots, k$, les racines de l'équation (1), et $a', b', \dots, k'$, celles de l'équation (2), on aura (n^o 225),

$$p = -(a + b + \dots + k), \quad P = -(a' + b' + \dots + k').$$

Or, la relation $y = x + \frac{p}{m}$ fait voir que les racines de l'équa-

tion (2) sont égales à celles de l'équation (1) augmentées de $\frac{P}{m}$; donc

$$a' = a + \frac{P}{m}, \quad b' = b + \frac{P}{m}, \quad \dots, \quad k' = k + \frac{P}{m};$$

ajoutant ces m égalités, on trouve

$$(a' + b' + \dots + k') = (a + b + \dots + k) + m \text{ fois } \frac{P}{m}, \quad \text{on}$$

$$-P = -p + m \times \frac{P}{m} = -p + p = 0.$$

Le coefficient P de y^{m-1} est donc zéro.

EXEMPLE. Soit proposé de faire disparaître le second terme de l'équation

$$x^3 + 6x^2 - 4x + 2 = 0; \quad \text{on pose } x = y - \frac{6}{3} = y - 2;$$

et la transformée

$$(y - 2)^3 + 6(y - 2)^2 - 4(y - 2) + 2 = 0$$

$$\text{se réduit à } y^3 - 16y + 26 = 0.$$

Si l'on veut faire disparaître le troisième terme de l'équation (2), on égalera son coefficient Q à zéro; l'équation qui détermine a étant du second degré, donnera deux valeurs de a . De sorte qu'il y a deux manières de faire disparaître le troisième terme.

En général, quand on veut faire disparaître le $n^{\text{ième}}$ terme, c'est-à-dire le terme affecté de y^{m-n+1} , l'équation qui détermine a est du degré $n - 1$.

Enfin, s'il s'agit de faire disparaître le dernier terme, on sera conduit à résoudre l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré,

$$a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} + \dots + sa + t = 0,$$

qui a les mêmes racines que l'équation (1).

On pouvait prévoir ce résultat. En effet, la valeur cherchée de a devant réduire à zéro le dernier terme T de l'équation (2), il faut que $y = 0$ satisfasse à cette équation; or la valeur correspondante de a , déduite de la relation $x = y + a$, est $a = x$;

on doit donc prendre pour a une quelconque des valeurs de x qui satisfont à l'équation (1).

Il est facile de trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients de l'équation (1) pour qu'une même valeur de l'indéterminée a fasse disparaître à la fois plusieurs termes de l'équation (2); car cela revient à exprimer qu'une même valeur de a réduit à zéro les coefficients des termes qu'on veut faire disparaître.

Par exemple, soit proposé de faire disparaître le deuxième et le troisième terme; il faut que la valeur $-\frac{P}{m}$ de a , tirée de $P=0$, réduise Q à zéro; substituant cette valeur de a dans $Q=0$, on trouve que la relation demandée est $2mq = (m-1)p^2$.

S'il s'agit de l'équation

$$(3) \dots x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

la relation $2mq = (m-1)p^2$ donnera $q = \frac{1}{3}p^2$, et l'équation (3) deviendra

$$(4) \dots x^3 + px^2 + \frac{1}{3}p^2x + r = 0.$$

En faisant $x = y - \frac{p}{3}$ dans (4), la transformée est

$$y^3 + \left(r - \frac{1}{27}p^3\right) = 0.$$

Soient $p=6$, $r=7$; l'équation (4) devient

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 7 = 0,$$

et en faisant $x = y - 2$, la transformée est $y^3 - 1 = 0$.

Cette dernière donne

$$y = 1, \quad y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}), \quad (\text{page 465});$$

les valeurs correspondantes de x sont

$$x = -1, \quad x = \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{-3}).$$

Pour faire disparaître le second terme et le dernier, on pose $P=0$, $T=0$; la première équation donne $\alpha = -\frac{P}{m}$, et la substitution de cette valeur de α dans $T=0$, conduit à la relation demandée

$$\left(-\frac{P}{m}\right)^m + p\left(-\frac{P}{m}\right)^{m-1} + q\left(-\frac{P}{m}\right)^{m-2} + \dots + s\left(-\frac{P}{m}\right) + t = 0.$$

18^e PROBLÈME. Transformer l'équation (1)... $f(x)=0$, en une équation (2)... $F(y)=0$, telle que x et y satisfassent à une relation donnée (3)... $\varphi(x, y)=0$.

L'élimination de x entre (1) et (3) conduit à l'équation (2) demandée.

1^{er} EXEMPLE. On demande que toutes les racines de l'équation (2) soient égales à celles de l'équation (1) diminuées de h .

Dans ce cas, la relation (3) devient $y=x-h$; et en remplaçant x par $h+y$, l'équation (1) donne l'équation cherchée

$$(4) \dots f(h) + yf'(h) + \frac{1}{2}y^2f''(h) + \dots + y^m = 0, \text{ (n}^\circ \text{ 250).}$$

Si l'on veut que toutes les racines réelles de l'équation (4) soient négatives, on prendra pour h la limite supérieure des racines positives de l'équation (1).

2^e EXEMPLE. On demande que toutes les racines de l'équation (2) soient égales à celles de l'équation (1) augmentées de h .

On pose $y=x+h$, d'où $x=y-h$.

Pour obtenir la transformée en y , il suffit de changer le signe de h dans (4), ce qui donne

$$(5) \dots f(-h) + yf'(-h) + \frac{1}{2}y^2f''(-h) + \dots + y^m = 0.$$

Lorsqu'on demande que toutes les racines réelles de l'équation (5) soient positives, on prend pour h la limite supérieure des racines négatives de l'équation (1).

Au moyen de cette dernière transformation, la recherche des

CHAPITRE VIII.

513

racines réelles positives et négatives de l'équation (1), se réduit à calculer les racines réelles positives de l'équation (5).

Ainsi, pour transformer l'équation

$$(6) \dots x^3 - 7x + 6 = 0,$$

en une autre dont toutes les racines réelles soient positives, on cherche la limite supérieure des racines négatives de l'équation (6), cette limite est -4 (n° 236); on pose

$$y = x + 4, \text{ d'où } x = y - 4;$$

et en substituant cette valeur de x dans (6), on obtient l'équation demandée

$$(7) \dots y^3 - 12y^2 + 41y - 30 = 0,$$

dont toutes les racines sont nécessairement positives.

Et en effet, les racines de l'équation (6) étant $+1, +2, -3$, la relation $y = x + 4$ fait voir que les racines de l'équation (7) sont $+5, +6$ et $+1$.

3° EXEMPLE. On veut que toutes les racines de l'équation (2) soient égales à celles de l'équation (1), multipliées par un nombre donné a .

La relation (3) $\dots \varphi(x, y) = 0$ devient $y = ax$; pour éliminer x , on remplace x par sa valeur $\frac{y}{a}$; l'équation (1) donne l'équation demandée $f\left(\frac{y}{a}\right) = 0$.

315: 19° PROBLÈME. On propose de former une équation $\varphi(y) = 0$, dont les racines soient les différentes sommes qu'on peut former en ajoutant deux à deux les racines de l'équation du même degré (1) $\dots f(x) = 0$.

Si l'on raisonne comme dans le n° 294, et, si l'on désigne par z et z' deux racines quelconques de l'équation (1), on sera conduit à éliminer z et z' entre les trois équations

$$f(z) = 0, \quad f(z') = 0, \quad y = z' + z;$$

l'équation finale $F(y) = 0$ aura pour racines, non-seulement

les sommes $a+b$, $b+a$, $a+c$, $c+a$, etc., des m racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation (1), mais en outre les doubles $a+a$, $b+b, \dots, k+k$, de ces racines; car la relation $y=z'+z$ détermine ces m^2 valeurs de y , en mettant successivement pour z' et z chacune des m racines $a, b, c, \dots, k$. Le premier membre $F(y)$ sera donc le produit des m^2 facteurs

$$\begin{aligned} & y-(a+b), \quad y-(a+c), \dots, y-(a+k), \text{ etc.,} \\ & y-(b+a), \quad y-(c+a), \dots, y-(k+a), \text{ etc.,} \\ & y-2a, \quad y-2b, \quad y-2c, \dots, y-2k; \end{aligned}$$

ce qui revient au produit des facteurs

$$\{y-(a+b)\}^2, \{y-(a+c)\}^2, \dots, \{y-(a+k)\}^2, \text{ etc.,} \\ y-2a, \quad y-2b, \quad y-2c, \dots, y-2k.$$

$$\text{Or, } \varphi(y) = \{y-(a+b)\} \{y-(a+c)\} \dots \{y-(a+k)\}.$$

$$\text{Donc } F(y) = \{\varphi(y)\}^2 \times (y-2a)(y-2b) \dots (y-2k).$$

Pour supprimer dans $F(y)$, les *facteurs étrangers* $y-2a$, $y-2b, \dots, y-2k$, on forme l'équation dont les racines sont les doubles des racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation (1); et à cet effet, on pose $y=2x$, d'où $x=\frac{1}{2}y$; la substitution de cette

valeur de x dans (1), donne l'équation demandée $f\left(\frac{1}{2}y\right)=0$

la division de $F(y)$ par $f\left(\frac{1}{2}y\right)$, fournit le quotient $\{\varphi(y)\}^2$,

et la racine quarrée de ce quotient est le premier membre de l'équation demandée $\varphi(y)=0$, qui a pour racines les $\frac{1}{2}m(m-1)$ sommes $a+b$, $a+c$, $b+c$, etc., des m racines de l'équation (1).... $f(x)=0$.

REMARQUE. On peut préparer les équations

$$f(z)=0, \quad f(z')=0, \quad y=z'+z,$$

de manière que l'élimination de z et z' conduise directement à l'équation $\varphi(y)=0$; à cet effet, on remplace d'abord z'

par sa valeur $y - z$; il reste à éliminer z entre

$$f(z) = 0 \quad \text{et} \quad f(y - z) = 0,$$

ou ce qui revient au même, à éliminer x entre

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(y - x) = 0.$$

Pour débarrasser ce dernier système des m valeurs étrangères $2a, 2b, 2c, \dots, 2k$, de y , correspondantes à $y = 2x$, on lui substitue le système équivalent

$$f(x) = 0, \quad f(y - x) - f(x) = 0;$$

or, le polynôme $f(y - x) - f(x)$ est divisible par $y - 2x$, car la valeur $y = 2x$ le rend identiquement nul; effectuant donc cette division, on supprime les m valeurs étrangères $2a, 2b, 2c, \dots, 2k$, de y , correspondantes à $y = 2x$; et si l'on désigne le quotient par $F_1(x, y)$, l'élimination de x entre les équations $f(x) = 0$, $F_1(x, y) = 0$, conduira directement à l'équation demandée $\phi(y) = 0$, dont les $\frac{1}{2}m(m-1)$ racines sont les différentes sommes, $a + b$, $a + c$, etc.

EXEMPLE. Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

On trouve $F_1(x, y) = x^2 - yx + y^2 - 2y - 1 = 0$.

Pour éliminer x entre ces deux équations, on divise $f(x)$ par $F_1(x, y)$, ce qui donne le quotient $x + y - 2$ et le reste $-y^3 + 4y^2 - 3y = \phi(y)$. On a

$$(2) \dots f(x) = F_1(x, y) \times (x + y - 2) + \phi(y).$$

Les racines 0, 1, 3, de l'équation $-y^3 + 4y^2 - 3y = 0$, sont les sommes que l'on obtient en ajoutant deux à deux les racines +1, -1, +2, de $f(x) = 0$.

On peut observer que pour chaque valeur ϵ de y tirée de $\phi(y) = 0$, l'équation $F_1(x, y) = 0$, détermine les deux racines de $f(x) = 0$ dont la somme est ϵ ; car la somme des deux racines de $F_1(x, \epsilon) = x^2 - \epsilon x + \epsilon^2 - 2\epsilon - 1 = 0$ est égale à ϵ (n° 225), et $y = \epsilon$ réduisant $\phi(y)$ à zéro, la relation (2)

démontre que les valeurs de x tirées de $F_1(x, y) = 0$ sont des racines de $f(x) = 0$.

20^e PROBLÈME. Déterminer l'équation $\phi(y) = 0$, dont les racines sont tous les différents produits deux à deux des m racines $a, b, c, \dots, i, k$, de l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré (1) $\dots f(x) = 0$.

Si z et z' désignent deux racines quelconques de l'équation (1), on sera conduit à éliminer z et z' entre les trois équations

$$f(z) = 0, f(z') = 0, z \times z' = y.$$

La dernière équation donne $z' = \frac{y}{z}$; et en substituant cette valeur de z' dans $f(z') = 0$, il ne reste qu'à éliminer z entre

$$f(z) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{y}{z}\right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, à éliminer x entre

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$

l'équation finale $F(y) = 0$, à laquelle on parviendra, aura pour racines les m^2 valeurs

$$ab, ba, ac, ca, bc, cb, \dots, ik, ki, a^2, b^2, c^2, \dots, i^2, k^2,$$

qui se déduisent de la relation $y = zz'$ en donnant successivement à z et z' chacune des m valeurs $a, b, c, \dots, i, k$.

Or, $ab = ba, ac = ca, bc = cb, \dots, ik = ki$; donc

$$F(y) = \{\phi(y)\}^2 \times (y - a^2)(y - b^2) \dots (y - k^2) = 0.$$

Pour supprimer les m valeurs étrangères $a^2, b^2, \dots, k^2$, on forme l'équation dont les racines sont $a^2, b^2, \dots, k^2$, et à cet effet on pose $y = x^2$; l'élimination de x entre $f(x) = 0$ et $x^2 - y = 0$ conduit à l'équation $\phi_1(y) = 0$, dont les racines sont les carrés des racines de l'équation $f(x) = 0$; la division de $F(y)$ par $\phi_1(y)$ donne le quotient $\{\phi(y)\}^2$; et en extrayant la racine carrée de ce quotient, on obtient le premier membre de l'équation demandée $\phi(y) = 0$.

REMARQUE. Si l'on veut parvenir directement à l'équation

$\phi(y)=0$, on remplacera le système $f(x)=0, f(\frac{y}{x})=0$, par $f(x)=0, f(\frac{y}{x})-f(x)=0$; l'hypothèse $y=x^2$ réduisant à zéro le premier membre $f(\frac{y}{x})-f(x)$, il est divisible par $y-x^2$; désignant le quotient par $F_1(x, y)$, le système (2)... $f(x)=0, F_1(x, y)=0$, n'admet plus les valeurs $a^2, b^2, \dots, k^2$, de y , correspondantes à $y=x^2$; et l'élimination de x entre les équations (2) conduit à l'équation demandée $\phi(y)=0$.

EXEMPLE. Soit $f(x)=x^3-2x^2-x+2=0$.

On trouve $F_1(x, y)=x^4-2x^3+(y-1)x^2-2yx+y^2$.

Pour éliminer x entre les équations $f(x)=0, F_1(x, y)=0$, on divise $F_1(x, y)$ par $f(x)$, ce qui fournit le premier reste $yx^2-2(y+1)x+y^2$; la division de $(x^3-2x^2-x+2)y^2$ par ce premier reste, conduit au second reste $(-y^3-y^2+4y+4)x$. La valeur $x=0$ ne convenant pas à l'équation proposée $f(x)=0$, on peut supprimer le facteur x contenu dans le second reste, ce qui conduit directement à l'équation

$$\phi(y)=-y^3-y^2+4y+4=0,$$

dont les racines $-1, +2, -2$, sont tous les produits deux à deux des racines $+1, -1, +2$, de $f(x)=0$.

Pour chaque valeur ζ de y tirée de $\phi(y)=0$, l'équation $yx^2-2(y+1)x+y^2=0$, fournit les deux racines de $f(x)=0$ dont le produit est ζ ; car ces deux valeurs de x réduisent $f(x)$ à zéro, et dépendent de l'équation $\zeta x^2-2(\zeta+1)x+\zeta=0$ dans laquelle le produit des racines est ζ (n° 225).

21^e PROBLÈME. On propose de former une équation.... (2)... $\phi(y)=0$, dont toutes les racines soient égales aux quotiens que l'on obtiendrait si l'on divisait successivement chacune des m racines $a, b, c, \dots, i, k$ de l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré (1)... $f(x)=0$, par chacune des $m-1$ autres.

Soient z et z' deux racines quelconques de l'équation (1), on est conduit à éliminer z et z' entre les trois équations

$$f(x) = 0, \quad f(x') = 0, \quad y = \frac{x'}{x}.$$

La dernière équation donne $x' = xy$, et en substituant la valeur xy de x' , dans $f(x') = 0$, il ne reste plus qu'à éliminer x entre $f(x) = 0$ et $f(xy) = 0$; ce qui revient à éliminer x entre

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(xy) = 0;$$

L'équation finale $F(y) = 0$ aura pour racines les m^2 valeurs

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \dots, \frac{i}{k}, \frac{k}{i}, \frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}, \dots, \frac{i}{i'}, \frac{k}{k'},$$

qui résultent de la relation $y = \frac{x'}{x}$ en donnant successivement à x et x' les m valeurs $a, b, c, \dots, i, k$.

L'équation $F(y) = 0$ admettant m valeurs de y égales à l'unité, $F(y)$ sera divisible par $(y-1)^m$, et le quotient $\phi(y)$ égalé à zéro donnera l'équation demandée (2)... $\phi(y) = 0$, dont les $m(m-1)$ racines sont les quotiens

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \dots, \frac{i}{k}, \frac{k}{i}.$$

Il résulte de la forme des valeurs de y que l'équation (2) est *réci-proque* (n° 303); la recherche de ces valeurs de y ne dépendra donc que de la résolution d'une équation du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$, (n° 308).

REMARQUE. Pour parvenir directement à l'équation (2), on remplace le système $f(x) = 0, f(xy) = 0$, par le système équivalent $f(x) = 0, f(xy) - f(x) = 0$.

Le polynome $f(xy) - f(x)$ est exactement divisible par $(y-1)x$; car chacune des hypothèses $y=1, x=0$, le réduit à zéro. D'ailleurs $y=1$ correspond aux m valeurs étrangères $\frac{a}{a}, \frac{b}{b}, \dots, \frac{i}{i}, \frac{k}{k}$, et $x=0$ ne satisfait pas à $f(x)=0$ (*); dé-

(*) On suppose que $f(x)=0$ n'a pas de racine nulle.

signant donc par $F_1(x, y)$ le quotient de $f(xy) - f(x)$ par $(y - 1)x$, le système

$$f(x) = 0, F_1(x, y) = 0,$$

n'admet plus les m valeurs de y égales à l'unité, et l'élimination de x entre ces deux dernières équations conduit directement à l'équation demandée (2)... $\varphi(y) = 0$.

EXEMPLE. Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

On a $f(xy) - f(x) = (y^3 - 1)x^3 - 2(y^2 - 1)x^2 - (y - 1)x = 0$;

et en divisant par $(y - 1)x$, on obtient le quotient exact

$$F_1(x, y) = (y^2 + y + 1)x^2 - 2(y + 1)x - 1 = 0.$$

L'élimination de x entre $f(x) = 0$ et $F_1(x, y) = 0$, conduit à l'équation finale

$$\varphi(y) = 4y^6 - 8y^5 - 13y^4 + 34y^3 - 13y^2 - 8y + 4 = 0.$$

Cette dernière équation est *réci-proque* (n° 305), et ses racines $-1, -1, +2, +\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$, sont tous les quotiens que l'on obtient en divisant successivement l'une par l'autre, les racines $+1, -1, +2$, de l'équation $f(x) = 0$.

316. 22^e PROBLÈME. *Déterminer les coefficients arbitraires d'une équation, de manière que cette équation admette des solutions données.*

Nous avons vu (n° 58) comment on résout ce problème quand l'équation donnée est du premier degré.

On opère d'une manière semblable, quel que soit le degré de l'équation proposée; car la substitution de chaque *solution donnée* dans l'équation proposée, fournissant une équation du premier degré entre les coefficients inconnus, on peut se donner, au plus, autant de solutions qu'il y a de coefficients arbitraires.

1^{er} EXEMPLE. Soit l'équation générale du $m^{\text{ème}}$ degré à une seule inconnue,

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0.$$

Cette équation ne renfermant que m coefficients arbitraires, on ne saurait jamais se donner plus de m solutions. Ces m solutions sont les m racines de l'équation proposée.

2° EXEMPLE. Soit l'équation complète du $m^{\text{ième}}$ degré à deux inconnues,

$$x^m + (ay + b)x^{m-1} + (cy^2 + dy + e)x^{m-2} + \dots + (py^m + \dots + ty + t) = 0.$$

Le nombre des coefficients arbitraires $a, b, c, d, e, \dots, s, t$, étant $2 + 3 + \dots + (m + 1)$, ou $\frac{1}{2} m(m + 3)$, (n° 147), on peut se donner au plus $\frac{1}{2} m(m + 3)$ solutions.

Lorsque $m = 2$, on a $\frac{1}{2} m(m + 3) = 5$; de sorte qu'on ne peut jamais se donner plus de cinq solutions d'une équation complète du second degré à deux inconnues,

$$x^2 + (ay + b)x + (cy^2 + dy + e) = 0.$$

Si l'équation proposée est

$$x^2 + ax - y^2 - 2y + b = 0,$$

on pourra s'en donner deux solutions arbitraires.

Soit $x = -1$, $y = 0$, la première solution; ces valeurs de x et y devant satisfaire à l'équation proposée, il faut que

$$(-1)^2 + a(-1) + b = 0; \text{ d'où } b = a - 1.$$

De sorte que $x = -1$, $y = 0$, satisfont à l'équation

$$x^2 + ax - y^2 - 2y + (a - 1) = 0, \text{ quel que soit } a.$$

Si la seconde solution donnée est $x = 1$, $y = -2$, on trouve $a = 0$.

L'équation qui admet les deux solutions données est donc

$$x^2 - y^2 - 2y - 1 = 0.$$

23° PROBLÈME. Déterminer les coefficients arbitraires contenus dans deux équations, de manière que le système de ces équations admette des solutions données.

On peut généralement se donner, au plus, autant de solutions.

communes qu'il y a de coefficients arbitraires dans l'équation qui en renferme le moins ; car chaque solution doit convenir à l'équation qui contient le moins de coefficients indéterminés, et on ne saurait se donner plus de solutions de cette dernière équation qu'elle n'a de coefficients arbitraires.

1^{er} EXEMPLE. Soient les deux équations à une seule inconnue,

$$(1) \dots x^3 + Qx + R = 0, \quad x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

On peut se donner, au plus, deux solutions arbitraires communes à ces équations.

Si les solutions données sont $x = -2$, $x = -3$, ces valeurs de x substituées dans les équations (1) conduiront à

$$\begin{aligned} -8 - 2Q + R &= 0, & -27 - 3Q + R &= 0, \\ -8 + 4p - 2q + r &= 0, & -27 + 9p - 3q + r &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières équations donnent $Q = -19$, $R = -30$.

Les deux autres renfermant les trois coefficients p, q, r , on peut assigner des valeurs arbitraires à l'un quelconque de ces coefficients.

On peut aussi exprimer deux des coefficients p, q, r , en fonction du troisième ; on trouve de cette manière que

$$q = 5p - 19, \quad r = 6(p - 5).$$

De sorte que le système

$$\begin{aligned} x^3 - 19x - 30 &= 0, \\ x^3 + px^2 + (5p - 19)x + 6(p - 5) &= 0, \end{aligned}$$

admet les valeurs $x = -2$, $x = -3$, quel que soit p .

Et en effet, si l'on divise les premiers membres de ces équations par le produit $x^2 + 5x + 6$ des facteurs correspondans aux racines communes $x = -2$, $x = -3$, on obtiendra des quotiens exacts $x - 5$, $x + p - 5$; le système précédent revient donc à

$$(x+2)(x+3)(x-5) = 0, \quad (x+2)(x+3)(x+p-5) = 0.$$

REMARQUE. Lorsqu'on donne à l'indéterminée p la valeur $+4$,

on retrouve le système

$$x^3 - 19x - 30 = 0, \quad x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0,$$

auquel on était parvenu (page 507).

On est conduit aux mêmes résultats, en exprimant que chacun des polynomes $x^3 + Qx + R$, $x^3 + px^2 + qx + r$, est divisible par le produit $x^2 + 5x + 6$ des facteurs correspondans aux racines communes -2 et -3 ; car en effectuant ces deux divisions, on parvient aux restes

$$(Q + 19)x + (R + 30), \quad (q - 5p + 19)x + r - 6(p - 5),$$

et ces restes devant être nuls quel que soit x , il faut que

$$Q + 19 = 0, \quad R + 30 = 0, \quad q - 5p + 19 = 0, \quad r - 6(p - 5) = 0,$$

d'où

$$Q = -19, \quad R = -30, \quad q = 5p - 19, \quad r = 6(p - 5).$$

2^e EXEMPLE. Soient les deux équations à deux inconnues,

$$x^2 + ax - y^2 - 2y + b = 0, \quad x^2 + (cy + d)x + (y^2 + 2y + e) = 0;$$

on peut se donner deux solutions communes arbitraires.

Supposons que ces solutions soient

$$x = -1, \quad y = 0, \quad \text{ou} \quad x = 1, \quad y = -2.$$

Ces valeurs de x et y devant satisfaire aux équations proposées, on obtiendra quatre équations entre a, b, c, d, e , qui donneront $a = 0, b = -1, c = d = 1 + e$; de sorte que les équations demandées sont

$$x^2 - (y^2 + 2y + 1) = 0, \quad x^2 + (e + 1)(y + 1)x + (y^2 + 2y + e) = 0.$$

Chacune des solutions données satisfaisant à ces équations quel que soit e , on peut déterminer e de manière qu'une des solutions de la 1^{re} équation convienne à la 2^e équation.

Par exemple, soit $y = 1$; la 1^{re} équation donne $x = \pm 2$; si l'on exprime que $y = 1$ et $x = -2$ satisfont à la 2^e équation, on trouvera $e = 1$.

Il en résulte que le système

$$x^2 - (y^2 + 2y + 1) = 0, \quad x^2 + 2(y + 1)x + (y^2 + 2y + 1) = 0,$$

admet les trois solutions .

$$x = -1, y = 0 \parallel x = 1, y = -2 \parallel y = 1, x = -2.$$

3^e EXEMPLE. Soient les deux équations générales à deux inconnues,

$$x^m + (ay + b)x^{m-1} + (cy^2 + dy + e)x^{m-2} + \dots + (py^m + \dots + sy + t) = 0,$$

$$x^n + (a'y + b')x^{n-1} + (c'y^2 + d'y + e')x^{n-2} + \dots + (p'y^n + \dots + s'y + t') = 0,$$

l'une du m^{ième} degré, l'autre du n^{ième} degré.

Si l'on désigne respectivement par M et N le nombre des coefficients arbitraires de chaque équation, on aura

$$M = \frac{1}{2} m(m+3), \quad N = \frac{1}{2} n(n+3), \quad (\text{page 520}).$$

Lorsque n est moindre que m , on peut se donner au plus N solutions communes, car ces N solutions déterminent les N coefficients de la seconde équation. La première équation contient encore $M - N$ coefficients arbitraires que l'on peut chercher à déterminer de manière que $M - N$ autres solutions de la seconde équation conviennent à la première; les équations qui en résultent admettent M solutions communes.

Quand $n = m$, on ne peut se donner au plus que $N - 1$ solutions communes, et il reste un coefficient arbitraire dans chacune des équations proposées. Si l'on prenait N solutions communes, les coefficients de la première équation seraient déterminés par les mêmes équations que ceux de la seconde; de sorte que les deux équations se réduiraient à une seule.

1^{re} REMARQUE. Les propriétés précédentes supposent que les équations du premier degré qui fournissent les valeurs des coefficients arbitraires sont possibles et déterminées. Quand on est conduit à des équations indéterminées ou contradictoires, la question proposée est indéterminée ou impossible.

2^e REMARQUE. On démontrera dans le n^o 334 que le nombre des solutions communes à deux équations du m^{ième} et du n^{ième} degré entre x et y , est tout au plus égal à $m \times n$. On ne doit donc jamais chercher à déterminer les coefficients arbitraires de manière que les deux équations proposées admettent plus de $m \times n$ solutions communes.

Par conséquent, lorsque $m > n$, on peut se donner au plus $\frac{1}{2}n(n+3)$ solutions communes, pourvu que

$$\frac{1}{2}n(n+3) \geq nm; \text{ d'où } n \geq 2m-3, \text{ (n° 68, page 142).}$$

Quand $m=n$, on peut toujours se donner $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ solutions communes, car la condition

$$\frac{1}{2}n(n+3)-1 \geq n^2, \text{ conduit à}$$

$$n^2-3n+2 \leq 0, \text{ ou à } (n-1)(n-2) \leq 0,$$

ce qui a nécessairement lieu puisqu'on suppose que n est un nombre entier positif.

Si l'on voulait introduire un plus grand nombre de solutions communes, les équations entre les coefficients arbitraires seraient contradictoires ou indéterminées; dans le premier cas, la question serait impossible; dans le second cas, les équations entre x et y admettraient une infinité de solutions communes, ce qui tiendrait à ce que les valeurs des coefficients introduiraient un facteur commun entre les premiers membres de ces équations.

317. Nous avons prouvé (n° 220) que si la valeur $x=a$ réduit un polynome entier à zéro, ce polynome est exactement divisible par $x-a$. Nous allons généraliser ce principe en démontrant que si l'hypothèse $x=a$ réduit à zéro une fonction algébrique $f(x)$, rationnelle ou irrationnelle, cette fonction peut toujours se ramener à la forme $(x-a)^m \times F(x)$, l'exposant m désignant un nombre positif, entier ou fractionnaire, et $F(a)$ n'étant jamais nul ni infini.

Pour démontrer cette propriété, on met le facteur $(x-a)^m$ en évidence, en remplaçant le binôme $x-a$ par un monome h ; ce qui revient à faire $x=a+h$ dans $f(x)$; le résultat $f(a+h)$ devant devenir nul quand on y fait $h=0$, il faut que le développement de $f(a+h)$ suivant les puissances croissantes de h , ne contienne que des exposans positifs de h ; car s'il renfermait des puissances négatives de h , ou des termes indépendans de h ,

en y faisant $h=0$, il y aurait des termes qui deviendraient infinis, ou qui ne se réduiraient pas à zéro; le développement de $f(a+h)$ est donc de la forme

$$f(a+h) = ph^m + rh^{m+d} + \text{etc.} = h^m(p + rh^d + \text{etc.}).$$

Si l'on remplace h par sa valeur $x-a$, on trouvera

$$f(x) = (x-a)^m \times \{p + r(x-a)^d + \text{etc.}\}.$$

Donc, $F(x) = p + r(x-a)^d + \text{etc.}$, et $F(a) = p$.

Ce qui démontre le principe énoncé.

EXEMPLE. Soit $f(x) = \sqrt{x-a} + (x^2 + ax - 2a^2)$.

L'hypothèse $x=a$ réduisant $f(x)$ à zéro, on fait $x = a + h$ dans $f(x)$, et l'on trouve

$$f(a+h) = h^{\frac{1}{2}} \left(1 + 3ah^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{3}{2}}\right).$$

Remplaçant h par sa valeur $x-a$, on voit que

$$f(x) = (x-a)^{\frac{1}{2}} \left\{1 + 3a(x-a)^{\frac{1}{2}} + (x-a)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

318. 24^e PROBLÈME. La fraction $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsqu'on y fait $x=a$; il s'agit de déterminer la valeur que prend cette fraction, lorsqu'après avoir supprimé le facteur $(x-a)^k$ qui entre dans ses deux termes, on fait $x=a$ dans la nouvelle fraction qui en résulte.

Désignons par z la fraction donnée. D'après le principe précédent, on a $f(x) = P(x-a)^m$, $\phi(x) = Q(x-a)^n$, m et n sont des nombres positifs, entiers ou fractionnaires; et pour $x=a$, les fonctions P , Q , prennent des valeurs particulières, p , q , qui ne sont jamais nulles ni infinies.

Or, on peut avoir, $m=n$, ou $m>n$, ou $m<n$, et en supprimant les facteurs communs à $f(x)$ et $\phi(x)$, les valeurs correspondantes de z sont

$$\frac{P}{Q}, \quad \frac{P}{Q}(x-a)^{m-n}, \quad \frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}.$$

En supposant $x=a$, la valeur de z se réduit à une quantité finie $\frac{p}{q}$, ou à zéro, ou à l'infini.

Pour obtenir cette valeur déterminée de z , on met les facteurs $(x - a)^m$, $(x - a)^n$, en évidence en faisant $x = a + h$ dans $f(x)$ et $\phi(x)$; on développe $f(a + h)$ et $\phi(a + h)$ suivant les puissances positives et croissantes de h , ce qui conduit à

$$(1) \dots z = \frac{f(a + h)}{\phi(a + h)} = \frac{ph^m + rh^{m+1} + \text{etc.}}{qh^n + sh^{n+1} + \text{etc.}}$$

On divise les deux termes de cette dernière fraction par la plus haute puissance possible de h , et on fait ensuite $h = 0$, le résultat est la valeur de z correspondante à $x = a$.

1^{er} EXEMPLE. Soit

$$z = \frac{x^3 + ax - 2a^2}{x^2 - a^2}.$$

L'hypothèse $x = a$ réduisant z à $\frac{0}{0}$, on fait $x = a + h$ dans la fraction proposée, et l'on trouve

$$z = \frac{3ah + h^3}{2ah + h^2} = \frac{3a + h}{2a + h}.$$

En supposant $h = 0$, on voit que la valeur de z correspondante à $x = a$, est $\frac{3}{2}$.

2^e EXEMPLE. Soient les fractions

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}, \quad \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2}, \quad \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}.$$

L'hypothèse $x = 2$ les réduisant à $\frac{0}{0}$, on fait $x = 2 + h$ dans les deux termes de chaque fraction; elles deviennent

$$\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2+h} - \sqrt[3]{2}}, \quad \frac{4h + h^2}{\sqrt{h}}, \quad \frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}.$$

On extrait la racine quarrée et la racine cubique de $2 + h$, on supprime les facteurs communs aux deux termes de chaque fraction; et en supposant ensuite $h = 0$, on trouve que pour $x = 2$, les valeurs des fractions proposées sont respectivement, $\frac{3}{2}\sqrt[6]{2}$, zéro et l'infini.

1^{re} REMARQUE. Lorsque la valeur de x qui réduit $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ à $\frac{0}{0}$ est $x=0$, la méthode précédente revient à développer $f(x)$ et $\phi(x)$, suivant les puissances positives et croissantes de x ; les deux termes de la fraction qui exprime z deviennent divisibles par une même puissance de x , et cette division effectuée donne une fraction que l'hypothèse $x=0$ ne réduit plus à $\frac{0}{0}$.

EXEMPLE. Soit
$$z = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{1 - \sqrt[3]{1+x}}.$$

On extrait successivement la racine quarrée et la racine cubique de $1+x$, et l'on trouve

$$z = \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \text{etc.}}{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 - \text{etc.}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}x - \text{etc.}}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{9}x - \text{etc.}}.$$

En supposant $x=0$, on voit que la valeur correspondante de z est $\frac{3}{2}$.

2^e REMARQUE. Quand les deux termes de la fraction $\frac{f(x)}{\phi(x)}$, qui est réduite à $\frac{0}{0}$ par la valeur $x=a$, sont des polynomes entiers par rapport à x , les propriétés des *fonctions dérivées* conduisent très simplement à la valeur que prend cette fraction lorsqu'on y fait $x=a$.

En effet, dans ce cas, si l'on fait $x=a+h$ dans l'expression $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ de z , on a

$$z = \frac{f(a+h)}{\phi(a+h)} = \frac{f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2f''(a) + \text{etc.}}{\phi(a) + h\phi'(a) + \frac{1}{2}h^2\phi''(a) + \text{etc.}}, \quad (\text{n}^\circ 251).$$

Or, par hypothèse, $f(a)$ et $\phi(a)$ sont identiquement nuls;

supprimant ces termes et divisant par h , il vient

$$(1) \dots z = \frac{f'(a) + \frac{1}{2} h f''(a) + \text{etc.}}{\phi'(a) + \frac{1}{2} h \phi''(a) + \text{etc.}}$$

Supposant $h = 0$ dans (1), on voit que la valeur de z , correspondante à $h = 0$, est $\frac{f'(a)}{\phi'(a)}$.

Quand $f'(a)$ et $\phi'(a)$ sont nuls, les deux termes de l'expression (1) de z deviennent divisibles par h , et en faisant ensuite $h = 0$, la valeur correspondante de z se réduit à $\frac{f''(a)}{\phi''(a)}$.

Et ainsi de suite.

En général, lorsque l'hypothèse $x = a$ réduit à $\frac{0}{0}$ une fraction $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ dont les deux termes sont des polynomes entiers par rapport à x , on obtient la valeur de cette fraction qui correspond à $x = a$, en faisant successivement $x = a$ dans les expressions $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$, $\frac{f''(x)}{\phi''(x)}$, $\frac{f'''(x)}{\phi'''(x)}$, etc., jusqu'à ce qu'on parvienne à une fraction qui ne se réduise plus à $\frac{0}{0}$; cette dernière exprime la fraction demandée.

EXEMPLE. Soit $z = \frac{x^3 - 3a^2x + 2a^3}{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3} = \frac{f(x)}{\phi(x)}$.

On a $\frac{f'(x)}{\phi'(x)} = \frac{3x^2 - 3a^2}{3x^2 - 2ax - a^2}$, $\frac{f''(x)}{\phi''(x)} = \frac{6x}{6x - 2a}$, etc.

Supposant $x = a$, on trouve

$$\frac{f(a)}{\phi(a)} = \frac{0}{0}, \quad \frac{f'(a)}{\phi'(a)} = \frac{0}{0}, \quad \frac{f''(a)}{\phi''(a)} = \frac{3}{2}.$$

La valeur de z correspondante à $x = a$ est donc $\frac{3}{2}$.

CHAPITRE IX (*).

Théorie des fonctions symétriques. Applications de cette théorie à la recherche de l'équation aux quarrés des différences, à l'élimination, à la détermination du degré de l'équation finale, etc.

§ 1. *Théorie des fonctions symétriques.*

319. Une FONCTION est dite SYMÉTRIQUE, par rapport à plusieurs quantités, quand elle reste la même lorsqu'on change ces quantités les unes dans les autres de toutes les manières possibles.

Ainsi, $a^2b^3 + b^2a^3 + a^2c^3 + c^2a^3 + b^2c^3 + c^2b^3$, est une fonction symétrique des lettres a, b, c ; on la désigne par $T(a^2b^3)$.

En général, $T(a^2b^3c^4)$ etc.) représente la somme de tous les termes de la forme $a^2b^3c^4$ etc., que l'on peut composer avec les lettres a, b, c , etc.

On représente ordinairement la somme $T(a^n)$ par s_n ; de sorte que

$$\begin{aligned} s_1 &= a + b + c + \text{etc.}, & s_2 &= a^2 + b^2 + c^2 + \text{etc.}, \\ s_3 &= a^3 + b^3 + c^3 + \text{etc.}, \dots, & s_n &= a^n + b^n + c^n + \text{etc.} \end{aligned}$$

Selon que chacun des termes d'une fonction symétrique contiendra une lettre, ou deux lettres, ou trois lettres, etc., nous dirons que cette fonction est *simple*, ou *double*, ou *triple*, etc. Ainsi, s_1, s_2, s_3 , etc., sont des fonctions symétriques simples; $T(a^2b^3)$ est une fonction symétrique double; etc.

(*) Les théories contenues dans ce dernier chapitre ne sont pas exigées pour l'admission à l'École Polytechnique.

320. 1^{er} PROBLÈME. On propose d'évaluer les sommes des puissances semblables et entières des racines d'une équation, au moyen des coefficients de cette équation.

Soit (1) $\dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0$ l'équation proposée, dont nous désignerons le premier membre par $f(x)$; représentons par s_1, s_2, s_3 , etc., les sommes des puissances 1^{re}, 2^e, 3^e, etc., des m racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation (1), de sorte que

$$s_1 = a + b + c + \dots + k, \quad s_2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + k^2, \text{ etc.}$$

Pour parvenir aux relations qui déterminent les sommes s_1, s_2, s_3 , etc., en fonction des coefficients $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m$, nous considérerons $f(x)$ sous les deux formes

$$(2) \dots f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m,$$

$$(3) \dots f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-k),$$

afin d'obtenir deux expressions différentes de la dérivée $f'(x)$, qui par leur comparaison fourniront les relations demandées.

On a vu (n^{os} 245 et 246) que les dérivées des expressions (2), (3), de $f(x)$, sont

$$f'(x) = mx^{m-1} + (m-1)p_1 x^{m-2} + (m-2)p_2 x^{m-3} + \dots + p_{m-1}$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c} + \dots + \frac{f(x)}{x-k}.$$

Pour que cette deuxième valeur de $f'(x)$ devienne comparable à la première, il faut obtenir son développement suivant les puissances entières positives et décroissantes de x .

Or, on a trouvé (page 362) que le quotient de la division de $f(x)$ par $x-a$ est

$x^{m-1} + a$	$x^{m-2} + a^2$	$x^{m-3} + \dots + a^{m-3}$	$x + a^{m-1}$
$+ p_1$	$+ p_1 a$	$+ p_1 a^{m-3}$	$+ p_1 a^{m-2}$
	$+ p_2$	$+ p_2 a^{m-4}$	$+ p_2 a^{m-3}$
		$\vdots$	$\vdots$
		$+ p_{m-3} a$	$\vdots$
		$+ p_{m-2}$	$+ p_{m-2} a$
			$+ p_{m-1}$

Et on en déduit les quotiens de $f(x)$ par chacun des $m-1$ autres facteurs $x-b, x-c, \dots, x-k$, en remplaçant successivement a , par b , par c , ..., par k .

Si l'on forme de cette manière la somme des m quotiens qui composent $f'(x)$, si l'on remplace ensuite les sommes

$$a+b+\dots+k, a^2+b^2+\dots+k^2, \dots, \\ a^{m-2}+b^{m-2}+\dots+k^{m-2}, a^{m-1}+b^{m-1}+\dots+k^{m-1},$$

par $s_1, s_2, \dots, s_{m-2}, s_{m-1}$, et si l'on égale les coefficients des diverses puissances de x , dans cette seconde expression de $f'(x)$, aux coefficients des puissances semblables de x , dans la première expression

$$mx^{m-1}+(m-1)p_1x^{m-2}+(m-2)p_2x^{m-3}+\dots+2p_{m-2}x+p_{m-1}$$

de $f'(x)$, on parviendra aux relations

$$(4) \dots \begin{cases} s_1+p_1=0, & s_2+p_1s_1+2p_2=0, & s_3+p_1s_2+p_2s_1+3p_3=0, \dots \\ s_{m-2}+p_1s_{m-3}+p_2s_{m-4}+\dots+p_{m-3}s_1+(m-2)p_{m-2}=0, \\ s_{m-1}+p_1s_{m-2}+p_2s_{m-3}+\dots+p_{m-2}s_1+(m-1)p_{m-1}=0. \end{cases}$$

Ces $m-1$ équations donneront les valeurs des $m-1$ sommes $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{m-2}, s_{m-1}$, en fonction rationnelle des $m-1$ coefficients $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{m-1}$; car la 1^{re} équation détermine s_1 en fonction de p_1 ; la substitution de cette valeur de s_1 dans la 2^e équation, conduit à la valeur de s_2 en fonction des deux premiers coefficients p_1, p_2 ; substituant ces valeurs de s_1 et s_2 dans la 3^e équation, on obtient s_3 en fonction des trois premiers coefficients p_1, p_2, p_3 ; et en continuant ainsi, on trouvera s_{m-1} en fonction des $m-1$ coefficients $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$.

On parvient de cette manière aux formules

$$(5) \dots s_1 = -p_1, \quad s_2 = p_1^2 - 2p_2, \quad s_3 = -p_1^3 + 3p_1p_2 - 3p_3, \text{ etc.}$$

Pour s'élever ensuite aux sommes s_m, s_{m+1}, s_{m+2} , etc., on multiplie tous les termes de l'équation (1) par x^n , ce qui donne

$$x^{m+n} + p_1x^{m+n-1} + p_2x^{m+n-2} + \dots + p_{m-1}x^{n+1} + p_mx^n = 0.$$

Cette dernière équation devant être satisfaite lorsqu'on y

remplace successivement x par chacune des m racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation (1), il en résulte les m équations

$$\begin{aligned} a^{m+n} + p_1 a^{m+n-1} + p_2 a^{m+n-2} + \dots + p_{m-1} a^{n+1} + p_m a^n &= 0, \\ b^{m+n} + p_1 b^{m+n-1} + p_2 b^{m+n-2} + \dots + p_{m-1} b^{n+1} + p_m b^n &= 0, \\ &\vdots \\ k^{m+n} + p_1 k^{m+n-1} + p_2 k^{m+n-2} + \dots + p_{m-1} k^{n+1} + p_m k^n &= 0. \end{aligned}$$

Ajoutant ces m équations, et remplaçant les sommes

$$a^{m+n} + b^{m+n} + \dots + k^{m+n}, \quad a^{m+n-1} + b^{m+n-1} + \dots + k^{m+n-1}, \text{ etc.},$$

par $s_{m+n}, s_{m+n-1}, \text{ etc.}$, on parvient à l'équation

$$(6) \dots s_{m+n} + p_1 s_{m+n-1} + p_2 s_{m+n-2} + \dots + p_{m-1} s_{n+1} + p_m s_n = 0.$$

Cette relation ayant lieu quel que soit n , on en déduit les valeurs des sommes $s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, s_{m+3}, \text{ etc.}$; en fonction des sommes $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{m-1}$, en donnant successivement à l'indéterminée n les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., ce qui conduit à

$$(7) \dots \begin{cases} s_m + p_1 s_{m-1} + p_2 s_{m-2} + \dots + p_{m-1} s_1 + p_m s_0 = 0, \\ s_{m+1} + p_1 s_m + p_2 s_{m-1} + \dots + p_{m-1} s_2 + p_m s_1 = 0, \\ s_{m+2} + p_1 s_{m+1} + p_2 s_m + \dots + p_{m-1} s_3 + p_m s_2 = 0, \text{ etc.} \end{cases}$$

$$\text{Or, } s_0 = a^0 + b^0 + c^0 + \dots + k^0 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = m,$$

et l'on a fait voir comment on peut exprimer les sommes $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{m-1}$, au moyen des coefficients de l'équation (1); on obtiendra donc de cette manière toutes les sommes des puissances entières positives des racines de l'équation (1) en fonction rationnelle des coefficients $p_1, p_2, \dots, p_m$, de cette équation.

EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

en la comparant à l'équation générale

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + p_4 x^{m-4} + \text{etc} = 0,$$

on a

$$m = 3, \quad p_1 = p, \quad p_2 = q, \quad p_3 = r, \quad p_4 = 0, \quad p_5 = 0, \text{ etc.},$$

et les formules générales (4), (7), (pages 531 et 532), conduisent à

$$\begin{aligned}s_1 + p &= 0, \quad s_2 + ps_1 + 2q = 0, \quad s_3 + ps_2 + qs_1 + 3r = 0, \\s_4 + ps_3 + qs_2 + rs_1 &= 0, \quad s_5 + ps_4 + qs_3 + rs_2 = 0, \\s_6 + ps_5 + qs_4 + rs_3 &= 0, \quad s_7 + ps_6 + qs_5 + rs_4 = 0, \text{ etc.}\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}s_1 &= -p, \quad s_2 = p^2 - 2q, \quad s_3 = -p^3 + 3pq - 3r, \\s_4 &= p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2, \\s_5 &= -p^5 + 5p^3q - 5p^2r - 5pq^2 + 5qr, \\s_6 &= p^6 - 6p^4q + 6p^3r + 9p^2q^2 - 12pqr + 3r^2 - 2q^3; \text{ etc.}\end{aligned}$$

Quand $p = 0$, ces relations se réduisent à

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -2q, \quad s_3 = -3r, \quad s_4 = 2q^2, \quad s_5 = 5qr, \quad s_6 = 3r^2 - 2q^3, \text{ etc.}$$

REMARQUE. Ce qui précède donnant le moyen d'exprimer les sommes $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{m-1}$, des puissances entières positives des racines d'une équation $f(x) = 0$, en fonction des coefficients de cette équation, la formule (6), (page 532), peut conduire aux sommes s_{-1}, s_{-2}, s_{-3} , etc., des puissances entières négatives de ces racines, en donnant successivement à l'indéterminée n les valeurs $-1, -2, -3$, etc. Mais, en opérant ainsi, les sommes s_{-1}, s_{-2}, s_{-3} , etc., dépendent des sommes s_1, s_2, s_3 , etc.

On peut trouver directement les formules qui déterminent les sommes des puissances entières négatives des racines de l'équation $f(x) = 0$, en fonction des coefficients de cette équation, en faisant $x = \frac{1}{y}$, dans $f(x) = 0$; car les sommes des puissances entières positives des racines de la transformée $f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$, sont les puissances entières négatives des racines de $f(x) = 0$. Nous laissons aux élèves le soin d'effectuer ces calculs qui ne présentent d'ailleurs aucune difficulté.

321. 2^e PROBLÈME. On propose d'exprimer les fonctions symétriques, doubles, triples, etc., des racines d'une équation, au moyen des coefficients de cette équation.

Nous représenterons toujours par $f(x)$ le premier membre de l'équation proposée

$$(1) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

et par $a, b, c, \dots, k$, les m racines de cette équation.

Le problème sera résolu, si nous parvenons à *déterminer les fonctions symétriques* $T(a^a b^c)$, $T(a^a b^c c^c)$, etc., au moyen des sommes s_1, s_2, s_3 , etc., des puissances des racines $a, b, c, \dots, k$; car les formules (4) et (7), (pages 531 et 532), pouvant servir à déterminer les valeurs de s_1, s_2, s_3 , etc., en fonction des coefficients p_1, p_2, p_3 , etc., de l'équation (1), il ne restera plus qu'à substituer ces valeurs dans les expressions de $T(a^a b^c)$, $T(a^a b^c c^c)$, etc. Cela posé :

1°. Pour évaluer la fonction symétrique double $T(a^a b^c)$, nous multiplierons l'une par l'autre les deux expressions

$$\begin{aligned} s_a &= a^a + b^a + c^a + \dots + k^a \\ s_c &= a^c + b^c + c^c + \dots + k^c. \end{aligned}$$

Les deux facteurs étant symétriques par rapport aux lettres $a, b, c, \dots, k$, leur produit devra l'être aussi; de plus, il ne renfermera que deux espèces de termes, savoir : ceux tels que $a^a + c^c$ qui proviendront de la multiplication de deux puissances d'une même lettre a , et ceux tels que $a^a b^c$, qui proviendront de la multiplication des puissances de deux lettres différentes. D'ailleurs, puisque le produit est symétrique et contient un terme $a^a + c^c$, il renfermera nécessairement tous les autres termes $b^a + c^c, c^a + c^c, \dots, k^a + c^c$ de la fonction symétrique que nous avons représentée par $s_a + c$. Par une raison semblable, ce produit contenant un terme $a^a b^c$, renfermera nécessairement tous les autres termes $b^a a^c, a^a c^c, c^a a^c$, etc., de la fonction symétrique que nous avons représentée par $T(a^a b^c)$. Donc

$$s_a \times s_c = s_a + c + T(a^a b^c); \text{ d'où } (2) \dots T(a^a b^c) = s_a \times s_c - s_a - c.$$

REMARQUE. Quand les exposans α, ζ , sont égaux, on ne peut plus faire usage de la formule (2); parce que dans le produit de s_α par s_ζ , les termes $a^\alpha b^\zeta, b^\alpha a^\zeta, a^\zeta c^\alpha, c^\zeta a^\alpha$, etc., devenant égaux deux à deux, ce produit contient deux fois chacun des termes $a^\alpha b^\alpha, a^\alpha c^\alpha$, etc., de la fonction symétrique demandée $T(a^\alpha b^\alpha)$.

On a donc

$$s_\alpha \times s_\alpha = s_{\alpha+\alpha} + 2T(a^\alpha b^\alpha); \text{ d'où (3) } \dots T(a^\alpha b^\alpha) = \frac{1}{2}(s^2 - s_{2\alpha}).$$

On parvient directement au même résultat en élevant au carré les deux membres de l'égalité

$$s_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + \dots + k^\alpha;$$

car ce carré étant formé de la somme $s_{2\alpha}$ des carrés $a^{2\alpha}, b^{2\alpha}, c^{2\alpha}, \dots, k^{2\alpha}$, des termes de s_α , plus, de deux fois la somme $T(a^\alpha b^\alpha)$ des produits deux à deux de ces termes, on a

$$s^2_\alpha = s_{2\alpha} + 2T(a^\alpha b^\alpha); \text{ d'où } T(a^\alpha b^\alpha) = \frac{1}{2}(s^2_\alpha - s_{2\alpha}).$$

On est donc en état d'exprimer les fonctions symétriques doubles $T(a^\alpha b^\zeta), T(a^\alpha b^\alpha)$, au moyen des fonctions symétriques simples $s_\alpha, s_\zeta, s_{\alpha+\zeta}, s_{2\alpha}$.

2°. Pour évaluer la fonction symétrique triple $T(a^\alpha b^\zeta c^\gamma)$, on multipliera entre elles les trois égalités.

$$s_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + \dots + k^\alpha,$$

$$s_\zeta = a^\zeta + b^\zeta + c^\zeta + \dots + k^\zeta,$$

$$s_\gamma = a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma + \dots + k^\gamma;$$

le produit sera composé de termes de trois espèces; car si les trois termes qu'on multiplie renferment la même lettre, leur produit contiendra cette lettre affectée de l'exposant $\alpha + \zeta + \gamma$, ce qui donnera les termes de la forme $a^{\alpha+\zeta+\gamma}$; s'il n'y a que deux des trois facteurs monomes qui contiennent une même lettre, leur produit renfermera cette lettre affectée de la somme

$a + \zeta$, ou $a + \gamma$, ou $\zeta + \gamma$, des deux exposans de cette lettre, et il renfermera une autre lettre affectée du troisième des exposans a , ζ , γ , ce qui fournira des termes des trois formes

$$a^{a+\zeta} b^\gamma, \quad a^{a+\gamma} b^\zeta, \quad a^{\zeta+\gamma} b^a.$$

Enfin, si les trois facteurs monomes contiennent trois lettres différentes, leur produit sera de la forme $a^a b^\zeta c^\gamma$.

D'ailleurs, le produit total des facteurs s_a, s_ζ, s_γ , étant symétrique par rapport à toutes les lettres $a, b, c, \dots, k$, ce produit renferme nécessairement tous les termes dont nous venons d'indiquer la forme; il est donc égal à la somme des cinq fonctions symétriques

$$T(a^{a+\zeta+\gamma}), \quad T(a^{a+\zeta} b^\gamma), \quad T(a^{a+\gamma} b^\zeta), \quad T(a^{\zeta+\gamma} b^a), \quad T(a^a b^\zeta c^\gamma).$$

Substituant pour les fonctions symétriques doubles

$$T(a^{a+\zeta} b^\gamma), \quad T(a^{a+\gamma} b^\zeta), \quad T(a^{\zeta+\gamma} b^a),$$

leurs expressions déduites de la formule générale

$$(2) \dots T(a^{a+\zeta} b^\zeta) = s_a \times s_\zeta - s_{a+\zeta}, \quad (\text{page } 534),$$

et remplaçant $T(a^{a+\zeta+\gamma})$ par $s_{a+\zeta+\gamma}$, on trouvera, toutes réductions faites,

$$(4) \dots T(a^a b^\zeta c^\gamma) = s_a s_\zeta s_\gamma - s_a s_{\zeta+\gamma} - s_\zeta s_{a+\gamma} - s_\gamma s_{a+\zeta} + 2s_{a+\zeta+\gamma}.$$

On parvient au même résultat en multipliant entre elles les deux égalités

$$s_\gamma = a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma + \dots + k^\gamma,$$

$$T(a^a b^\zeta) = a^a b^\zeta + b^a a^\zeta + a^a c^\zeta + c^a a^\zeta + \text{etc.};$$

car ce produit, qui doit être symétrique, ne renfermant que les termes de trois espèces qui composent les fonctions symétriques

$$T(a^{a+\gamma} b^\zeta), \quad T(a^{\zeta+\gamma} b^a), \quad T(a^a b^\zeta c^\gamma),$$

on a

$$s_\gamma \times T(a^a b^\zeta) = T(a^{a+\gamma} b^\zeta) + T(a^{\zeta+\gamma} b^a) + T(a^a b^\zeta c^\gamma); \quad \text{d'où}$$

$$T(a^{\alpha}b^{\zeta}c^{\gamma}) = s_{\gamma} \times T(a^{\alpha}b^{\zeta}) - T(a^{\alpha+\gamma}b^{\zeta}) - T(a^{\zeta+\gamma}b^{\alpha});$$

et si l'on remplace $T(a^{\alpha}b^{\zeta})$, $T(a^{\alpha+\gamma}b^{\zeta})$, $T(a^{\zeta+\gamma}b^{\alpha})$, par leurs valeurs, déduites de la formule (2), on obtiendra la formule (4).

REMARQUE. Cette seconde manière de parvenir à la relation (4) paraîtra sans doute plus simple que la première; cependant le premier procédé est préférable, parce qu'il conduit à des calculs qui sont symétriques non-seulement par rapport aux lettres $a, b, c, \dots, k$, mais encore par rapport aux exposans α, ζ, γ , de ces lettres. Le produit $s_{\alpha} s_{\zeta} s_{\gamma}$ reste le même quand on change l'un quelconque des exposans α, ζ, γ , en un autre, ce qui n'a pas lieu pour le produit de s_{γ} par $T(a^{\alpha}b^{\zeta})$.

Quand deux des exposans α, ζ, γ sont égaux, ζ et γ par exemple, les termes de la fonction symétrique générale... $T(a^{\alpha}b^{\zeta}c^{\gamma})$ deviennent égaux deux à deux aux termes de la fonction demandée $T(a^{\alpha}b^{\zeta}c^{\zeta})$; car alors

$$a^{\alpha}b^{\zeta}c^{\gamma} = a^{\alpha}c^{\zeta}b^{\gamma}, \quad b^{\alpha}a^{\zeta}c^{\gamma} = b^{\alpha}c^{\zeta}a^{\gamma}, \text{ etc.}$$

Le premier membre de la relation (4) devient donc le double de la fonction demandée $T(a^{\alpha}b^{\zeta}c^{\zeta})$. Par conséquent, on obtiendra cette dernière en divisant par 2 le second membre de la formule (4), et en y faisant $\gamma = \zeta$; ce qui conduit à

$$(5) \dots T(a^{\alpha}b^{\zeta}c^{\zeta}) = \frac{1}{2} (s_{\alpha} s_{\zeta}^2 - s_{\alpha} s_{2\zeta} - 2s_{\zeta} s_{\alpha+\zeta} + 2s_{\alpha+\zeta}).$$

Lorsque les trois exposans α, ζ, γ sont égaux entre eux, le premier membre de la formule (4) se réduit à $6T(a^{\alpha}b^{\alpha}c^{\alpha})$; car chaque produit de trois lettres donnant six permutations, les termes de $T(a^{\alpha}b^{\zeta}c^{\gamma})$ deviennent égaux six à six.

Par exemple, les exposans α, ζ, γ , étant égaux, chacun des six termes

$$a^{\alpha}b^{\zeta}c^{\gamma}, \quad a^{\alpha}c^{\zeta}b^{\gamma}, \quad b^{\alpha}a^{\zeta}c^{\gamma}, \quad b^{\alpha}c^{\zeta}a^{\gamma}, \quad c^{\alpha}a^{\zeta}b^{\gamma}, \quad c^{\alpha}b^{\zeta}a^{\gamma},$$

se réduit à $a^{\alpha}b^{\alpha}c^{\alpha}$.

On obtiendra donc la valeur de la fonction symétrique demandée $T(a^a b^a c^a)$, en divisant par 6 le second membre de la formule (4), et en y faisant $\gamma = \zeta = a$; ce qui conduit à

$$(6) \dots T(a^a b^a c^a) = \frac{1}{6}(s_a^3 - 3s_a s_{2a} + 2s_{3a}).$$

On arrive au même résultat en faisant $\zeta = a$, dans la relation (5). En effet, lorsque $\zeta = a$, les termes de $T(a^a b^c c^c)$ deviennent égaux trois à trois, puisque

$$a^a b^c c^c = b^a a^c c^c = c^a a^c b^c, \quad a^a b^c a^c = b^a a^c a^c = a^a a^c b^c, \text{ etc.,}$$

on obtiendra donc la valeur de $T(a^a b^a c^a)$, en divisant par 3 le second membre de la formule (5), et en y faisant $a = \zeta$; ce qui conduit à la formule (6).

Connaissant les fonctions symétriques triples $T(a^a b^c c^c)$, $T(a^a b^c a^c)$, $T(a^a b^a c^c)$, on en déduirait les fonctions symétriques quadruples $T(a^a b^c c^c a^c)$, en effectuant le produit des sommes s_a, s_c, s , s_b , ou en multipliant s_b par $T(a^a b^c c^c)$.

Et ainsi de suite.

Les fonctions symétriques $T(a^a b^c)$, $T(a^a b^c c^c)$, etc., étant ainsi déterminées au moyen des sommes s_a, s_c, s_{a+c}, s_b , etc., des puissances des racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation

$$(1) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

pour exprimer ces fonctions symétriques au moyen des coefficients p_1, p_2, p_3 , etc., il ne reste plus qu'à déduire des formules (4), (7), (pages 531, 532), les valeurs de s_a, s_c , etc., en fonction de p_1, p_2, p_3 , etc., et à remplacer les sommes s_a, s_c , etc., par leurs valeurs en fonction de p_1, p_2, p_3 , etc.

322. On en déduit ce théorème remarquable que toute fonction algébrique rationnelle et symétrique des racines d'une équation, peut s'exprimer rationnellement au moyen des coefficients de cette équation.

EXEMPLE. Soit l'équation privée de second terme

$$x^3 + qx + r = 0.$$

Représentons ses racines inconnues par a, b, c , et proposons-nous d'exprimer la fonction symétrique double $T(a^2b^2)$, au moyen des coefficients q, r . On a

$$(2) \dots T(a^2b^2) = a^2b^2 + b^2a^2 + a^2c^2 + c^2a^2 + b^2c^2 + c^2b^2.$$

La formule générale $T(a^2b^2) = s_2s_4 - s_{2+2}$, donne

$$(3) \dots T(a^2b^2) = s_2s_4 - s_5;$$

et l'on a vu (page 533) que

$$s_2 = -2q, \quad s_3 = -3r, \quad s_5 = 5qr.$$

Substituant ces valeurs de s_2, s_3, s_5 , dans l'expression (3) de $T(a^2b^2)$, on trouve $T(a^2b^2) = qr$.

Si l'équation donnée est $x^3 - 7x + 6 = 0$, on aura

$$T(a^2b^2) = -42.$$

On peut le vérifier; car les racines de $x^3 - 7x + 6 = 0$ sont $a=1, b=2, c=-3$, et en substituant ces valeurs dans (2), on trouve, toutes réductions faites, $T(a^2b^2) = -42$.

§ II. Applications de la Théorie des fonctions symétriques.

323. 3^e PROBLÈME. On propose de calculer, au moyen des fonctions symétriques, l'équation aux quarrés des différences des racines d'une équation donnée $f(x) = 0$.

Les formules qui serviront à résoudre ce problème devenant beaucoup plus simples quand l'équation donnée est privée du second terme, nous supposerons que la proposée est ramenée à la forme

$$(1) \dots x^m + p_2x^{m-2} + p_3x^{m-3} + \dots + p_{m-2}x^2 + p_{m-1}x + p_m = 0.$$

L'équation aux quarrés des différences des racines de l'équation (1) est la même que celle de l'équation $f(x) = 0$; car la méthode qui sert à faire disparaître le second terme d'une équation (page 509) se réduisant à augmenter toutes les racines

d'une quantité constante, les différences entre les racines de la transformée

$$(1) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0$$

sont les mêmes que celles des racines de l'équation primitive.

Cela posé : si l'on désigne par $a, b, c, \dots, k$, les m racines de l'équation (1), les $\frac{1}{2} m(m-1)$ racines de l'équation aux quarrés des différences seront

$$(a-b)^2, (a-c)^2, \dots, (a-k)^2, (b-c)^2, (b-d)^2, \dots, (b-k)^2, \text{ etc.}$$

Posant $\frac{1}{2} m(m-1) = a$, et représentant par z le quarré de la différence entre deux quelconques des m racines $a, b, c, \dots, k$, l'équation cherchée sera de la forme

$$(2) \dots z^a + P_1 z^{a-1} + P_2 z^{a-2} + \dots + P_{m-1} z + P_m = 0.$$

Il s'agit d'exprimer les coefficients inconnus $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$, de l'équation (2), en fonction des coefficients, p_1, p_2 , etc., de l'équation (1).

Or, en regardant P_1, P_2, P_3 , etc., comme des inconnues, les formules (4), (page 531), conduisent à

$$(3) \dots \begin{cases} P_1 = -S_1, & P_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2), \\ P_3 = \frac{1}{2} S_1 S_2 - \frac{1}{3} S_3 - \frac{1}{6} 6_1^3, \text{ etc.}; \end{cases}$$

et le coefficient P_1 étant zéro, les mêmes formules donnent

$$(4) \dots \begin{cases} s_1 = 0, & s_2 = -2p_1, & s_3 = -3p_2, & s_4 = 2p_1^2, \\ s_5 = 5p_1 p_2, & s_6 = 3p_2^2 - 2p_1^3, \text{ etc.} \end{cases}$$

Tout se réduit donc à déterminer les sommes S_1, S_2, S_3 , etc., en fonction des sommes s_1, s_2, s_3 , etc.; car lorsque ces fonctions seront connues, en les substituant dans (3), les coefficients P_1, P_2, P_3 , etc., deviendront des fonctions déterminées des sommes s_1, s_2, s_3 , etc.; et en remplaçant ces dernières par leurs expressions (4), on obtiendra enfin les coefficients inconnus P_1, P_2, P_3 , etc., en fonction des coefficients donnés p_1, p_2, p_3 , etc.

Cherchons donc une formule qui détermine les sommes S_1, S_2, S_3 , etc., en fonction des sommes s_1, s_2, s_3 , etc.

Les α racines de l'équation (2) étant

$(a-b)^{\frac{1}{2n}}, (a-c)^{\frac{1}{2n}}, \dots, (a-k)^{\frac{1}{2n}}, (b-c)^{\frac{1}{2n}}, (b-d)^{\frac{1}{2n}}, \dots, (b-k)^{\frac{1}{2n}}$, etc.,

la somme S_n des $n^{\text{ièmes}}$ puissances de ces racines est

$$S_n = (a-b)^{\frac{1}{2n}} + (a-c)^{\frac{1}{2n}} + \dots + (a-k)^{\frac{1}{2n}} + (b-c)^{\frac{1}{2n}} + \text{etc.}$$

Or, si l'on désigne par $\phi(x)$ la somme des puissances $2n$ des m facteurs $(x-a), (x-b), (x-c), \dots, (x-k)$, de l'équation (1), on aura

$$\phi(x) = (x-a)^{2n} + (x-b)^{2n} + (x-c)^{2n} + \dots + (x-k)^{2n};$$

et en donnant successivement à x les m valeurs $a, b, c, \dots, k$, la somme des m valeurs correspondantes $\phi(a), \phi(b), \phi(c), \dots, \phi(k)$, de $\phi(x)$, sera évidemment égale à $2S_n$, car $2n$ étant un nombre pair, on a

$$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, \quad (a-c)^{2n} = (c-a)^{2n}, \text{ etc.}$$

Pour obtenir une seconde expression de

$$\phi(a) + \phi(b) + \phi(c) + \dots + \phi(k),$$

nous développerons les puissances $2n$ des m binômes $x-a, x-b, x-c, \dots, x-k$; ce qui donnera

$$(x-a)^{2n} = x^{2n} - 2nax^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2}a^2x^{2n-2} - \dots + a^{2n}$$

$$(x-b)^{2n} = x^{2n} - 2nbx^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2}b^2x^{2n-2} - \dots + b^{2n}$$

...

$$(x-k)^{2n} = x^{2n} - 2nkx^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2}k^2x^{2n-2} - \dots + k^{2n}.$$

La somme de ces m développemens exprimant $\phi(x)$, on obtiendra cette autre valeur de $\phi(x)$,

$$\phi(x) = mx^{2n} - 2ns_1x^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2}s_2x^{2n-2} - \dots + s_{2n},$$

car

$$a + b + \dots + k = s_1, a^2 + b^2 + \dots + k^2 = s_2, \dots, a^{2n} + b^{2n} + \dots + k^{2n} = s_{2n}.$$

Donnant successivement à x les m valeurs $a, b, c, \dots, k$, on a

$$\varphi(a) = ma^{2n} - 2ns_1a^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2}s_2a^{2n-2} - \dots + s_{2n},$$

$$\varphi(b) = mb^{2n} - 2ns_1b^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2}s_2b^{2n-2} - \dots + s_{2n}$$

$$\vdots$$

$$\varphi(k) = mk^{2n} - 2ns_1k^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2}s_2k^{2n-2} - \dots + s_{2n}.$$

La somme de ces m développemens devant être égale à $2S_n$, on a

$$2S_n = ms_{2n} - 2ns_1s_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2}s_2s_{2n-2} - \dots + ms_{2n},$$

car

$$a^{2n} + b^{2n} + \dots + k^{2n} = s_{2n}, \quad a^{2n-2} + b^{2n-2} + \dots + k^{2n-2} = s_{2n-2}, \text{ etc.}$$

Cette formule conduirait aux valeurs demandées des sommes S_1, S_2, S_3 , etc., en fonction des sommes $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$, etc., en donnant successivement à n les valeurs 1, 2, 3, etc. Mais on peut la simplifier; en effet, les coefficients du second membre étant ceux du développement de la puissance $2n$ d'un binôme, les coefficients des termes également distans des extrêmes sont égaux et de même signe. D'ailleurs, ce développement ayant $2n+1$ termes, le terme qui en a p avant lui est de la forme $As_p s_{2n-p}$; le terme qui en a p après lui est précédé de $2n-p$ termes, et est par conséquent $As_{2n-p} s_p$. Les termes également distans des extrêmes sont donc égaux et de même signe.

Il en résulte que si l'on réunit ces termes deux à deux, la valeur de $2S_n$ se réduira au double de la somme des n premiers termes augmenté du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme qui est celui du milieu.

Or, le $(p+1)^{\text{ième}}$ terme est

$$\pm \frac{2n(2n-1)(2n-2) \dots (2n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} s_p s_{2n-p};$$

et en faisant $p = n$, on trouve que le terme du milieu est

$$M = \pm \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n} s_n s_n.$$

Divisant donc par 2 la valeur de $2S_n$, on aura

$$S_n = ms_n - 2ns_{n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} s_n s_{n-2} - \dots + \frac{1}{2} M.$$

Selon que n sera pair ou impair, on prendra la valeur positive ou négative du terme M affecté de $s_n s_n$.

Si l'on donne successivement à n les valeurs 1, 2, 3, etc., et si l'on observe que $s_1 = -p_1 = 0$, on trouvera

$$S_1 = ms_1, \quad S_2 = ms_2 + 3s_1^2, \quad S_3 = ms_3 + 15s_1 s_2 - 10s_1^3, \text{ etc.}$$

En substituant ces valeurs des sommes S_1, S_2, S_3 , etc., dans les relations (3), (page 540), on trouve

$$P_1 = -ms_1, \quad P_2 = \frac{1}{2}(m^2 s_1^2 - ms_2 + 3s_1^3),$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}m^3 - 5\right)s_1 s_2 + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3}m^2\right)ms_1^3 + \frac{10}{3}s_1^3 - \frac{1}{3}ms_3; \text{ etc.}$$

Enfin, si l'on remplace les sommes s_1, s_2, s_3 , etc., par leurs valeurs (4), (page 540), on parviendra aux relations demandées

$$(5) \dots \begin{cases} P_1 = 2mp_1, & P_2 = (2m^2 - m - 6)p_1^2, \\ P_3 = \left(\frac{2}{3}m^3 - m^2 - \frac{17}{3}m + 10\right)2p_1^3 + (30 - m)p_3^2, \text{ etc.} \end{cases}$$

Ces dernières formules résolvent le problème proposé.

EXEMPLE. Déterminer l'équation aux quarrés des différences des racines de l'équation

$$(1) \dots x^3 + qx + r = 0.$$

$$\text{On a} \quad m = 3, \quad \alpha = \frac{1}{2}m(m-1) = 3.$$

L'équation cherchée est donc de la forme

$$(2) \dots z^3 + Pz^2 + Qz + R = 0.$$

On compare les équations (1), (2), avec les équations

générales (1), (2), (page 540), on aura

$$p_2 = q, \quad p_3 = r, \quad P_1 = P, \quad P_2 = Q, \quad P_3 = R.$$

Tous les autres coefficients p_4, p_5 , etc., P_4, P_5 , etc., seront nuls, et les formules (5) (page 543) donneront

$$P = 6q, \quad Q = 9q^2, \quad R = 4q^3 + 27r^2.$$

De sorte que l'équation demandée est

$$(3) \dots z^3 + 6qz^2 + 9q^2z + (4q^3 + 27r^2) = 0.$$

On parvient directement au même résultat à l'aide des formules (4), (page 531); car en appliquant ces formules aux équations particulières

$$x^3 + qx + r = 0, \quad z^3 + Pz^2 + Qz + R = 0,$$

on trouve

$$(4) \dots \begin{cases} s_1 = 0, & s_2 + 2q = 0, & s_3 + 3r = 0, \\ s_4 + qs_2 = 0, & s_5 + qs_3 + rs_2 = 0, & s_6 + qs_4 + rs_3 = 0, \end{cases}$$

$$(5) \dots S_1 + P = 0, \quad S_2 + PS_1 + 2Q = 0, \quad S_3 + PS_2 + QS_1 + 3R = 0,$$

$$(6) \dots S_1 = 3s_2, \quad S_2 = 3s_4 + 3s_2^2, \quad S_3 = 3s_6 + 15s_2s_4 - 10s_3^2.$$

Les formules (5) donneront P, Q et R en fonction de S_1, S_2, S_3 . Substituant les valeurs (6) de S_1, S_2, S_3 , on obtiendra P, Q, R , en fonction des sommes s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 ; et en remplaçant ces dernières sommes par leurs valeurs déduites des relations (4), on trouvera

$$P = 6q, \quad Q = 9q^2, \quad R = 4q^3 + 27r^2.$$

Soit l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$.

On a $q = -7, \quad r = 7$, et l'équation (3) aux quarrés des différences devient

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0.$$

Ce qui s'accorde avec le résultat qui a été obtenu (page 461).

Si l'équation donnée est

$$(7) \dots x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0,$$

on fera disparaître son second terme en posant $x = y - 1$; la

transformée sera

$$(8) \dots y^3 - 7y + 7 = 0.$$

L'équation aux quarrés des différences des racines de l'équation (8) est

$$(9) \dots z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0.$$

Or, les différences des racines sont les mêmes dans chacune des équations (7), (8), car les valeurs de y sont respectivement égales à celles de x augmentées de 1; l'équation (9) est donc aussi l'équation aux quarrés des différences des racines de l'équation (7).

324. 4^e PROBLÈME. Une équation $f(x) = 0$ étant donnée, déterminer l'équation $\phi(y) = 0$ dont les racines sont les diverses valeurs que prend la fonction $z + z' + pzz'$, lorsqu'on y met successivement pour z et z' , deux racines différentes de l'équation proposée.

Soit $y = z + z' + pzz'$.

Si les m racines de l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré $f(x) = 0$, sont $a, b, c, d, e, \dots, h, i, k$, l'inconnue y aura les $\frac{1}{2}m(m-1)$ valeurs

$$(1) \dots \begin{cases} a + b + pab, & a + c + pac, & \dots, & a + k + pak, \\ b + c + pbc, & b + d + pbd, & \dots, & b + k + pbk, \\ c + d + pcd, & c + e + pce, & \dots, & c + k + pck, \\ \vdots & & & \\ h + i + phi, & i + k + pik. \end{cases}$$

Connaissant la forme des $\frac{1}{2}m(m-1)$ racines (1) de l'équation $\phi(y) = 0$, on obtiendra cette équation en égalant à zéro le produit des $\frac{1}{2}m(m-1)$ facteurs

$y - (a + b + pab), y - (a + c + pac), \dots, y - (i + k + pik),$
correspondans aux $\frac{1}{2}m(m-1)$ valeurs (1) de y .

Ces facteurs renfermant toutes les combinaisons deux à deux

des m racines $a, b, c, \dots, k$, leur produit reste le même lorsqu'on y change les quantités $a, b, c, \dots, k$, les unes dans les autres; car les facteurs ne font que se changer les uns dans les autres. Il en résulte que si l'on effectue la multiplication de ces facteurs, le produit sera une fonction symétrique des racines de l'équation $f(x) = 0$; par conséquent, les coefficients des diverses puissances de y dans $\phi(y)$, seront des fonctions symétriques des racines $a, b, c, \dots, k$, que l'on pourra exprimer au moyen des coefficients de l'équation donnée $f(x) = 0$.

EXEMPLE. Soit l'équation $(2) \dots x^3 + qx + r = 0$.

Si, a, b, c , désignent ses racines, l'équation $\phi(y) = 0$ dont les racines sont

$$a + b + pab, \quad a + c + pac, \quad b + c + pbc,$$

s'obtiendrait en égalant à zéro le produit des facteurs

$$y - (a + b + pab), \quad y - (a + c + pac), \quad y - (b + c + pbc).$$

Mais, on peut éviter d'effectuer les multiplications, en observant que l'équation $\phi(y) = 0$ étant de la forme

$$(3) \dots y^3 + Py^2 + Qy + R = 0,$$

les relations du n° 225 fournissent le moyen de former les coefficients inconnus P, Q, R , en fonction des racines, $a + b + pab$, $a + c + pac$, $b + c + pbc$, de l'équation (3).

On trouve de cette manière que

$$-P = 2(a + b + c) + p(ab + ac + bc),$$

$$Q = \begin{cases} (a^2 + b^2 + c^2) + 3(ab + ac + bc) \\ + pT(a^2b) + p^2T(a^2bc) + 6pabc, \end{cases}$$

$$-R = \begin{cases} T(a^2b) + pT(a^2b^2) + 3pT(a^2bc) \\ + 2p^2T(ab^2c^2) + p^3a^2b^2c^2 + 2abc. \end{cases}$$

Or, a, b, c , étant les racines de $x^3 + qx + r = 0$, on a

$$a + b + c = 0, \quad ab + ac + bc = q, \quad abc = -r,$$

et les formules des n°s 320, 321, donnent

$$-s_1 = a + b + c = 0, \quad s_2 = a^2 + b^2 + c^2 = -2q,$$

$$s_3 = -3r, \quad s_4 = 2q^2, \quad s_5 = 5qr, \quad s_6 = 3r^2 - 2q^3,$$

$$T(a^2b) = -s_3 = 3r, \quad T(a^2b^2) = \frac{1}{2}(s_2^2 - s_4) = q^2,$$

$$T(a^2bc) = s_4 - \frac{1}{2}s_2^2 = 0, \quad T(ab^2c^2) = s_5 - s_2s_3 = -qr.$$

On peut parvenir directement aux mêmes valeurs des fonctions symétriques

$$s_2, \quad T(a^2b), \quad T(a^2b^2), \quad T(a^2bc), \quad T(ab^2c^2),$$

à l'aide des artifices de calcul que nous allons indiquer.

Les relations du n° 225 donnent

$$a + b + c = 0, \quad ab + ac + bc = q, \quad abc = -r;$$

on en déduit

$$0 = (a + b + c)^2 = s_2 + 2(ab + ac + bc) = s_2 + 2q, \quad s_2 = -2q,$$

$$T(a^2bc) = a^2bc + b^2ac + c^2ab = (a + b + c)abc = 0,$$

$$0 = (a + b + c)(ab + ac + bc) = T(a^2b) + 3abc,$$

$$T(a^2b) = -3abc = 3r,$$

$$q^2 = (ab + ac + bc)^2 = T(a^2b^2) + 2T(a^2bc) = T(a^2b^2),$$

$$T(ab^2c^2) = (bc + ac + ab)abc = -qr.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions précédentes des coefficients P, Q, R , on trouve

$$P = -pq, \quad Q = q - 3pr, \quad R = 2p^2qr - p^3r^2 - pq^2 - r.$$

De sorte que l'équation demandée est

$$(4) \dots x^3 - pqx^2 + (q - 3pr)x + 2p^2qr - p^3r^2 - pq^2 - r = 0.$$

Si l'équation donnée étant $x^3 - 7x + 6 = 0$, on suppose $p = 2$, l'équation (4) deviendra

$$(5) \dots x^3 + 14x^2 - 43x - 728 = 0.$$

Il est facile de vérifier ce résultat; car les racines de l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$ étant $+1, +2$, et -3 , les racines

$$a + b + 2ab, \quad a + c + 2ac, \quad b + c + 2bc,$$

de l'équation (5) deviennent $+7, -8, -13$; et ces valeurs de y satisfont effectivement à l'équation (5).

REMARQUE. Pour obtenir l'équation dont les racines sont les sommes, $a+b, a+c, b+c$, des racines a, b, c , de l'équation (2) $\dots x^3 + qx + r = 0$, prises deux à deux, il suffit de faire $p = 0$ dans l'équation (4) (page 547); on trouve que l'équation demandée est

$$(6) \dots y^3 + qy - r = 0.$$

Si l'on change dans cette dernière y en $-x$, on retrouvera l'équation (2) $\dots x^3 + qx + r = 0$. Les racines de l'équation (6) sont donc égales à celles de l'équation (2) prises avec des signes contraires.

Et en effet, la relation $a+b+c=0$, donne

$$a+b=-c, \quad a+c=-b, \quad b+c=-a.$$

325. En général: Si l'on veut former l'équation qui a pour racines une fonction déterminée des racines d'une équation donnée $f(x)=0$, il suffit de faire dans cette fonction toutes les permutations possibles entre les racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation proposée. Désignant ces valeurs successives de la fonction par $\alpha, \zeta, \gamma, \dots, \omega$, on égale à zéro le produit des facteurs $y-\alpha, y-\zeta, y-\gamma, \dots, y-\omega$; le résultat est l'équation demandée. Les coefficients des diverses puissances de y sont des fonctions symétriques des quantités $\alpha, \zeta, \gamma, \dots, \omega$, qui sont elles-mêmes des fonctions symétriques des racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation $f(x)=0$; ces coefficients pourront donc toujours être exprimés au moyen des coefficients de l'équation proposée.

Les problèmes des nos 323 et 324, offrent des applications de cette règle générale.

§ III. Les racines d'une équation dont les coefficients sont réels, ne peuvent être que de la forme $\alpha + \zeta \sqrt{-1}$.

326. Nous supposerons toujours que toute équation a une racine. Il en résultera qu'une équation aura un nombre de racines marqué par son degré (n° 222).

Nous allons d'abord démontrer que toute équation $f(x)=0$ dont les coefficients sont réels, a une racine de la forme... $a + \zeta\sqrt{-1}$, a et ζ désignant des quantités réelles qui peuvent être nulles.

Cette propriété remarquable repose sur quelques principes que nous allons d'abord établir.

1°. Lorsque l'on combine plusieurs quantités de la forme $a + \zeta\sqrt{-1}$, par voie d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, le résultat est toujours de la forme $a' + \zeta'\sqrt{-1}$, (a, ζ, a', ζ' désignant des quantités réelles qui peuvent être nulles). En effet, on a

$$\begin{aligned}(a + \zeta\sqrt{-1}) \pm (a + b\sqrt{-1}) &= (a \pm a) + (\zeta \pm b)\sqrt{-1}, \\ (a + \zeta\sqrt{-1}) \times (a + b\sqrt{-1}) &= (a^2 - b\zeta) + (a\zeta + ba)\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Le produit de $a + \zeta\sqrt{-1}$ par $a + b\sqrt{-1}$ étant de la forme $a' + \zeta'\sqrt{-1}$, il en résulte que le quotient de $a' + \zeta'\sqrt{-1}$ par $a + \zeta\sqrt{-1}$ est de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Et en effet, on ramène le quotient de $a + \zeta\sqrt{-1}$ par $a + b\sqrt{-1}$ à la forme $a' + \zeta'\sqrt{-1}$, en multipliant le dividende et le diviseur par $a - b\sqrt{-1}$, car on trouve

$$\frac{a + \zeta\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{a^2 + b\zeta}{a^2 + b^2} + \left(\frac{a\zeta - ba}{a^2 + b^2}\right)\sqrt{-1}.$$

On déduit de ce qui précède, que n désignant un nombre entier positif, le développement de $(a + \zeta\sqrt{-1})^n$ est de la forme $a' + \zeta'\sqrt{-1}$.

REMARQUE. La formule du binôme de *Newton* (page 243), conduit à la même propriété; car, d'après cette formule, le développement de $(a + \zeta\sqrt{-1})^n$ se compose d'une partie réelle

$$a^n - \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}\zeta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4}\zeta^4 - \text{etc.},$$

qui provient des puissances paires de $\zeta\sqrt{-1}$, et d'une partie

imaginaire

$$\left\{ n\epsilon^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \epsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \epsilon^4 - \text{etc.} \right\} \epsilon \sqrt{-1},$$

qui provient des puissances impaires de $\epsilon \sqrt{-1}$ (n° 85).

De sorte que $(a + \epsilon \sqrt{-1})^n$ est de la forme $A + B\epsilon \sqrt{-1}$; A et B désignant des quantités réelles qui ne contiennent que des puissances paires de ϵ , et qui sont composées d'un nombre fini de termes, (n est un nombre entier positif).

Le développement de $(a - \epsilon \sqrt{-1})^n$ pouvant se déduire de celui de $(a + \epsilon \sqrt{-1})^n$, en changeant le signe de ϵ , ce qui ne change aucune des deux quantités A , B , on voit que $(a - \epsilon \sqrt{-1})^n = A - B\epsilon \sqrt{-1}$.

2°. La racine quarrée de $a \pm \epsilon \sqrt{-1}$ est de la forme $a \pm b \sqrt{-1}$.

Pour démontrer cette propriété, nous poserons

$$(1) \dots \begin{cases} \sqrt{a + \epsilon \sqrt{-1}} + \sqrt{a - \epsilon \sqrt{-1}} = A, \\ \sqrt{a + \epsilon \sqrt{-1}} - \sqrt{a - \epsilon \sqrt{-1}} = B; \end{cases}$$

d'où $A^2 = 2(a + \sqrt{a^2 + \epsilon^2})$, $B^2 = 2(a - \sqrt{a^2 + \epsilon^2})$.

La racine quarrée de $a^2 + \epsilon^2$ étant toujours plus grande que a , on voit que A^2 est positif et que B^2 est négatif.

Soit donc $A^2 = 4a^2$, $B^2 = -4b^2$; a et b seront réels, et on aura $A = 2a$, $B = 2b \sqrt{-1}$.

D'ailleurs, les relations (1) donnent

$A + B = 2 \sqrt{a + \epsilon \sqrt{-1}}$, $A - B = 2 \sqrt{a - \epsilon \sqrt{-1}}$; d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{a + \epsilon \sqrt{-1}} &= \frac{1}{2}(A + B) = a + b \sqrt{-1} \\ \sqrt{a - \epsilon \sqrt{-1}} &= \frac{1}{2}(A - B) = a - b \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donner maintenant la démonstration du principe énoncé au commencement de cet article.

Ce principe est évident lorsque l'équation est de degré impair; car elle a nécessairement une racine réelle a (n° 263),

qui est comprise dans la forme générale $x + C\sqrt{-1}$, en faisant $C = 0$.

Il ne reste donc qu'à considérer une équation de degré pair

$$(1) \dots x^{2m} + Px^{2m-1} + \dots + Rx^2 + Sx + T = 0.$$

Pour démontrer que cette équation a une racine $x + C\sqrt{-1}$, nous concevrons qu'on forme l'équation (2)... $\phi(y) = 0$ dont les racines sont les diverses valeurs que prend la fonction $x + x' + pxz'$ lorsqu'on y met successivement au lieu de x et de x' les diverses racines $a, b, c, d, e, \dots, h, i, k$, de l'équation (1); de sorte que les racines de l'équation (2) sont

$$(3) \dots \begin{cases} a + b + pab, & a + c + pac, \dots, & a + k + pak, \\ b + c + pbc, & b + d + pbd, \dots, & b + k + pbk, \\ c + d + pcd, & c + e + pce, \dots, & c + k + pck, \\ \vdots & & \\ h + i + phi, & i + k + pik. \end{cases}$$

On a vu (n° 324) que p désignant une quantité arbitraire, l'équation (2) est du degré $n = m(2m - 1)$.

Cela posé :

1°. Lorsque l'exposant $2m$ n'est divisible qu'une seule fois par 2, le nombre n est impair, car m et $2m - 1$ sont impairs. L'équation (2) étant de degré impair, chaque valeur réelle arbitraire de p fournit une équation qui admet au moins une valeur réelle de y (n° 263).

Les valeurs réelles de y , correspondantes aux valeurs réelles arbitraires de p , peuvent contenir successivement les $2m$ racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation (1); mais la fonction $x + x' + pxz'$, n'ayant que les n valeurs (3), il en résulte qu'après avoir donné $n + 1$ valeurs à p , on aura formé $n + 1$ équations en y , qui admettront chacune une racine réelle; de sorte qu'on aura trouvé au moins deux valeurs réelles de y qui seront composées des mêmes valeurs a, b , de x, x' , et de valeurs différentes de p .

Par exemple, lorsque $2m = 4$, l'équation (1) a quatre racines a, b, c, d ; on a $n = 6$, et les six racines de l'équation (2)... $\phi(y) = 0$ sont

$$(4) \dots \begin{cases} a + b + pab, & a + c + pac, & a + d + pad, \\ b + c + pbc, & b + d + pbd, & c + d + pcd. \end{cases}$$

Pour chaque valeur réelle de p , l'équation (2) ayant une racine réelle, l'une des six valeurs (4) de y est réelle.

Supposons que les six valeurs réelles de y , correspondantes aux valeurs réelles $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, de p , soient

$$\begin{aligned} a + b + p_1 ab, & \quad a + c + p_2 ac, & \quad a + d + p_3 ad, \\ b + c + p_4 bc, & \quad b + d + p_5 bd, & \quad c + d + p_6 cd. \end{aligned}$$

Si l'on donne à p une septième valeur réelle p_7 , il faudra que la valeur réelle correspondante de y renferme une des six combinaisons (4) des racines a, b, c, d , telle que $a + b + p_7 ab$; de sorte que $a + b + p_1 ab$ et $a + b + p_7 ab$, seront réels.

Soient donc a' et a'' deux valeurs réelles de y , composées des mêmes racines a, b , et de valeurs réelles p', p'' , de p ; on aura

$$a' = a + b + p' ab \quad \text{et} \quad a'' = a + b + p'' ab.$$

Si l'on regarde $a + b$ et ab comme deux inconnues, ces équations donneront

$$a + b = \frac{p' a'' - p'' a'}{p' - p''}, \quad ab = \frac{a' - a''}{p' - p''}.$$

Les quantités a', a'', p', p'' , étant réelles, ces expressions de $a + b$ et de ab sont réelles. Mais, a et b étant deux racines différentes de l'équation (1), le premier membre de cette équation est divisible exactement par le produit $x^2 - (a + b)x + ab$ des facteurs $x - a, x - b$, correspondans à ces racines (n° 229); d'ailleurs les coefficients $a + b, ab$, étant réels, l'équation $x^2 - (a + b)x + ab = 0$, fournit deux racines de l'équation (1) qui sont nécessairement de la forme $\alpha \pm \epsilon \sqrt{-1}$.

Par conséquent: *Toute équation dont le degré est divisible une seule fois par 2, admet une racine de la forme $\alpha \pm \epsilon \sqrt{-1}$.*

2°. Lorsque l'exposant $2m$ est divisible deux fois par 2, c'est-à-dire par 4, le nombre $n = m(2m - 1)$ n'est divisible qu'une seule fois par 2; car $2m - 1$ étant toujours impair, n et m sont divisibles le même nombre de fois par 2. Le degré n de l'équation (2) $\dots \phi(y) = 0$ étant divisible une seule fois par 2, il

résulte de (1°) que pour chaque valeur réelle de p , l'équation (2) donne une valeur de y de la forme $\alpha + \zeta \sqrt{-1}$. Ces valeurs de y , de la forme $\alpha + \zeta \sqrt{-1}$, peuvent contenir successivement les $2m$ valeurs $a, b, c, \dots, k$, des racines z, z' , de l'équation (1); mais la fonction $z + z' + pzz'$ n'ayant que n valeurs différentes, on verra comme (1°) qu'après avoir donné $n + 1$ valeurs à p , on aura formé $n + 1$ équations en y qui admettront chacune une racine de la forme $\alpha + \zeta \sqrt{-1}$; de sorte qu'on aura trouvé au moins deux valeurs $\alpha' + \zeta' \sqrt{-1}$, $\alpha'' + \zeta'' \sqrt{-1}$, de y , qui seront composées des mêmes valeurs a, b , de z , et de valeurs réelles différentes p', p'' , de p . On aura donc

$$\alpha' + \zeta' \sqrt{-1} = a + b + p'ab, \quad \alpha'' + \zeta'' \sqrt{-1} = a + b + p''ab.$$

Si l'on regarde $a + b$ et ab comme deux inconnues, ces équations donneront

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{p'\alpha'' - p''\alpha'}{p' - p''} + \left(\frac{p'\zeta'' - p''\zeta'}{p' - p''} \right) \sqrt{-1}, \\ ab &= \frac{\alpha' - \alpha''}{p' - p''} + \left(\frac{\zeta' - \zeta''}{p' - p''} \right) \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Les expressions de $a + b$ et de ab étant de la forme $\alpha + \zeta \sqrt{-1}$, on déduit des principes du n° 326 (1° et 2°), que les racines a, b , de l'équation (1), fournies par l'équation

$$(5) \dots x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

sont aussi de la forme $\alpha + \zeta \sqrt{-1}$.

En effet, l'équation (5) donne

$$x = \frac{1}{2}(a + b) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a + b)^2 - ab},$$

et les quantités $a + b, ab$, étant de la forme $\alpha + \zeta \sqrt{-1}$, ces deux valeurs de x sont de la forme $q + r\sqrt{-1} \pm \sqrt{\alpha + \zeta \sqrt{-1}}$; et comme la racine quarrée de $\alpha + \zeta \sqrt{-1}$ est de la même forme, on voit que les racines a, b , de l'équation (1), sont de la forme $\alpha + \zeta \sqrt{-1}$.

Par conséquent, lorsque le degré d'une équation n'est divisible que deux fois par 2, cette équation a une racine de la forme $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$.

3°. Si le degré $2m$ de l'équation (1) est divisible trois fois par 2, c'est-à-dire par 2^3 , le degré n de l'équation $\varphi(y) = 0$ ne sera divisible que deux fois par 2; et d'après (2°), pour chaque valeur réelle arbitraire de p , l'équation (2) admettra une valeur de y de la forme $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$. Mais on a prouvé (2°) que lorsque l'équation (2) a une racine de la forme $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$, l'équation (1) jouit de la même propriété; l'équation (1) a donc une racine de la forme $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$.

Continuant ainsi à passer du cas où l'exposant $2m$ de l'équation (1) est divisible un certain nombre de fois par 2, au cas où cet exposant est divisible une fois de plus par 2, on voit que toute équation de degré pair a une racine de la forme $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$. Ce qui démontre le principe énoncé (page 549).

327. Quand $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$ est racine d'une équation, $\alpha - \zeta\sqrt{-1}$ est racine de la même équation.

En effet, soit une équation

$$(1) \dots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx^2 + sx + t = 0.$$

Il résulte de la remarque de la page 549, que si l'on fait successivement $x = \alpha + \zeta\sqrt{-1}$, $x = \alpha - \zeta\sqrt{-1}$, dans le premier membre de l'équation (1), les deux résultats de ces substitutions seront de la forme $A + B\zeta\sqrt{-1}$, $A - B\zeta\sqrt{-1}$.

Or, $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$ étant racine de l'équation (1), $A + B\zeta\sqrt{-1}$ doit être nul; ce qui exige que A et B soient séparément nuls; $A - B\zeta\sqrt{-1}$ est donc également nul; $\alpha - \zeta\sqrt{-1}$ est donc racine de l'équation (1).

328. Toute équation de degré pair admet un facteur réel (*)

(*) On dit qu'un facteur $x^2 + px + q$ est réel, quand p et q sont réels.

du second degré. En effet, si cette équation a une racine réelle a , en divisant son premier membre par $x-a$, on obtiendra une équation de degré impair qui déterminera une seconde racine réelle b de $f(x)=0$; et $f(x)$ admettra le facteur réel du second degré $x^2-(a+b)x+ab$.

Si l'équation $f(x)=0$ n'a pas de racine réelle, elle aura une racine imaginaire de la forme $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$ (n° 326); et par suite $\alpha - \zeta\sqrt{-1}$ sera une autre racine de $f(x)=0$ (n° 327); $f(x)$ sera donc exactement divisible par le produit $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\zeta^2$ des facteurs $x-\alpha-\zeta\sqrt{-1}$, $x-\alpha+\zeta\sqrt{-1}$, correspondans aux deux racines *imaginaires conjuguées*.

$$\alpha + \zeta\sqrt{-1}, \alpha - \zeta\sqrt{-1}.$$

Le principe est donc démontré.

329. *Toute équation d'un degré pair $2m$ est décomposable en m facteurs réels du second degré.*

En effet, d'après le principe précédent, l'équation

$$(1) \dots x^{2m} + px^{2m-1} + qx^{2m-2} + \dots + sx + t = 0$$

ayant un facteur réel du second degré, la division du premier membre par ce facteur, donnera une équation du degré pair $2m-2$, qui, par une raison semblable, admettra un diviseur réel du second degré; et en continuant ces divisions jusqu'à ce que le dernier quotient soit du second degré, on aura décomposé le premier membre de l'équation (1) en m facteurs réels du second degré.

330. *Dans toute équation de degré impair*

$$x^{2n+1} + px^{2n} + \text{etc.} = 0,$$

le premier membre est le produit d'un facteur réel du premier degré, par n facteurs réels du second degré; car cette équation ayant toujours une racine réelle a , la division du premier membre par $x-a$ fournit un quotient du degré pair $2n$ qui est décomposable en n facteurs réels du second degré, (n° 329).

REMARQUE. Il résulte des propriétés des n° 329 et 330, que les racines d'une équation $f(x) = 0$ ne peuvent être que de la forme $a + c\sqrt{-1}$; car en égalant à zéro les différens facteurs réels du premier ou du second degré de $f(x)$, on obtiendra des valeurs de x de la forme $a + c\sqrt{-1}$, et ces valeurs de x sont des racines de $f(x) = 0$.

331. Le polynome entier $x^m + px^{m-1} + \dots + sx + t$ étant toujours décomposable en m facteurs réels du second degré (n° 329), la division de ce polynome par $x^2 + ax + b$, conduira à un reste de la forme $Ax + B$, et le système $A = 0$, $B = 0$, admettra au moins m solutions réelles. On a vu (n° 311) comment on trouve ces solutions; et chaque facteur réel du second degré, égalé à zéro, déterminera deux racines réelles ou imaginaires de l'équation (2). . . $x^m + px^{m-1} + \dots + sx + t = 0$.

Ce procédé fournit le moyen de calculer les racines réelles et imaginaires de l'équation (2). On en a donné des exemples dans le n° 311 (pages 494 et 495).

La recherche des racines imaginaires d'une équation se trouve ainsi ramenée à déterminer les solutions réelles du système de deux équations entre deux inconnues.

332. Quand l'équation aux quarrés des différences $\phi(y) = 0$, des racines de $f(x) = 0$, n'a que des variations de signes, l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles; car si une valeur imaginaire de x réduisait $f(x)$ à zéro, cette valeur serait nécessairement de la forme $a + b\sqrt{-1}$, a et b désignant des quantités réelles (n° 326); et l'on a vu (n° 327) que la valeur $x = a - b\sqrt{-1}$ réduirait aussi $f(x)$ à zéro. La différence entre ces deux racines imaginaires conjuguées étant $2b\sqrt{-1}$, l'équation $\phi(y) = 0$ aurait une racine réelle négative $-4b^2$, puisque le quarré de $2b\sqrt{-1}$ est $-4b^2$; l'équation $\phi(y) = 0$, qui n'a que des variations de signes, admettrait donc une racine négative; ce qui est impossible (page 368, 2^e Remarque). Une valeur imaginaire de x ne peut donc pas satisfaire à l'équation $f(x) = 0$; ce qui démontre le principe énoncé.

§ IV. De l'Élimination par les fonctions symétriques, et du degré de l'équation finale.

333. La théorie des fonctions symétriques donne le moyen de former directement l'équation finale qui résulte de l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues.

En effet, soient les deux équations générales

$$(1) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

$$(2) \dots x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + P_3 x^{n-3} + \dots + P_{n-1} x + P_n = 0,$$

dans lesquelles les coefficients $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, sont des fonctions connues de y .

Si l'on pouvait résoudre l'équation (1) par rapport à x , on obtiendrait m valeurs $a, b, c, \dots, k$, de x , qui seraient des fonctions connues de y , et en les substituant successivement dans l'équation (2), les m équations résultantes

$$(3) \dots \begin{cases} a^n + P_1 a^{n-1} + P_2 a^{n-2} + \dots + P_{n-1} a + P_n = 0, \\ b^n + P_1 b^{n-1} + P_2 b^{n-2} + \dots + P_{n-1} b + P_n = 0, \\ \vdots \\ k^n + P_1 k^{n-1} + P_2 k^{n-2} + \dots + P_{n-1} k + P_n = 0, \end{cases}$$

détermineraient toutes les valeurs de y qui conviennent aux équations proposées; de sorte que pour obtenir l'équation finale $\phi(y) = 0$ qui résulte de l'élimination de x entre les équations (1), (2), il suffit d'égaliser à zéro le produit des premiers membres des équations (3). Ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu dans le n° 282.

Ce dernier principe peut aussi se déduire des propriétés du n° 284, en concevant qu'on décompose les premiers membres des équations proposées, en facteurs du premier degré par rapport à x ; car les m valeurs de x tirées de l'équation (1) étant $a, b, c, \dots, k$, cette équation revient à

$$(4) \dots (x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - k) = 0,$$

et si l'on désigne par $A, B, C, \dots, N$, les n valeurs de x tirées de l'équation (2), cette équation reviendra à

$$(5) \dots (x - A) (x - B) (x - C) \dots (x - N) = 0.$$

Les quantités $a, b, c, \dots, k, A, B, C, \dots, N$, sont des fonctions de y .

Or, on a vu (n° 284), que toute valeur de y qui satisfait au système des équations (4), (5), jouit de la propriété, quand on la substitue dans les premiers membres de ces équations, d'introduire un commun diviseur en x entre les fonctions de x qui en résultent; et que réciproquement, toute valeur de y qui introduit un commun diviseur en x entre les premiers membres des équations (4), (5), convient au système de ces équations.

Une valeur de y qui convient aux équations proposées, doit donc satisfaire à l'une des mn conditions

$$\begin{aligned} a &= A, \quad a = B, \quad a = C, \dots, \quad a = N, \\ b &= A, \quad b = B, \quad b = C, \dots, \quad b = N, \\ &\vdots \\ k &= A, \quad k = B, \quad k = C, \dots, \quad k = N; \end{aligned}$$

et réciproquement, toute valeur de y qui satisfait à une de ces mn conditions, convient au système des équations (4), (5).

Par conséquent, pour former l'équation en y , qui détermine toutes les bonnes valeurs de y et qui n'en donne pas d'autres, il suffit d'égaliser à zéro le produit des mn facteurs

$$\begin{aligned} a - A, \quad a - B, \quad a - C, \dots, \quad a - N, \\ b - A, \quad b - B, \quad b - C, \dots, \quad b - N, \\ &\vdots \\ k - A, \quad k - B, \quad k - C, \dots, \quad k - N. \end{aligned}$$

Mais, on obtiendrait le même résultat en faisant successivement $x = a, x = b, \dots, x = k$, dans (5), et en égalant à zéro le produit des premiers membres des m équations résultantes,

$$\begin{aligned} (a - A) (a - B) (a - C) \dots (a - N) &= 0, \\ (b - A) (b - B) (b - C) \dots (b - N) &= 0, \\ &\vdots \\ (k - A) (k - B) (k - C) \dots (k - N) &= 0. \end{aligned}$$

Or, l'équation (5) n'est que l'équation (2) mise sous une autre forme; il revient donc au même de faire successivement $x=a$, $x=b$, $x=c$, ..., $x=k$, dans (2), ce qui fournit les m équations (3), et d'égaliser ensuite à zéro le produit des premiers membres des m équations (3).

Par conséquent, si les fonctions de y représentées par a , b , c , ..., k , étaient connues, on obtiendrait l'équation finale demandée $\varphi(y) = 0$, en égalant à zéro le produit des premiers membres des m équations (3).

Mais, le but qu'on se propose étant de former l'équation $\varphi(y) = 0$, sans résoudre l'équation (1) par rapport à x , les fonctions a , b , c , ..., k , sont inconnues; de sorte que la question se réduit à *faire disparaître les inconnues, a , b , c , ..., k , qui se trouvent dans le produit des premiers membres des équations (3).*

On y parvient à l'aide des propriétés des fonctions symétriques. En effet, les m équations (3) ne faisant que se changer les unes dans les autres, lorsqu'on change l'une quelconque des quantités a , b , c , ..., k , en une autre de ces quantités, leur produit $\varphi(y)$ qui contient, a , b , c , ..., k , P_1 , P_2 , ..., P_n , est une fonction symétrique des m quantités a , b , c , ..., k ; et par conséquent, si l'on effectue les multiplications, les termes du produit $\varphi(y)$, groupés d'une manière convenable, seront des fonctions symétriques des racines a , b , c , ..., k , de l'équation (1); on pourra donc exprimer ces fonctions symétriques au moyen des coefficients p_1 , p_2 , p_3 , ..., p_n , de cette équation (n° 322); et comme ce produit contient les coefficients P_1 , P_2 , P_3 , ..., P_n , de l'équation (2), on parviendra à une expression de $\varphi(y)$ qui ne renfermera plus les racines inconnues a , b , c , ..., k , et qui sera une fonction rationnelle des coefficients des deux équations proposées. De sorte que $(\varphi y) = 0$ sera l'équation finale en y qui détermine toutes les bonnes valeurs de y et qui n'en donne pas d'autres.

Ce procédé d'élimination offre le grand avantage de fournir directement l'équation finale qui ne renferme que les bonnes valeurs de y ; mais il a l'inconvénient de conduire à des calculs

plus compliqués que ceux qui résultent de la méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur.

1^{er} EXEMPLE. Soit proposé d'éliminer x entre les équations

$$(1) \dots x^2 + px + q = 0, \quad (2) \dots x^2 + Px + Q = 0,$$

dans lesquelles p, q, P et Q , sont des fonctions données de y . Si a et b désignent les valeurs de x , fonction de y , qui satisfont à la première équation, quelle que soit y , ces valeurs devant convenir à la seconde équation, on a

$$a^2 + Pa + Q = 0, \quad b^2 + Pb + Q = 0,$$

et l'on a démontré que l'équation qui détermine toutes les bonnes valeurs de y et qui n'en donne pas d'autres, est

$$(a^2 + Pa + Q)(b^2 + Pb + Q) = 0,$$

on en effectuant la multiplication indiquée,

$$(3) \dots a^2b^2 + P(ab^2 + ba^2) + Q(a^2 + b^2) + P^2ab + PQ(a + b) + Q^2 = 0.$$

Les coefficients de P, Q, P^2, PQ , sont des fonctions symétriques des racines a, b , de l'équation (1), et l'on a

$$a + b = -p, \quad ab = q, \quad (\text{n}^\circ 225, \text{ page } 365).$$

Il ne reste donc qu'à évaluer les fonctions symétriques $ab^2 + ba^2, a^2 + b^2$, en fonction de p et q .

Or, d'après les formules des n^{os} 320 et 321, on a

$$s_1 = -p, \quad a^2 + b^2 = s_2 = p^2 - 2q, \quad s_3 = 3pq - p^3, \\ ab^2 + ba^2 = T(ab^2) = s_1s_2 - s_3 = -pq.$$

La substitution de ces valeurs de $a+b, ab, a^2+b^2, ab^2+ba^2$, dans (3), conduit à l'équation finale en y ,

$$q^2 - Ppq + Q(p^2 - 2q) + P^2q - PQp + Q^2 = 0.$$

On peut calculer directement les fonctions symétriques $ab^2 + ba^2, a^2 + b^2$, car

$$ab^2 + ba^2 = ab(b + a) = q(-p) = -pq,$$

et la relation $a + b = -p$ donne

$$p^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \quad a^2 + b^2 = p^2 - 2ab = p^2 - 2q.$$

2^e EXEMPLE. On propose d'éliminer x entre les équations

$$x^3 + px + q = 0, \quad x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

les coefficients p, q, P, Q, R , sont des fonctions de y .

Si a et b désignent les racines de la première équation, on aura $a + b = -p$, $ab = q$, et l'équation qui déterminera toutes les bonnes valeurs de y sera

$$(a^3 + Pa^2 + Qa + R)(b^3 + Pb^2 + Qb + R) = 0.$$

En effectuant la multiplication indiquée, on parviendra à l'équation

$$(1) \dots \left\{ \begin{array}{l} a^3b^3 + P(a^3b^2 + b^3a^2) + Q(ab^3 + ba^3) + P^2a^2b^2 \\ + Q^2ab + R(a^3 + b^3) + PQ(a^2b + b^2a) \\ + PR(a^2 + b^2) + QR(a + b) + R^2 \end{array} \right\} = 0,$$

dans laquelle les différens coefficients $P, Q, P^2, Q^2, R, PQ, PR, QR$, sont multipliés par des fonctions symétriques des racines a, b de l'équation $x^3 + px + q = 0$. Il ne reste donc qu'à évaluer les fonctions symétriques $T(a^3b^3), T(ab^3), T(a^3), T(a^2b), T(a^2)$, au moyen des coefficients p, q .

Si l'on représente toujours par s_1, s_2, s_3 , etc., les sommes $a + b, a^2 + b^2, a^3 + b^3$, etc., les formules (4) (page 531), donneront

$$s_1 + p = 0, \quad s_2 + ps_1 + 2q = 0, \quad s_3 + ps_2 + qs_1 = 0,$$

$$s_4 + ps_3 + qs_2 = 0, \quad s_5 + ps_4 + qs_3 = 0;$$

d'où :

$$s_1 = -p, \quad s_2 = p^2 - 2q, \quad s_3 = -p^3 + 3pq,$$

$$s_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2, \quad s_5 = -p^5 + 5p^3q - 5pq^2.$$

D'ailleurs la formule $T(a^2b^2) = s_4s_2 - s_5s_1$ (page 534),

conduit à $T(a^3b^3) = s_3s_2 - s_5$,

$$T(ab^3) = s_1s_3 - s_4, \quad T(a^2b) = s_2s_1 - s_3.$$

Substituant pour s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 , leurs valeurs en fonction de p et q , on trouvera

$$T(a^3b^3) = -pq^2, \quad T(ab^3) = p^2q - 2q^2, \quad T(a^2b) = -pq.$$

Et en remplaçant les fonctions symétriques qui entrent dans (1), par leurs valeurs en fonction de p et q , on parviendra à l'équation finale demandée

$$(2) \dots \left\{ \begin{array}{l} q^3 - Ppq^2 + Q(p^2q - 2q^3) + P^3q^2 + Q^3q + R(3pq - p^3) \\ - PQpq + PR(p^3 - 2q) - pQR + R^3 \end{array} \right\} = 0.$$

Il est facile de calculer directement les fonctions symétriques $s_1, s_2, s_3, T(a^3b^3), T(ab^3), T(a^2b)$; car on a, $a + b = -p, ab = q$,

$$p^2 = a^2 + b^2 + 2ab = s_2 + 2q, \text{ d'où } s_2 = p^2 - 2q;$$

$$(a + b)^3 = -p^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = s_3 + 3q(-p);$$

$$\text{d'où } s_3 = -p^3 + 3pq.$$

$$T(a^3b^3) = a^3b^3(a + b) = q^3(-p) = -pq^3,$$

$$T(ab^3) = ab(a^2 + b^2) = q(p^2 - 2q),$$

$$T(a^2b) = ab(a + b) = q(-p) = -pq.$$

Pour appliquer la formule (2), nous proposerons d'éliminer x entre les équations

$$x^2 - 2yx + y^2 - y = 0,$$

$$x^3 - 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x - y^3 + y^2 - 2y = 0.$$

$$\text{Dans ce cas, on a } p = -2y, \quad q = y^2 - y,$$

$$P = -3y, \quad Q = 3y^2 - y + 1, \quad R = -y^3 + y^2 - 2y;$$

et en substituant ces valeurs de p, q, P, Q, R , dans (2), on trouve que l'équation finale est $y^4 - y = 0$. Ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu (pages 435 et 436).

Si les équations données sont

$$x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0,$$

$$x^3 + 2yx^2 + 2y(y - 2)x + y^2 - 4 = 0,$$

on déduira de la formule (2), que le résultat de l'élimination de x entre ces deux équations est

$$y^4 - 9y^3 + 30y^2 - 44y + 24 = 0.$$

Ce qui s'accorde avec le résultat obtenu dans le n° 289.

334. *Lorsqu'on élimine une inconnue entre deux équations à deux inconnues, le degré de l'équation finale est tout au plus égal au produit des degrés des équations entre lesquelles on élimine.*

En effet, soient les deux équations générales à deux inconnues x et y ,

$$(1) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

$$(2) \dots x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \dots + P_{n-1} x + P_n = 0.$$

L'équation (1) étant supposée du $m^{\text{ième}}$ degré, les plus forts exposans de y dans p_1, p_2, p_3 , etc., sont 1, 2, 3, etc.; et l'équation (2) étant du $n^{\text{ième}}$ degré, les plus forts exposans de y dans P_1, P_2, P_3 , etc., sont 1, 2, 3, etc. De sorte que les indices des lettres p, P , dans les coefficients $p_1, p_2, \dots, p_m, P_1, P_2, \dots, P_n$, marquent les degrés de ces coefficients par rapport à y .

Pour éliminer x entre les équations (1), (2), représentons par $a, b, c, \dots, k$, les m racines de l'équation (1); on a vu (n° 333) que l'équation finale en y s'obtient en faisant successivement $x = a, x = b, \dots, x = k$, dans le premier membre de l'équation (2), et en égalant à zéro le produit des m polynômes résultans

$$(3) \dots \begin{cases} a^n + P_1 a^{n-1} + P_2 a^{n-2} + \dots + P_{n-1} a + P_n, \\ b^n + P_1 b^{n-1} + P_2 b^{n-2} + \dots + P_{n-1} b + P_n, \\ c^n + P_1 c^{n-1} + P_2 c^{n-2} + \dots + P_{n-1} c + P_n, \\ \dots \\ k^n + P_1 k^{n-1} + P_2 k^{n-2} + \dots + P_{n-1} k + P_n. \end{cases}$$

Pour déterminer le degré du produit des m polynômes (3), nous observerons d'abord que si l'on multiplie entre eux les h termes qui se trouvent dans l'une quelconque des colonnes verticales (3), leur produit sera du degré mn par rapport à y .

En effet, ces m termes étant de la forme

$$P_a a^{n-a}, P_b b^{n-a}, P_c c^{n-a}, \dots, P_k k^{n-a},$$

leur produit est $(P_a)_m (abc \dots k)^{n-a}$, ou $(P_a)_m (\pm p_m)^{n-a}$, car $abc \dots k = \pm p_m$ (n° 225). Or, les plus grands exposans

de y dans P_a et p_m sont respectivement a et m ; le plus fort exposant de y dans $(P_a)^m (\pm p_m)^{n-a}$ est donc $am + m(n-a)$, ou $m \times n$.

Nous allons faire voir que tous les autres termes du produit total des m polynômes (3) sont aussi du degré mn ; à cet effet, considérons un terme quelconque de chacun des m polynômes (3); il résulte de la notation adoptée, que ces m termes seront respectivement de la forme

$$P_a a^{n-a}, P_c b^{n-c}, P_\gamma c^{n-\gamma}, \dots, P_k k^{n-k}$$

et que les plus forts exposants de y dans les coefficients $P_a, P_c, P_\gamma, \dots, P_k$ seront marqués par les indices $a, c, \gamma, \dots, k$. Multipliant donc ces m termes entre eux, le résultat

$$(P_a P_c P_\gamma \dots P_k) (a^{n-a} b^{n-c} c^{n-\gamma} \dots k^{n-k}),$$

représentera un terme quelconque du produit total.

D'ailleurs, $P_a P_c P_\gamma \dots P_k$ sera encore le coefficient d'autres termes du produit total, puisque tous les coefficients $P_a, P_c, P_\gamma, \dots, P_k$ entrent dans chacun des m polynômes (3).

Si l'on réunit tous les termes du produit total qui sont affectés du coefficient $P_a P_c P_\gamma \dots P_k$, la somme des quantités qui multiplieront ce coefficient sera nécessairement composée de tous les termes qui entrent dans la fonction symétrique $T(a^{n-a} b^{n-c} c^{n-\gamma} \dots k^{n-k})$; car le produit total devant être une fonction symétrique des m racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation (i), l'ensemble des termes de ce produit qui sont affectés d'un même coefficient $P_a P_c P_\gamma \dots P_k$, doit être une fonction symétrique de $a, b, c, \dots, k$ (*).

Cela est d'ailleurs évident; car si la somme des termes qui multiplient $P_a P_c P_\gamma \dots P_k$, n'était pas une fonction symétrique des quantités $a, b, c, \dots, k$, cette somme ne resterait pas la

(*) Les exemples des pages 560 et 561, vérifient cette propriété.

même lorsqu'on changerait quelques-unes des quantités $a, b, c, \dots, k$, les unes dans les autres; le produit total changerait donc; ce qui est impossible, puisque ce produit est une fonction symétrique de $a, b, c, \dots, k$.

Le terme général du produit des m polynomes (3) est donc

$$(P_a P_c P_\gamma \dots P_u) \times T(a^{n-a} b^{n-c} c^{n-\gamma} \dots k^{n-u}).$$

Il s'agit de faire voir que le plus fort exposant de y dans ce terme général est mn .

Les plus grands exposans de y dans $P_a, P_c, P_\gamma, \dots, P_u$ étant respectivement $a, c, \gamma, \dots, u$, le coefficient $P_a P_c P_\gamma \dots P_u$ est du degré $a + c + \gamma + \dots + u$, par rapport à y .

Tout se réduit donc à prouver que $a, b, c, \dots, k$, exprimant les m racines de l'équation la plus générale du $n^{\text{ième}}$ degré à deux inconnues x, y ,

$$(1) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

le plus fort exposant de y dans la fonction symétrique...

$T(a^{n-a} b^{n-c} c^{n-\gamma} \dots k^{n-u})$ est la somme $mn - (a + c + \gamma + \dots + u)$ des m exposans $n - a, n - c, n - \gamma, \dots, n - u$, des m lettres $a, b, c, \dots, k$, qui entrent dans cette fonction.

Or, les formules (4) (page 531),

$$s_1 + p_1 = 0, \quad s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0, \quad s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0, \text{ etc.}$$

démontrent que les plus forts exposans de y dans les sommes $s_1, s_2, s_3, \dots$, etc., sont respectivement égaux aux indices $1, 2, 3, \dots$, etc., de ces sommes; car p_1 étant du 1^{er} degré en y , la 1^{re} relation $s_1 + p_1 = 0$ prouve que s_1 sera aussi du 1^{er} degré; dans la 2^{e} relation $s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0$, les termes $p_1 s_1, 2p_2$ étant du 2^{e} degré en y , s_2 sera du même degré; et ainsi de suite.

Une somme quelconque s_r est donc du degré r en y .

Les sommes s_a, s_c, s_γ , etc., étant respectivement des degrés a, c, γ , etc., par rapport à y , les formules générales du n° 321,

$$T(a^{\alpha}b^{\zeta}) = s_{\alpha} s_{\zeta} - s_{\alpha+\zeta},$$

$$T(a^{\alpha}b^{\zeta}c^{\gamma}) = s_{\alpha} s_{\zeta} s_{\gamma} - s_{\alpha} s_{\zeta+\gamma} - s_{\zeta} s_{\alpha+\gamma} - s_{\gamma} s_{\alpha+\zeta} + 2s_{\alpha+\zeta+\gamma}, \text{ etc.},$$

font voir que les plus forts exposans de γ dans les fonctions symétriques $T(a^{\alpha}b^{\zeta})$, $T(a^{\alpha}b^{\zeta}c^{\gamma})$, etc., sont respectivement égaux aux sommes $\alpha + \zeta$, $\alpha + \zeta + \gamma$, etc., quels que soient α , ζ , γ , etc. Le plus grand exposant de γ dans la fonction symétrique $T(a^{n-\alpha}b^{n-\zeta}c^{n-\gamma} \dots k^{n-\omega})$ est donc égal à la somme $mn - (\alpha + \zeta + \gamma + \dots + \omega)$ des m exposans $n - \alpha$, $n - \zeta$, $n - \gamma$, ..., $n - \omega$.

Mais, on a vu précédemment que $P_{\alpha} P_{\zeta} P_{\gamma} \dots P_{\omega}$ est du degré $\alpha + \zeta + \gamma + \dots + \omega$, par rapport à γ ; le plus fort exposant de γ dans le terme général

$$(P_{\alpha} P_{\zeta} P_{\gamma} \dots P_{\omega}) \times T(a^{n-\alpha}b^{n-\zeta}c^{n-\gamma} \dots k^{n-\omega}),$$

est donc

$$(\alpha + \zeta + \gamma + \dots + \omega) + mn - (\alpha + \zeta + \gamma + \dots + \omega), \text{ ou } mn.$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

REMARQUE. Tant que les coefficients des inconnues x , y , dans les équations générales (1), (2), (page 563), sont arbitraires, l'élimination de l'une quelconque de ces inconnues conduit à une équation finale du degré mn ; de sorte que ces équations admettent mn solutions communes. Mais, quand des coefficients indéterminés prennent des valeurs particulières ou sont soumis à certaines conditions, des termes de l'équation finale pouvant disparaître, le degré de cette équation et le nombre des solutions communes aux équations primitives peuvent devenir moindres que mn .

Ainsi, dans le 1^{er} exemple de la page 560, lorsqu'on suppose que chacune des équations

$$x^2 + Px + Q = 0, \quad x^2 + Px + Q = 0,$$

est du second degré, l'équation finale en y ,

$$Q^2 - PPQ + Q(P^2 - 2Q) + P^2Q - PQP + Q^2 = 0,$$

est du quatrième degré, car p et P sont du premier degré en y , et les derniers termes q , Q , sont du second degré.

Mais, quand on donne aux coefficients p , q , P , Q , les valeurs particulières

$p = -(3y+2)$, $q = 2y^2+2y$, $P = -5(y-1)$, $Q = 6y^2-11y+4$,
l'équation finale se réduit à

$$y^3 - 9y^2 + 20y - 12 = 0,$$

et les équations proposées

$$x^2 - (3y+2)x + 2y^2 + 2y = 0,$$

$$x^2 - 5(y-1)x + 6y^2 - 11y + 4 = 0,$$

n'admettent que les trois solutions communes

$$y = 1, x = 1 \parallel y = 2, x = 2 \parallel y = 6, x = 14.$$

Et en effet, si l'on résout les équations proposées par rapport à y , on reconnaît qu'elles reviennent à

$$(x-y)(x-2y-2) = 0, (x-2y+1)(x-3y+4) = 0.$$

Pour trouver toutes leurs solutions communes, on pose

$$x-y=0, \quad x-2y+1=0, \quad \text{d'où } y=1, x=1,$$

$$x-y=0, \quad x-3y+4=0, \quad \text{d'où } y=2, x=2,$$

$$x-2y-2=0, \quad x-3y+4=0, \quad \text{d'où } y=6, x=14.$$

Enfin, des valeurs finies de x et y ne pouvant pas satisfaire au dernier système

$$x-2y-2=0, \quad x-2y+1=0,$$

on voit que les équations proposées n'admettent que les trois solutions indiquées.

M. POISSON a démontré directement ce théorème plus général, que lorsqu'on élimine $m-1$ inconnues entre m équations contenant m inconnues, le degré de l'équation finale est égal tout au plus au produit des nombres qui marquent les degrés des m équations données. Les élèves qui voudront connaître cette démonstration pourront consulter le onzième cahier du Journal de l'École Polytechnique (page 119).

§ V. *Démonstration de la formule du binôme de Newton, quel que soit l'exposant de la puissance.*

335. Nous avons vu (page 243), que m désignant un nombre entier positif, le développement de $(x + a)^m$ est

$$x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

Nous allons démontrer que le même développement convient encore lorsque l'exposant m est fractionnaire ou négatif.

$$\text{L'identité } (x + a)^m = \left[x \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right]^m = x^m \left(1 + \frac{a}{x} \right)^m$$

prouve que la $m^{\text{ième}}$ puissance du binôme $x + a$ ne dépend que de la même puissance d'un binôme de la forme $1 + z$.

Il suffit donc de chercher le développement de $(1 + z)^m$.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION.

Lorsque m est un nombre entier positif, on sait que le développement de $(1 + z)^m$ est

$$(1) \dots 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.}$$

Pour trouver quelle est la fonction X à laquelle appartient le développement (1), quand m est un nombre fractionnaire positif $\frac{p}{n}$, nous chercherons le produit de n polynômes de la forme (1); à cet effet nous déterminerons d'abord le produit des polynômes

$$X_1 = 1 + m^1 z + \frac{m^1(m^1-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.},$$

$$X_2 = 1 + m^2 z + \frac{m^2(m^2-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.}$$

Si l'on effectuait la multiplication de ces deux polynômes,

par la méthode ordinaire, la complication des calculs empêcherait d'apercevoir la loi des coefficients des diverses puissances de z dans le produit. Mais, on peut obtenir ce produit, sans effectuer la multiplication, en observant que la forme d'un produit algébrique étant nécessairement indépendante de l'espèce des quantités représentées par les lettres qui entrent dans les facteurs, il en résulte que si l'on peut déterminer la forme du produit quand m' et m'' sont des nombres entiers positifs, cette forme restera la même quels que soient m' et m'' .

Or, quand m' et m'' sont des nombres entiers positifs, les polynômes X_1, X_2 sont les développemens des fonctions $(1+z)^{m'}$, $(1+z)^{m''}$, et le produit de $(1+z)^{m'}$ par $(1+z)^{m''}$ est $(1+z)^{m'+m''}$. D'ailleurs, $m'+m''$ étant un nombre entier positif, on obtient le développement de $(1+z)^{m'+m''}$ en mettant $m'+m''$ au lieu de m dans (1); le produit des polynômes X_1, X_2 est donc

$$(2) \dots X_1 X_2 = 1 + (m' + m'')z + \frac{(m' + m'')(m' + m'' - 1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.}$$

D'après cette formule, on obtiendra le produit du polynôme (2) par le polynôme de même forme

$$X_3 = 1 + m'''z + \frac{m'''(m''' - 1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.},$$

en changeant $m' + m''$ en $m' + m'' + m'''$ dans (2); ce qui revient à changer m en $m' + m'' + m'''$ dans (1). De sorte que

$$X_1 X_2 X_3 = 1 + (m' + m'' + m''')z + \frac{(m' + m'' + m''')(m' + m'' + m''' - 1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.}$$

Si l'on continue à multiplier par des facteurs $X_4, X_5, \dots, X_n$, de même forme, et si l'on représente par r la somme des n nombres $m', m'', m''', \text{etc.}$, correspondans aux n facteurs. $\dots X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, on aura

$$X_1 X_2 X_3 \dots X_n = 1 + rz + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.}$$

Cela posé: pour déterminer la fonction X , lorsque m est un nombre fractionnaire positif $\frac{p}{n}$ (p et n sont des nombres

entiers positifs), nous supposons que chacun des n polynomes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, est égal à X , de sorte que chacune des n quantités $m', m'', m''', \text{etc.}$, devient égale à m ou à $\frac{p}{n}$; le produit de ces n polynomes deviendra X^n , et l'on aura

$$r = \frac{p}{n} + \frac{p}{n} + \frac{p}{n} + \text{etc.} = n \text{ fois } \frac{p}{n} = p.$$

Donc
$$X^n = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.}$$

Mais, p étant un nombre entier positif, on sait que

$$1 + pz + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.} = (1+z)^p;$$

donc
$$X^n = (1+z)^p; \text{ d'où } X = (1+z)^{\frac{p}{n}}.$$

Cette expression de X démontre que m désignant un nombre fractionnaire positif quelconque $\frac{p}{n}$, le polynome (1) est le développement de $(1+z)^m$.

2°. Lorsque m est un nombre négatif, entier ou fractionnaire, on peut le représenter par $-m'$, et m' désigne un nombre positif. Or, il résulte de la formule (2) que

$$XX_1 = 1 + (m+m')z + \frac{(m+m')(m+m'-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.},$$

et dans cette dernière relation, l'hypothèse $m+m' = 0$ donne

$$XX_1 = 1, \text{ d'où } X = \frac{1}{X_1}.$$

D'ailleurs, m' étant supposé un nombre positif, entier ou fractionnaire, on a prouvé que l'expression

$$1 + m'z + \frac{m'(m'-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.}$$

de X_1 , est le développement de $(1+z)^{m'}$; donc

$$X = \frac{1}{(1+z)^{m'}} = (1+z)^{-m'} = (1+z)^m.$$

Par conséquent, lorsque m est un nombre négatif, entier ou fractionnaire, le polynôme (1) (page 598) exprime le développement de $(1+z)^m$.

La formule du binôme

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.}$$

étant ainsi démontrée pour un exposant commensurable, le principe général du n° 13 (page 18), prouve qu'elle convient à un exposant incommensurable quelconque.

DEUXIÈME DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DU BINÔME.

Nous allons démontrer directement la formule du binôme pour un exposant positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

A cet effet, nous prouverons d'abord que toutes les fois que le développement de $(1+z)^m$ est de la forme

$$(1) \dots (1+z)^m = 1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.},$$

les coefficients $b, c, d, \text{etc.}$, peuvent se déduire du coefficient de la première puissance de z , au moyen des formules

$$(2) \dots b = \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}, \quad c = \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc.}$$

De sorte que dans ce cas

$$(3) \dots (1+z)^m = 1 + az + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.}$$

Nous verrons ensuite comment on détermine a .

Pour démontrer cette propriété, en supposant toujours que le développement de $(1+z)^m$ est de la forme (1), nous chercherons deux expressions différentes du développement de $(1+z+h)^m$, suivant les puissances entières positives et croissantes de h ; le coefficient de la première puissance de h devant être le même dans chacun de ces développements, nous en déduirons des équations qui conduiront aux formules (2).

On obtient une première valeur de $(1 + z + h)^m$ en changeant z en $z + h$ dans (1); ce qui donne

$$(4) \dots (1 + z + h)^m = 1 + a(z + h) + b(z + h)^2 + c(z + h)^3 + \text{etc.}$$

Il est facile de calculer le coefficient de la première puissance de h dans chacun des développemens de $(z + h)^2$, $(z + h)^3$, etc.; car d'après ce qu'on a vu (page 24, n° 18), le produit des polynomes entiers

$$1 + a_1 z + c_1 z^2 + \text{etc.}, 1 + a_2 z + c_2 z^2 + \text{etc.}, 1 + a_3 z + c_3 z^2 + \text{etc.}, \dots,$$

étant un polynome entier de la forme

$$1 + (a_1 + a_2 + a_3 \dots) z + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.},$$

il en résulte que n désignant un nombre entier positif, on a

$$(5) \dots (1 + az + cz^2 + \text{etc.})^n = 1 + n az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.};$$

et par conséquent,

$$(6) \dots (1 + z)^n = 1 + nz + B'z^2 + C'z^3 + \text{etc.}$$

Or,
$$(z + h)^n = z^n \left(1 + \frac{h}{z}\right)^n;$$

et en changeant z en $\frac{h}{z}$, la relation (6) donne

$$\left(1 + \frac{h}{z}\right)^n = 1 + n \frac{h}{z} + B' \frac{h^2}{z^2} + \text{etc.}$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette dernière égalité par z^n , on trouvera $(z + h)^n = z^n + n z^{n-1} h + B' z^{n-2} h^2 + \text{etc.}$ Cette dernière formule donnant

$$(z + h)^2 = z^2 + 2zh + \text{etc.}, \quad (z + h)^3 = z^3 + 3z^2 h + \text{etc.}, \dots,$$

on en déduit que le coefficient de la première puissance de h dans le développement (4) de $(1 + z + h)^m$, est la *dérivée*

$$a + 2bz + 3cz^2 + 4dz^3 + \text{etc.} \text{ de } 1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}$$

Pour déterminer une seconde expression de $(1 + z + h)^m$, on observe qu'en changeant z en $\frac{h}{z}$, la relation

$$(1) \dots (1 + z)^m = 1 + az + bz^2 + \text{etc.}$$

donne $\left(1 + \frac{h}{z}\right)^n = 1 + a \frac{h}{z} + b \frac{h^2}{z^2} + \text{etc.};$

et en multipliant les deux membres de cette dernière égalité par z^n , on trouve

$$(z + h)^n = z^n + az^{n-1}h + bz^{n-2}h^2 + \text{etc.}$$

Si l'on change z en $1 + z$, on aura

$$(1 + z + h)^n = (1 + z)^n + a(1 + z)^{n-1}h + b(1 + z)^{n-2}h^2 + \text{etc.}$$

De sorte que le coefficient de la première puissance de h dans ce second développement de $(1 + z + h)^n$, est $a(1 + z)^{n-1}$.

Les deux expressions du coefficient de h dans le développement de $(1 + z + h)^n$, devant être les mêmes, il faut que

$$a(1 + z)^{n-1} = a + 2bz + 3cz^2 + 4dz^3 + \text{etc.}$$

Or, en multipliant les deux membres de cette dernière égalité par $1 + z$, on trouve

$$a(1 + z)^n = a + 2bz + 3cz^2 + 4dz^3 + \text{etc.} \\ + a + 2a| + 2ab| + 3c|$$

D'ailleurs la relation (1) donne

$$a(1 + z)^n = a + a^2z + abz^2 + a^2xz^3 + \text{etc.}$$

Et comme dans ces deux développements de $a(1 + z)^n$ suivant les puissances entières positives et croissantes de z , les coefficients des mêmes puissances de z doivent être respectivement égaux, il faut que

$$2b + a = a^2, \quad 3c + 2b = ab, \quad 4d + 3c = ac, \text{ etc.}; \quad \text{d'où}$$

$$b = \frac{a^2 - a}{2} = \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}, \quad c = \frac{b(a-2)}{3} = \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc.}$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

Ainsi, toutes les fois qu'on sera certain que le développement de $(1 + z)^n$ est de la forme $1 + az + bz^2 + \text{etc.}$, on pourra en conclure que

$$(3) \dots (1 + z)^n = 1 + az + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.}$$

Nous allons démontrer que le développement de $(1+z)^m$ est toujours de la forme $1+az+bz^2+cz^3+\text{etc.}$, et que le coefficient a de la première puissance de z est égal à l'exposant m .

1°. Lorsque m désigne un nombre entier positif, la formule (6) (page 572) prouve que le développement de $(1+z)^m$ est nécessairement de la forme

$$(1+z)^m = 1 + mz + bz^2 + cz^3 + \text{etc.}$$

On a donc $a=m$; et d'après ce qui a été démontré, la relation (3) donne

$$(7) \dots (1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.}$$

REMARQUE. L'exposant m étant un nombre entier positif, ce développement de $(1+z)^m$ ne contient que $m+1$ termes; car d'après la loi évidente qui règne entre les différents termes du développement (7), le $(m+1)^{\text{ième}}$ terme est

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \cdot m} z^m, \text{ ou } z^m,$$

et tous les termes suivans disparaissent, puisqu'ils renferment le facteur $m-m$ qui est zéro. On a donc

$$(8) \dots (1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots + z^m.$$

Il est facile d'en déduire le développement de $(z+h)^m$; car

$$(z+h)^m = z^m \left(1 + \frac{h}{z}\right)^m,$$

et la relation (8) donne

$$\left(1 + \frac{h}{z}\right)^m = 1 + m \frac{h}{z} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{h^2}{z^2} + \dots + \frac{h^m}{z^m};$$

la multiplication des deux membres de cette dernière égalité par z^m conduit à

$$(9) \dots (z+h)^m = z^m + mz^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^{m-2}h^2 + \dots + h^m.$$

La formule du binôme est donc démontrée pour un exposant entier positif quelconque.

2°. Lorsque l'exposant de la puissance que l'on veut développer est un nombre entier négatif, on peut le représenter par $-m$, et m est positif. On a

$$(1+z)^{-m} = \frac{1}{(1+z)^m} = \left(\frac{1}{1+z}\right)^m.$$

Or, le quotient de 1 par $1+z$ est

$$1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \text{etc.}; \text{ donc}$$

$$(1+z)^{-m} = (1 - z + z^2 - z^3 + \text{etc.})^m.$$

Mais, m étant un nombre entier positif, la formule (5) (page 572) prouve que

$$(1 - z + z^2 - z^3 + \text{etc.})^m = 1 - mz + Bz^2 + \text{etc.}$$

Donc, $(1+z)^{-m} = 1 - mz + Bz^2 + \text{etc.}$

On obtiendra donc le développement de $(1+z)^{-m}$ en remplaçant a par $-m$ dans la formule (3) (page 571); ce qui donnera

$$(1+z)^{-m} = 1 - mz + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.}$$

Le nombre m étant entier et positif, ce développement de $(1+z)^{-m}$ se prolonge à l'infini.

3°. Pour démontrer la formule du binôme dans le cas d'un exposant fractionnaire positif ou négatif $\pm \frac{m}{n}$, on observe d'abord que cette formule ayant été démontrée (1°) quand l'exposant est un nombre entier positif, on peut en déduire le moyen d'extraire la racine $n^{\text{ième}}$ d'un polynôme quelconque (n°s 138 et 139). D'ailleurs, on a vu (1° et 2°) que m étant un nombre entier positif, on a

$$(1+z)^m = 1 + mz + bz^2 + \text{etc.},$$

$$(1+z)^{-m} = 1 - mz + b'z^2 + \text{etc.}$$

Si l'on extrait la racine $n^{\text{ième}}$ des deux membres de chaque

égalité, la règle du n° 139 donnera des résultats de la forme

$$(1+z)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}z + Az^2 + \text{etc.},$$

$$(1+z)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n}z + A'z^2 + \text{etc.}$$

On obtiendra donc les développemens de $(1+z)^{\frac{m}{n}}$ et de $(1+z)^{-\frac{m}{n}}$, en remplaçant successivement a par $\frac{m}{n}$ et par $-\frac{m}{n}$ dans la formule (3) (page 571).

Il résulte de ce qui précède, que m désignant un nombre positif ou négatif, entier ou fractionnaire, le développement de $(1+z)^m$ est

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.}$$

REMARQUE. La formule du binôme donne le moyen de déterminer le développement de la racine $m^{\text{ième}}$ d'une quantité composée de plusieurs termes.

Par exemple, pour développer la racine quarrée de $b^2 - 4ca$, on observe que

$$\sqrt{b^2 - 4ca} = b\sqrt{1 - 4cb^{-2}a} = b(1 - 4cb^{-2}a)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtiendra le développement de $(1 - 4cb^{-2}a)^{\frac{1}{2}}$ en faisant $m = \frac{1}{2}$, $z = -4cb^{-2}a$, dans l'expression précédente de $(1+z)^m$; ce qui donnera

$$(1 - 4cb^{-2}a)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2cb^{-2}a - 2c^2b^{-4}a^2 - 4c^3b^{-6}a^3 - \text{etc.}$$

Si l'on multiplie les deux membres par b , on trouvera

$$\sqrt{b^2 - 4ca} = b - 2cb^{-1}a - 2c^2b^{-3}a^2 - 4c^3b^{-5}a^3 - \text{etc.}$$

Ce qui s'accorde avec le résultat auquel on est parvenu dans la page 177.

NOTES.

Note relative à l'extraction de la racine quarrée.

336. Lorsqu'on a trouvé plus de la moitié des chiffres de la plus petite valeur entière approchée, n , de la racine quarrée d'un nombre entier N , si l'on désigne par a la valeur de la partie de la racine déjà obtenue, le RESTE correspondant sera $N - a^2$ (Arith., page 164, n° 129).

Soit représenté par ζ la plus petite valeur entière approchée de la partie de la racine qui reste à obtenir; nous allons démontrer que la division du RESTE par $2a$, donnera ζ ou $\zeta + 1$ unités au quotient.

Il s'agit de prouver que le quotient de $N - a^2$ par $2a$ est compris entre ζ et $\zeta + 2$.

On observera d'abord que a contient autant de chiffres que n ou que $a + \zeta$; car pour exprimer en unités simples la partie de la racine déjà obtenue, il faut mettre autant de zéro à droite de la partie obtenue qu'il y a de chiffres dans ζ (*).

Cela posé, on a $n = a + \zeta$, $\sqrt{N} = a + \zeta + \delta$, $\delta < 1$; d'où

$$N - a^2 = 2a(\zeta + \delta) + (\zeta + \delta)^2, \text{ et } \frac{N - a^2}{2a} = (\zeta + \delta) + \frac{(\zeta + \delta)^2}{2a}.$$

Or, δ est positif et moindre que 1; donc

$$\frac{N - a^2}{2a} > \zeta \text{ et } \frac{N - a^2}{2a} < \zeta + 1 + \frac{(\zeta + 1)^2}{2a}.$$

La question se réduit donc à faire voir que l'on a toujours

$$\frac{(\zeta + 1)^2}{2a} < 1; \text{ ce qui revient à } (\zeta + 1)^2 < 2a.$$

La propriété énoncée sera donc démontrée, si l'on prouve que l'inégalité $(\zeta + 1)^2 < 2a$ a lieu lorsque, a étant le plus petit possible, ζ est le plus grand possible; ce qui revient à supposer que a est l'unité suivie de plusieurs zéro, et que tous les chiffres de ζ sont des 9.

1°. Quand n a $2p$ chiffres, a a aussi $2p$ chiffres. Or, on suppose que a est le plus petit possible et que ζ est le plus grand possible. Par conséquent, a est l'unité suivie de $2p - 1$ zéro ou 10^{2p-1} , et ζ est un nombre formé de $p - 1$

(*) Par exemple, si la partie entière de la racine n étant 42356, on a déjà trouvé les trois premiers chiffres 4, 2, 3, on aura $a = 42300$, $n = 42356$, $\zeta = 56$.

chiffres égaux à 9, ou $10^{2p-1} - 1$. De sorte que

$$a = 10^{2p-1}, \quad c = 10^{2p-1} - 1.$$

On en déduit

$$2a > 10^{2p-2}, \quad (c+1)^2 = 10^{2p-2}, \quad (c+1)^2 < 10^{2p-1}.$$

Donc

$$(c+1)^2 < 2a.$$

2°. Quand n a $2p+1$ chiffres, a est l'unité suivie de $2p$ zéro; c est formé de p chiffres égaux à 9. De sorte que

$$a = 10^{2p}, \quad c = 10^p - 1; \quad \text{d'où} \quad 2a > 10^{2p}, \quad (c+1)^2 = 10^{2p}.$$

Donc

$$(c+1)^2 < 2a.$$

Le principe est donc démontré.

1^{er} EXEMPLE. Soit $N = 201526416$.

La partie entière n de $\sqrt{N}$, ayant 5 chiffres, on cherche ses trois premiers chiffres par la méthode ordinaire (*Arith.* n° 128, page 161); ces chiffres sont 1, 4, 1; ils valent 14100 unités; le reste correspondant étant 2716416, on le divise par 2 fois 14100; ce qui fournit le quotient 96 et le reste 9216. La valeur entière approchée de $\sqrt{N}$ est donc 14100 + 96 ou 14196.

2^e EXEMPLE. Soit $N = 412252416$.

On trouve $a = 20300$; le reste correspondant est 162416.

Pour obtenir les deux autres chiffres de n , on divise 162416 par le double 40600 de 20300; ce qui fournit le quotient entier 4 et le reste 16. De sorte que

$$n = 20300 + 4 = 20304.$$

3^e EXEMPLE. Soit $N = 201526417$.

On trouve, par le procédé ordinaire, que les trois premiers chiffres de n sont 1, 4, 1; de sorte que $a = 14100$; le reste correspondant est 2716417. La division de ce reste par $2a$, donnant le quotient 96 et le reste 9217, la valeur entière approchée de $\sqrt{N}$ est 14196.

4^e EXEMPLE. Soit $N = 39600$.

Le nombre n ayant trois chiffres, on cherche ses deux premiers chiffres par le procédé ordinaire; ces chiffres sont 1 et 9; de sorte que $a = 190$; le reste correspondant est 3500; la division de 3500 par 190×2 fournissant le quotient 9 et le reste 80, la valeur entière approchée de $\sqrt{N}$ est 199.

On peut facilement reconnaître si la méthode précédente détermine la plus petite ou la plus grande valeur entière approchée de la racine cherchée. En effet; soit Q le quotient entier de la division de $N - a^2$ par $2a$, et R le reste. On vient de prouver que Q est toujours égal à c ou à $c+1$.

La relation $N - a^2 = 2a(c+d) + (c+d)^2$ donne

$$(1) \dots N - \alpha^2 = 2\alpha\zeta + (\zeta^2 + 2\alpha\delta + 2\zeta\delta + \delta^2),$$

$$(2) \dots N - \alpha^2 = 2\alpha(\zeta + 1) + (\zeta + \delta)^2 - 2\alpha(1 - \delta).$$

Cela posé : 1°. lorsque $Q = \zeta$, la relation (1) fait voir que

$$R = \zeta^2 + 2\alpha\delta + 2\zeta\delta + \delta^2; \text{ donc } R = \zeta^2 \text{ on } R > \zeta^2.$$

Par conséquent, $R = Q^2$ on $R > Q^2$.

2°. Lorsque $Q = \zeta + 1$, la relation (2) démontre que

$$R = (\zeta + \delta)^2 - 2\alpha(1 - \delta).$$

Or, δ étant positif et moindre que 1, on a

$$(\zeta + 1)^2 > (\zeta + \delta)^2; \text{ donc à plus forte raison}$$

$$(\zeta + 1)^2 > (\zeta + \delta)^2 - 2\alpha(1 - \delta); \text{ donc } Q^2 > R.$$

3°. RÉCIPROQUEMENT. Lorsqu'on a $R = Q^2$ on $R > Q^2$, le quotient Q est égal à ζ ; car autrement, Q serait égal à $\zeta + 1$, et d'après (2°), R serait moindre que Q^2 ; ce qui est contre l'hypothèse.

Quand $R < Q^2$, on a $Q = \zeta + 1$,

car autrement, Q serait égal à ζ ; et d'après (1°) on aurait $R = Q^2$ ou $R > Q^2$, ce qui est contre l'hypothèse.

Par conséquent, *selon que* Q^2 *n'est pas plus grand que* R , *ou est plus grand que* R , *le quotient* Q *est égal à* ζ *ou à* $\zeta + 1$; *de sorte que la méthode indiquée détermine la plus petite ou la plus grande valeur entière approchée de la racine quarrée du nombre donné.*

REMARQUE. Lorsque $R = Q^2$, le nombre donné est le quarré de $\alpha + Q$, car la relation $\frac{N - \alpha^2}{2\alpha} = Q + \frac{R}{2\alpha}$ donne

$$N = \alpha^2 + 2\alpha Q + Q^2 = (\alpha + Q)^2.$$

Dans les deux premiers exemples (page 578), le reste R étant égal au quarré du quotient Q , la méthode indiquée détermine la racine quarrée exacte du nombre proposé.

Dans le 3° exemple (page 578), on a

$$N = 201526417, \quad Q = 96, \quad Q^2 = 9216, \quad R = 9217, \quad Q^2 < R; \text{ donc } Q = \zeta.$$

Le nombre 14196 obtenu à la racine exprime donc la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{201526417}$.

Enfin, dans le 4° exemple (page 578), on a

$$Q = 9, \quad Q^2 = 81, \quad R = 80, \quad Q^2 > R; \text{ donc } Q = \zeta + 1.$$

Le nombre 199 obtenu à la racine est donc la plus grande valeur entière approchée de $\sqrt{39600}$.

NOTA. Les démonstrations contenues dans cette note ont paru pour la première fois dans l'édition de mon *Algèbre* publiée en 1800.

Note sur le n° 177 (page 302).

337. Un procédé analogue à celui du n° 177 fournit le moyen de résoudre les équations exponentielles de la forme

$$(1) \dots A'a^{mx+m'} + B'b^{nx+n'} + C'c^{px+p'} + \text{etc.} = 0.$$

En effet, cette équation revient à

$$A'a^{m'}a^{mx} + B'b^{n'}b^{nx} + C'c^{p'}c^{px} + \text{etc.} = 0.$$

Soient $A'a^{m'} = A$, $B'b^{n'} = B$, $C'c^{p'} = C$, etc.

A , B , C , etc., sont des nombres connus; l'équation (1) devient

$$(2) \dots Aa^{mx} + Bb^{nx} + Cc^{px} + \text{etc.} = 0.$$

Pour calculer x , on fait $b = a^{\zeta}$, $c = a^{\delta}$, etc.; on a vu (page 303, 1^{re}) que les valeurs des inconnues ζ , δ , etc., sont fournies par les équations $\zeta = \frac{lb}{la}$, $\delta = \frac{lc}{la}$, etc.

Connaissant les exposants ζ , δ , etc., l'équation (2) se réduit à

$$Aa^{mx} + Ba^{\zeta nx} + Ca^{\delta px} + \text{etc.} = 0;$$

et en posant $a^x = z$, on a

$$(3) \dots Az^m + Bz^{\zeta n} + Cz^{\delta p} + \text{etc.} = 0, \quad (4) \dots x = \frac{lz}{la}.$$

L'équation (3) détermine les valeurs de z , et ensuite les valeurs correspondantes de x se déduisent de la relation (4).

1^{er} EXEMPLE. Soit $a^x - 5a^{x-3} - 4 = 0$.

L'équation (3) se réduit à $z - 5a^{-3}z - 4 = 0$; d'où

$$z = \frac{4a^3}{a^3 - 5}, \quad l_2 = l(4a^3) - l(a^3 - 5), \quad x = \frac{l(4a^3) - l(a^3 - 5)}{la}.$$

2^e EXEMPLE. Soit $a^{x-3} - 2a^{x-2} - 3 = 0$.

L'équation (3) devient $a^{-3}z^2 - 2a^{-2}z - 3 = 0$.

Cette dernière fournit deux valeurs de z , et ensuite la formule (4) détermine les deux valeurs correspondantes de x .

Note relative au n° 313 (page 499).

338. Pour exprimer que l'équation

$$(1) \dots x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0,$$

à deux racines égales et de signes contraires, on peut observer que cette équation devant admettre deux valeurs de x de la forme $+a$, $-a$, si l'on

y change x en $-x$, ce qui revient à échanger les signes de toutes les racines, l'équation résultante

$$(2) \dots x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \dots \mp qx^3 \pm rx^2 \mp sx \pm t = 0,$$

devra encore admettre les racines $-a, +a$. Les premiers membres des équations (1) et (2) doivent donc être exactement divisibles par le produit $x^2 - a^2$ des facteurs $x - a, x + a$, correspondans aux racines $+a, -a$. Il suffit donc d'exprimer que ces premiers membres ont un commun diviseur de la forme $x^2 - a^2$; ce qui conduit à chercher le plus grand commun diviseur entre $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.}$, et $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \text{etc.}$

Quand m est un nombre pair $2n$, la division de $x^{2n} + Ax^{2n-1} + \text{etc.}$ par $x^{2n} - Ax^{2n-1} + \text{etc.}$ fournit un reste

$$2x(Ax^{2n-2} + Cx^{2n-4} + \dots + qx^2 + s)$$

qui ne contient que des puissances impaires de x ; et après avoir supprimé le facteur $2x$ qui est premier avec le diviseur, on divise

$$A^2(x^{2n} - Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} - Cx^{2n-3} + \dots - qx^3 + rx^2 - sx + t)$$

par le polynôme $Ax^{2n-2} + Cx^{2n-4} + \dots + qx^2 + s$, qui ne contient que des puissances paires de x ; cette division conduit à un reste de la forme

$$A'x^{2n-4} + B'x^{2n-6} + \dots + q'x^2 + r'.$$

$$\text{Les polynômes } Ax^{2n-2} + Cx^{2n-4} + \dots + qx^2 + s,$$

$$A'x^{2n-4} + B'x^{2n-6} + \dots + q'x^2 + r',$$

ne renfermant que des puissances paires de x , si l'on continue les calculs relatifs à la recherche du plus grand commun diviseur, les diviseurs et les restes successifs ne renfermeront que des puissances paires de x . Par conséquent, lorsqu'on sera parvenu à un diviseur du second degré, ce diviseur sera nécessairement de la forme $Mx^2 + N$, le reste correspondant R sera indépendant de x , et pour exprimer que l'équation (1) a deux racines égales et de signes contraires, il suffira de poser $R = 0$.

Quand les coefficients $A, B, C, \dots, q, r, s, t$, satisferont à la condition $R = 0$, l'équation $Mx^2 + N = 0$ déterminera deux racines de l'équation (1) qui seront égales et de signes contraires.

EXEMPLE. Soit proposé d'exprimer que l'équation

$$(3) \dots x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

a deux racines égales et de signes contraires.

On change x en $-x$ dans cette équation, ce qui donne

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0;$$

on divise les premiers membres de ces équations l'un par l'autre, le reste est $2x(Ax^2 + C)$. On supprime le facteur $2x$, et la division de

$$A^2(x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D) \text{ par } Ax^2 + C,$$

conduisant au reste $C^2 + DA^2 - ABC$, la condition cherchée est...
 $C^2 + DA^2 - ABC = 0$.

Quand les coefficients A, B, C, D , satisfont à cette condition, l'équation (3) a deux racines égales et de signes contraires qui sont déterminées par l'équation $Ax^2 + C = 0$.

Ces résultats s'accordent avec ceux que l'on a obtenus (page 501).

On opère d'une manière semblable lorsque l'équation (1) est de degré impair.

Note relative au 19^e Problème (page 513).

33g. Lorsqu'on cherche l'équation $\varphi(y) = 0$ dont les racines sont les différentes sommes qu'on peut former en ajoutant deux à deux les m racines $a, b, c, \dots, k$, de l'équation du même degré $f(x) = 0$, on est conduit à éliminer x entre les équations

$$(1) \dots f(x) = 0, f(y-x) = 0;$$

et l'on a vu (page 514) que l'équation finale en y qui détermine toutes les valeurs de y propres à satisfaire au système (1), est

$$(y-2a)(y-2b)\dots(y-2k) \times \{\varphi(y)\}^2 = 0.$$

Pour débarrasser le système (1) des m valeurs étrangères $2a, 2b, \dots, 2k$, de y , on a divisé $f(y-x) - f(x)$ par $y-2x$, ce qui a fourni un quotient exact $F_1(x, y)$; et le nouveau système

$$(2) \dots f(x) = 0, F_1(x, y) = 0,$$

n'admettant plus les m valeurs $2a, 2b, \dots, 2k$, de y , si l'on élimine x entre les équations (2), l'équation finale en y qui fournira toutes les valeurs de y convenables au système (2), sera

$$(3) \dots \{\varphi(y)\}^2 = 0.$$

Lorsque nous avons dit (page 515) que l'élimination de x entre les équations (2) conduit directement à l'équation demandée $\varphi(y) = 0$, nous avons supposé que l'on effectuait l'élimination par la méthode du plus grand commun diviseur, et que les multiplications des dividendes successifs par des fonctions de y n'introduisaient pas des valeurs étrangères de y .

Nous allons prouver que dans ces hypothèses, le reste indépendant de x doit être $\varphi(y)$, et que le diviseur qui conduit à ce reste est de la forme... $A(x^2 - yx + B)$, A et B désignant des quantités indépendantes de x . En effet, soit Y le reste indépendant de x , et désignons par $\varphi_1(x, y)$ le diviseur qui a fourni ce reste; les solutions des équations (2) sont les mêmes que celles du système

$$(4) \dots Y = 0, \varphi_1(x, y) = 0.$$

Or, pour chaque valeur C de y , tirée de $Y = 0$, l'équation $\varphi_1(x, C) = 0$ doit fournir les deux racines a, b , de $f(x) = 0$, dont la somme est C ; ce qui détermine les deux solutions

$$y = \zeta, \quad x = a \parallel y = \zeta, \quad x = b.$$

Par conséquent, chaque facteur $y - \zeta$ de Y doit entrer deux fois dans le premier membre de l'équation finale (3), et $\varphi_1(x, \zeta)$ doit être de la forme $A(x^2 - \zeta x + B)$, (n° 225); donc

$$Y = \varphi(y) \quad \text{et} \quad \varphi_1(x, y) = A(x^2 - yx + B).$$

Ces propriétés ont été vérifiées (page 515) lorsque

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2,$$

REMARQUE. Quand on élimine x entre les équations

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0,$$

$f(y-x) = x^3 + (2-3y)x^2 + (3y^2-4y-1)x - (y^3-2y^2-y+2) = 0$,
la division de $f(y-x)$ par $f(x)$ donne le reste

$$R_1 = (4-3y)x^2 - (4-3y)yx - (y^3-2y^2-y+4).$$

On divise $(4-3y)f(x)$ par R_1 , ce qui donne le quotient $x+y-2$ et le reste $R_2 = (y^3-4y^2+3y)(y-2x)$.

Mais, d'après ce qui a été dit dans le n° 289, on obtient toutes les solutions des équations proposées en traitant séparément les deux systèmes

$$y^3 - 4y^2 + 3y = 0, \quad R_1 = 0 \parallel y - 2x = 0, \quad R_2 = 0.$$

Dans le premier système, chacune des valeurs 0, 1, 3, de y , déterminant deux valeurs de x , on en déduit les six solutions

$$\begin{array}{l} y = 0 \mid y = 0 \mid y = 1 \mid y = 1 \mid y = 3 \mid y = 3 \\ x = 1 \mid x = -1 \mid x = -1 \mid x = 2 \mid x = 1 \mid x = 2; \end{array}$$

ces valeurs de y sont les *sommes* que l'on obtient en ajoutant deux à deux les racines $+1, -1, +2$, de $f(x) = 0$.

Pour obtenir les solutions du deuxième système $y - 2x = 0$, $R_1 = 0$, on divise $4R_1$ par $-2x + y$, ce qui conduit au reste $y^3 - 4y^2 - 4y + 16$; et les solutions demandées sont les mêmes que celles du système

$$y^3 - 4y^2 - 4y + 16 = 0, \quad y - 2x = 0;$$

il admet les trois solutions

$$y = 2, \quad x = 1 \parallel y = -2, \quad x = -1 \parallel y = 4, \quad x = 2.$$

La relation $y = 2x$ fait voir que les valeurs $+2, -2, +4$, de y , sont les doubles des racines de $f(x) = 0$.

L'équation finale en y , qui détermine toutes les valeurs de y propres à satisfaire aux équations données, est donc (n° 224),

$$(y-0)(y-0)(y-1)(y-1)(y-3)(y-3)(y-2)(y+2)(y-4) = 0,$$

$$\text{ou} \quad (y^3 - 4y^2 + 3y)^2 (y^3 - 4y^2 - 4y + 16) = 0.$$

Note relative à la recherche de la limite de l'erreur que l'on peut commettre lorsqu'on fait usage d'une table de Logarithmes ().*

340. Pour calculer les logarithmes à cinq décimales des nombres entiers et décimaux qui ne sont pas dans la TABLE (**), et pour revenir de ces logarithmes aux nombres correspondans, on ramène toujours la question à opérer sur des nombres compris entre 1000 et 10000, ou sur des logarithmes dont la caractéristique est 3, et l'on suppose :

1°. Que les différences entre les nombres sont proportionnelles aux différences entre leurs logarithmes ;

2°. Que les logarithmes TABULAIRES sont tout-à-fait exacts ;

Propositions qui ne sont, ni l'une ni l'autre, rigoureusement vraies.

Il est donc nécessaire de faire voir d'abord ce qui conduit à poser la proportion indiquée ; et ensuite de calculer l'erreur qu'elle peut produire, en ayant égard aux deux causes d'inexactitude dont elle est affectée.

341. Nous commencerons par démontrer quelques principes sur lesquels est fondée la légitimité de la proportion que l'on établit approximativement entre les différences des nombres et les différences de leurs logarithmes.

1°. Les différences premières (***) des logarithmes sont positives, et d'autant plus petites que les nombres sont plus grands et que leurs différences sont plus petites.

En effet, soit n un nombre très grand, et l son logarithme tabulaire ; soit k un nombre très petit, et $l+k$ le logarithme de $n+k$; on aura

$$10^l = n, \quad 10^{l+k} = n+k,$$

d'où, en divisant la seconde égalité par la première,

$$10^k = \frac{n+k}{n} = 1 + \frac{k}{n}, \quad k = \log \left(1 + \frac{k}{n} \right).$$

(*) Cette note est de M. Vincent, professeur au Collège Sainte-Barbe, auteur d'un traité de Géométrie, qui s'était déjà occupé du même objet dans les *Annales de Mathématiques*, (tome XVI, page 19).

(**) Nous supposons qu'on fait usage de la table des Logarithmes placée à la fin de l'Arithmétique de M. Reynaud ; elle renferme les logarithmes à cinq décimales de tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10000. Lorsque nous considérerons d'autres tables, nous aurons soin d'en avertir.

(***) Dans une suite de quantités numériques, on nomme *différences premières*, ou simplement *différences*, les restes que l'on obtient en retranchant de chacune de ces quantités, celle qui la précède immédiatement. Ces différences sont positives ou négatives, selon que les quantités vont en croissant ou en décroissant.

De même, si l'on retranche de chacune des différences premières celle qui la précède immédiatement, on aura une nouvelle suite de différences que l'on nomme *différences secondes*.

On obtiendrait de même des *différences troisièmes*, *quatrième*, etc.

Or, puisque $\log 1 = 0$, il en résulte que h , ou $\log(n+k) - \log n$, ou enfin la différence du logarithme l , est positive et d'autant moindre que la fraction $\frac{k}{n}$ est plus petite, c'est-à-dire d'autant moindre que le nombre n est plus grand et que la différence k est plus petite.

Ce qui démontre la propriété énoncée.

2°. Lorsque des nombres sont équidifférens, les différences secondes de leurs logarithmes sont négatives, et d'autant plus petites que les nombres sont plus grands et que leurs différences sont plus petites.

Soient toujours l et $l+h$ les logarithmes respectifs de n et de $n+k$, et soit de plus $l+h+h'$ celui de $n+2k$; on aura

$$10^l = n, \quad 10^{l+h} = n+k, \quad 10^{l+h+h'} = n+2k;$$

d'où, en divisant chaque égalité par la précédente,

$$10^h = \frac{n+k}{n}, \quad 10^{h'} = \frac{n+2k}{n+k}.$$

Si l'on divise encore la dernière égalité par la précédente, il en résultera,

$$10^{h'-h} = \frac{n(n+2k)}{(n+k)^2} = \frac{(n+k)^2 - k^2}{(n+k)^2} = 1 - \left(\frac{k}{n+k}\right)^2.$$

$$\text{D'où} \quad h' - h = \log \left\{ 1 - \left(\frac{k}{n+k}\right)^2 \right\}, \quad \text{et } h' < h,$$

car les logarithmes des quantités moindres que l'unité sont négatifs (n° 170).

$$\text{Or,} \quad \frac{k}{n+k} = \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{k}\right)},$$

quantité d'autant plus petite que n est plus grand et que k est plus petit; et d'ailleurs $\log 1 = 0$; donc les différences premières h et h' approchent d'autant plus de l'égalité, ou bien, la différence seconde $h' - h$ approche d'autant plus de zéro, que n est plus grand et que k est plus petit.

3°. Si des nombres équidifférens sont très grands et ont des différences très petites, leurs logarithmes peuvent aussi (en négligeant les différences secondes) être considérés comme équidifférens.

En effet, si l'on néglige la fraction très petite du second ordre (*) $\left(\frac{k}{n+k}\right)^2$, la différence seconde $h' - h$ deviendra nulle, ou bien, ce qui est la même chose, les différences premières h et h' seront égales entre elles.

(*) Une fraction est dite très petite du 2°, du 3°,....., ordre, lorsqu'elle est le produit de 2, de 3,....., fractions considérées comme très petites, ou la 2°, la 3°,..... puissance d'une fraction très petite. Sa valeur est d'autant moindre que l'ordre est plus élevé (n° 119).

4°. Lorsque trois nombres sont très grands et très peu différens, on peut établir une proportion entre leurs différences et celles des logarithmes correspondans.

Supposons que les différences entre le plus petit nombre et chacun des deux autres soient commensurables entre elles, et dans le rapport de p à q . Dans cette hypothèse, les trois nombres étant nécessairement de la forme $n, n + pk, n + qk$, feront partie de la progression par différence

$$\frac{1}{2} n . n + k . n + 2k \dots n + pk \dots n + qk ;$$

et d'après ce qu'on vient de voir (3°), les logarithmes des termes de cette progression, dans laquelle on suppose n très grand et k très petit, formeront aussi une progression par différence telle que la suivante :

$$\frac{1}{2} l . l + h . l + 2h \dots l + ph \dots l + qh .$$

Or, on a évidemment

$$(m + pk) - n : (n + qk) - n :: (l + ph) - l : (l + qh) - l ,$$

car cette proportion revient à

$$pk : qk :: ph : qh .$$

Le principe énoncé (4°) est donc démontré pour des différences commensurables entre elles. Il convient donc aussi à des différences incommensurables (n° 13).

La légitimité de la proportion approchée étant maintenant établie pour tous les cas où les nombres sont très grands et différent très peu, nous allons passer au calcul de l'erreur qu'elle occasionne, erreur qui résulte, comme nous l'avons déjà dit, de deux causes que nous aurons à considérer successivement : la première, l'inexactitude de la proportion elle-même ; la seconde, l'inexactitude des logarithmes tabulaires.

342. Calculons d'abord l'erreur qui résulte de l'inexactitude de la proportion (les logarithmes employés étant supposés exacts) (*).

Soit n un nombre que nous supposerons supérieur à 1000 (les nombres devant être très grands, d'après ce qui précède, pour que l'on soit autorisé à considérer leurs différences comme proportionnelles à celles de leurs logarithmes); de plus, soient l le logarithme de n , et $l + \Delta$ celui de $n + 1$; Δ étant la différence *tabulaire* entre $\log n$ et $\log (n + 1)$; soit encore $n + d$, n nombre compris entre n et $n + 1$, et $l + m\Delta$ son logarithme, m et d étant

(*) Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons constamment que l'on emploie les tables de logarithmes à cinq décimales, et que l'on opère sur des nombres compris entre 1000 et 10000, et sur des logarithmes dont la caractéristique est 3. Ainsi, lorsqu'on cherchera le logarithme d'un nombre décimal (compris entre 1000 et 10000), la proportion servira à compléter la partie décimale du logarithme demandé; et quand on voudra trouver à quel nombre appartient un logarithme donné (dont la caractéristique est 3), la partie entière du nombre cherché se trouvant dans la table, la proportion servira à calculer la partie décimale de ce nombre.

supposés moindres que l'unité (*); on aura

$$(1) \dots 10^l = n, \quad 10^{l+m\Delta} = n+d, \quad 10^{l+\Delta} = n+1.$$

Cela posé, la quantité x qu'il faut ajouter à l pour avoir le logarithme de $n+d$, se détermine par la proportion

$$1 : d :: \Delta : x, \quad \text{d'où } x = d\Delta, \quad \text{et } \log(n+d) = l + d\Delta;$$

de sorte qu'on trouve $l + d\Delta$ au lieu de $l + m\Delta$ pour la valeur de $\log(n+d)$. L'erreur qui en résulte est donc égale à $(m-d)\Delta$ (on verra, page suivante, que $m > d$).

De même, la quantité x qu'il faut ajouter à n pour avoir le nombre auquel appartient le logarithme $l + m\Delta$, se détermine par la proportion

$$\Delta : m\Delta :: 1 : x, \quad \text{d'où } x = m;$$

on trouve ainsi que le nombre cherché est égal à $n+m$, tandis que sa valeur exacte est $n+d$. L'erreur qui en résulte est donc $m-d$.

On voit donc que l'erreur commise dans les deux cas, provient de ce qu'on prend l'une pour l'autre les deux quantités m et d .

Cherchons, d'après cela, la différence de ces deux quantités.

Remarquons à cet effet que les équations (1) donnent

$$10^\Delta = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, \quad n+d = 10^l \times (10^\Delta)^m = n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

Développant $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$ par la formule du binôme de NEWTON, laquelle a été démontrée généralement (n° 335), multipliant le résultat par n , et retranchant ensuite n de chaque membre, on trouve

$$d = \frac{m}{1} - \frac{m(1-m)}{1 \cdot 2n} + \frac{m(1-m)(2-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3n^2} - \frac{m(1-m)(2-m)(3-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4n^3} + \text{etc.}$$

Dans cette série, le quotient de la division du terme qui en a r avant lui, par le terme précédent, est $\frac{r-m}{(r+1)n}$. Ce quotient est évidemment positif et moindre que l'unité, puisque $m < 1$ et $n > 1$; il en résulte que les termes sont alternativement positifs et négatifs, et que chacun d'eux est moindre que le précédent.

Or, dans toute série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, si chaque terme est moindre que le précédent, la somme des r premiers termes différera de la somme de tous les termes, d'une quantité moindre que le $(r+1)^{\text{ième}}$ terme.

En effet, soit une série de cette espèce

$$S = a - b + c - d + e - f + g - \text{etc.};$$

(*) Tous les nombres n , l , Δ , etc., sont supposés, dans ce numéro, rapportés à la même unité.

a, b, c, d, e, f, g , etc., seront des nombres positifs, et l'on aura

$$b < a, c < b, d < c, e < d, f < e, g < f, \text{ etc.}$$

Mais on peut mettre S sous les différentes formes

$$S = a - (b - c) - (d - e) - (f - g) - \text{etc.},$$

$$S = a - b + (c - d) + (e - f) + \text{etc.},$$

$$S = a - b + c - (d - e) - (f - g) - \text{etc.},$$

et ainsi de suite.

Chacun des binômes compris entre parenthèses étant positif, on voit que

$$S < a, S > a - b, S < a - b + c, S > a - b + c - d, \text{ etc.}$$

Ce qui démontre le principe énoncé (*).

On peut donc déduire de ce qui précède les inégalités

$$d < m, d > m - \frac{m(1-m)}{2n}, m - d < \frac{m(1-m)}{2n}.$$

Mais la somme des facteurs positifs $m, 1 - m$, étant égale à 1, il résulte de ce qu'on a vu (2^e remarque, page 206) que

$$m(1-m) < \frac{1}{4}, \text{ d'où } \frac{m(1-m)}{2n} < \frac{1}{8n};$$

donc

$$m - d < \frac{1}{8n}.$$

L'erreur $(m - d)\Delta = e$ que l'on commet dans la première question (déterminer le logarithme d'un nombre donné) est donc moindre que $\frac{\Delta}{8n}$.

Or, n étant supposé plus grand que 1000, on voit dans la table de logarithmes à cinq décimales, que

$$\Delta < \frac{0.001}{2}; \text{ donc } e < \frac{0.001}{16000}, \text{ ou } e < \frac{0.000001}{16}.$$

L'erreur e étant moindre que le seizième d'une unité décimale du sixième ordre, ne saurait porter sur les cinq premières décimales du logarithme cherché (**).

L'erreur $m - d = e'$ que l'on commet dans la seconde question (déterminer le nombre auquel appartient un logarithme donné), est moindre

(*) Cette démonstration est tirée des *Notes sur l'Algèbre*, de M. Reynaud.

(**) Il ne faut cependant pas entendre par là d'une manière absolue que ces cinq chiffres décimaux n'en puissent être altérés. Par exemple, le nombre 34739948 a pour valeur approchée à cinq décimales 347399, tandis que celui-ci 34739951, qui n'en diffère que de 3 unités du 7^e ordre décimal, a pour valeur approchée 347300. Si donc on prenait l'un pour l'autre ces deux nombres à cinq décimales, on commettrait une erreur moindre qu'une unité du 6^e ordre décimal, et cependant le chiffre du 3^e ordre se trouverait altéré.

que $\frac{1}{8000}$, ou que $\frac{0.001}{8}$; elle ne saurait donc porter sur le chiffre des *millièmes*.

Lorsqu'on opère avec des *tables de logarithmes à sept décimales*, on trouve (en supposant $n > 10000$),

$$\Delta < \frac{0.0001}{2}, e < \frac{0.00000001}{16}, e' < \frac{0.0001}{8}.$$

Ainsi, l'erreur e ne saurait porter sur la *septième* décimale du logarithme cherché, et l'erreur e' ne saurait porter sur le chiffre des *dix-millièmes* (*).

343. Calculons maintenant l'erreur qui résulte de l'inexactitude des *logarithmes* (la proportion étant supposée exacte).

Pour cela, nous allons, dans ce numéro, rapporter les *logarithmes tabulaires* (supposés à cinq décimales), ainsi que leurs différences, à l'unité décimale du cinquième ordre, ce qui revient à les rendre tous 100000 fois plus grands, ou à les regarder comme des entiers; cette hypothèse n'a nul inconvénient, puisque dans la proportion on ne considère que les rapports que ces différences ont entre elles.

De là il résulte que, les logarithmes étant généralement fautifs, en plus ou en moins, d'une quantité qui a pour limite supérieure la moitié d'une unité décimale du dernier ordre (*Arith.*, n° 80), cette limite se trouvera représentée par $\frac{1}{2}$.

PREMIÈRE QUESTION. Étant donné un nombre, déterminer son logarithme.

Soit $n + d$ un nombre dont on demande le logarithme, n étant la partie entière, et d la partie fractionnaire; et soient l et l' les logarithmes de n et de $n + 1$, tels qu'ils sont fournis par les tables. Soient i et i' les quantités qu'il faudrait ajouter respectivement aux logarithmes l ; l' , pour les rendre exacts, ces quantités pouvant être positives ou négatives, et ayant $\frac{1}{2}$ pour limite, (d'après ce qui vient d'être dit). En supposant la proportion exacte, comme nous le faisons ici, on trouverait que le logarithme de $n + d$ est égal à $l + i$, augmenté d'une quantité x déterminée par la proportion

$$x : (l' + i') - (l + i) :: d : 1, \text{ d'où (en faisant } l' - l = \Delta)$$

$$x = d(\Delta + i' - i);$$

$$\text{ce qui donnerait } \log(n + d) = l + i + d(\Delta + i' - i).$$

Mais au lieu de cela, on pose la proportion

$$x : \Delta :: d : 1, \text{ d'où } x = d\Delta;$$

(*) Les calculs du n° 341 sont dus, pour le fond, à Bertrand de Genève.

puis on ajoute $d\Delta$ à l , et l'on rejette en outre toute la partie fractionnaire du produit $d\Delta$, sauf à augmenter le dernier chiffre d'une unité s'il y a lieu, ce qui peut encore occasionner une erreur dont la limite est $\frac{1}{2}$. En représentant par f cette erreur, on prend ainsi $l + d\Delta - f$ pour le logarithme de $n + d$, d'où résulte l'erreur finale

$$l + i + d(\Delta + i' - i) - l - d\Delta + f = i(1 - d) + i'd + f.$$

En supposant donc que les trois erreurs i , i' , f , atteignent leur limite $\frac{1}{2}$, ce qui est évidemment le cas où l'erreur totale est le plus considérable, cette erreur totale sera $\frac{1}{2}(1 - d + d + 1) = 1$.

Ainsi, dans la recherche du logarithme d'un nombre, l'erreur qui résulte de l'inexactitude des logarithmes tabulaires, peut s'élever, soit en plus, soit en moins, jusqu'à une unité décimale du cinquième ordre, ou généralement, du dernier ordre décimal des logarithmes fournis par les tables que l'on emploie.

SECONDE QUESTION. Étant donné un logarithme, déterminer le nombre auquel il appartient.

Soit proposé de déterminer le nombre auquel correspond un logarithme donné $l + \delta$, compris entre deux logarithmes consécutifs l et l' des tables, ceux-ci correspondant respectivement aux nombres consécutifs n et $n+1$: on prend $n + \frac{\delta}{\Delta}$ pour le nombre cherché, la fraction $\frac{\delta}{\Delta}$ étant tirée de la proportion

$$x : 1 :: \delta : \Delta.$$

Mais d'abord, le logarithme donné $l + \delta$ étant poussé seulement au degré d'approximation des logarithmes tabulaires, δ est passible d'une erreur positive ou négative qu'on peut représenter par $+i''$ et dont la limite est $\frac{1}{2}$; en outre, les deux logarithmes tabulaires l et l' peuvent, comme ci-dessus, être fautifs des quantités positives ou négatives $+i$ et $+i'$, dont la limite est également $\frac{1}{2}$; enfin, au lieu de δ , on devrait prendre $(l + \delta + i'') - (l + i)$, ce qui donnerait la proportion

$$x : 1 :: (l + \delta + i'') - (l + i) : (l' + i') - (l + i),$$

d'où
$$x = \frac{\delta + i'' - i}{\Delta + i' - i};$$

de sorte que le nombre demandé est réellement

$$n + \frac{\delta + i'' - i}{\Delta + i' - i}.$$

En prenant donc sa différence avec $n + \frac{\delta}{\Delta}$, on aura pour l'erreur commise

$$\frac{\delta + i'' - i}{\Delta + i' - i} - \frac{\delta}{\Delta} = \frac{\Delta(i'' - i) - \delta(i' - i)}{\Delta(\Delta + i' - i)}.$$

Le maximum relatif à δ s'obtiendra en faisant $\delta = \Delta - 1$ (pourvu que l'on donne à i, i', i'' , des signes propres à rendre aussi grande que possible la valeur numérique du résultat), ce qui fait

$$\frac{\Delta(i'' - i) - \Delta(i' - i) + i' - i}{\Delta(\Delta + i' - i)} = \frac{1}{\Delta} \times \frac{\Delta(i'' - i') + i' - i}{\Delta + i' - i}.$$

Or, il est visible que le second facteur devient égal à l'unité quand $i'' = +\frac{1}{2}$ et $i' = -\frac{1}{2}$, et qu'il ne peut avoir de valeur plus grande; donc la limite de l'erreur commise est $\frac{1}{\Delta}$, quantité qui croît de plus en plus à mesure que Δ diminue ou qu'on avance davantage dans les tables.

Si l'on veut déterminer la valeur que doit avoir Δ pour que le nombre cherché ne soit pas fantôme de la fraction $\frac{1}{a}$ (a étant une puissance de 10), il faudra satisfaire à l'inégalité

$$\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{2a} < \frac{1}{a}; \text{ d'où } \Delta > 2a.$$

Ainsi, en faisant usage des tables de logarithmes à cinq décimales, pour trouver le nombre plus grand que 10000 auquel appartient un logarithme donné, on ne peut compter sur le chiffre des dixièmes, à moins que les différences tabulaires ne soient au moins égales à 20, c'est-à-dire à moins que le nombre cherché ne soit inférieur à 2170 environ; de sorte qu'au-dessus de cette limite, la proportion ne fournit aucun chiffre décimal du nombre cherché, et l'on est obligé de s'en tenir à la partie entière fournie par la table, ce qui vérifie ce que nous avons dit (*Arith.* n° 208, 2°).

Lorsqu'on emploie les tables de logarithmes à sept décimales à la recherche d'un nombre compris entre 10000 et 100000, à l'aide de son logarithme, on ne peut compter sur le chiffre des centièmes à moins que les différences tabulaires ne soient au moins égales à 400, c'est-à-dire à moins que le nombre cherché ne soit inférieur à 21700 environ; mais alors on peut toujours compter sur le chiffre des dixièmes.

344. Nous pouvons actuellement évaluer l'erreur totale qui résulte des deux causes d'inexactitude que nous avons traitées séparément (n°s 342 et 343).

Dans le n° 342, nous n'avions pas eu égard à l'inexactitude des logarithmes, et dans le n° 343, au contraire, nous n'avons considéré que cette dernière cause d'erreur.

Or, il est facile de voir que c'est à celle-ci qu'il faut définitivement s'en tenir, sans avoir aucun égard à l'autre. En effet, dans la première question

(déterminer le logarithme d'un nombre donné), ayant une fois constaté (n° 342) que l'inexactitude de la proportion ne peut influer sur le dernier chiffre des logarithmes tabulaires, on doit considérer la proportion comme étant tout-à-fait exacte, et n'avoir plus d'égard qu'à l'inexactitude de ces logarithmes. De même, dans la seconde question (calculer le nombre auquel appartient un logarithme donné), la limite de l'erreur qui résulte de l'inexactitude des logarithmes tabulaires ne dépendant que de la différence tabulaire et par suite des derniers chiffres de ces logarithmes, chiffres sur lesquels l'inexactitude de la proportion n'a aucune influence, il en résulte encore que celle-ci doit être tout-à-fait négligée.

345. En résumé, d'après tout ce qui précède, lorsqu'on cherche le logarithme d'un nombre compris entre 1000 et 10000, au moyen de la proportion, et en employant les tables à cinq décimales, on doit pousser le calcul jusqu'à la cinquième décimale inclusivement, mais pas au-delà, en augmentant, s'il y a lieu, la cinquième décimale d'une unité, suivant la règle qui a été donnée (*Arith.*, n° 80). Il faut toutefois observer que le dernier chiffre ainsi obtenu peut être en erreur d'une unité; de sorte qu'une somme de logarithmes et de complémens arithmétiques de logarithmes peut être fautive d'une quantité dont la limite est autant d'unités décimales du dernier ordre, qu'il y a de parties dans cette somme; de sorte aussi que, si dans la vue d'obtenir une puissance d'un nombre, on multiplie son logarithme par l'exposant de la puissance, le logarithme qui en résultera pourra être fautive d'autant d'unités décimales du dernier ordre qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance. Il n'en est pas de même des extractions de racines, parce que les erreurs qui affectent les logarithmes sont divisées par les indices de ces racines.

Tout ceci est applicable aux tables à sept décimales, avec cette différence que le nombre sur lequel on opère est supposé compris entre 10000 et 100000, et que le logarithme doit être calculé jusqu'à la septième décimale.

Au contraire, lorsqu'on cherche un nombre (toujours supposé compris entre les mêmes limites) au moyen de son logarithme, le degré d'approximation qu'il est possible d'obtenir en fraction ordinaire a toujours pour mesure l'unité divisée par la différence tabulaire (quelle que soit celle des tables qu'on emploie); mais si l'on veut obtenir le nombre cherché sous forme décimale, à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$... d'unité près, comme on le fait presque toujours, la différence tabulaire doit être au moins égale au double du dénominateur de la partie fractionnaire décimale cherchée, sans quoi il faut renoncer à obtenir le degré d'approximation demandé; de sorte que la proportion devient tout-à-fait inutile pour la question actuelle si la différence tabulaire n'est pas au moins égale à 20.

FIN.

609281

58N



1828.

LIBRAIRIE

POUR LES MATHÉMATIQUES, LA MARINE ET LES SCIENCES EN GÉNÉRAL.

EXTRAIT DU CATALOGUE

Des Livres qui se trouvent chez BACHELIER (Succ^r de feu M^{me} veuve COURCIER), libraire, quai des Augustins, n° 55.

OUVRAGES ADOPTÉS PAR L'UNIVERSITÉ DE FRANCE, POUR L'ENSEIGNEMENT DANS LES COLLÈGES, etc., etc.

Ouvrages de M. LACROIX, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, Doyen des Sciences à l'Université, Professeur au Collège de France, etc.

COURS DE MATHÉMATIQUES à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations, Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, Écoles secondaires, Collèges, etc., 9 vol. in-8., 39 fr.

Chaque volume du Cours de M. LACROIX se vend séparément, savoir :

Traité élémentaire d'Arithmétique, 17^e édition, 1826, 2 fr.

Éléments d'Algèbre, 14^e édition, 1825, 4 fr.

Éléments de Géométrie, 13^e édition, 1825, 4 fr.

Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie, 8^e édit., 1827, 4 fr.

Complément des Éléments d'Algèbre, 5^e édit., 1825, 4 fr.

Complément des Éléments de Géométrie, ou Éléments de Géométrie descriptive, 5^e édition, 1822, 3 fr.

Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, 4^e édition, 1827, 8 fr.

Essai sur l'enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques, 1 v. in-8.; seconde édition, revue et augmentée, 1816, 5 fr.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DU CALCUL DES PROBABILITÉS, in 8., 5 fr.

2^e édition, 1822, avec une planche, 5 fr.

TRAITÉ COMPLET DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, 3 vol. in-4., 66 fr.

L'Introduction de l'Essai sur l'enseignement traite de la culture des Mathématiques pendant le 18^e siècle, et de leur influence sur la marche de l'esprit humain dans cet intervalle. Il est terminé par l'analyse de toutes les parties du Cours de l'Auteur, et l'indication de la marche qu'il a suivie dans ses leçons publiques. Il s'est proposé de réunir dans un même cadre tout ce qu'il y a de plus important et de plus précis sur la philosophie des Sciences mathématiques.

Le *Traité élémentaire d'Arithmétique*, les *Éléments d'Algèbre*, qui ne contiennent que les principes et les méthodes d'une application usuelle; les *Éléments de Géométrie*, où l'Auteur a tâché de concilier les rigueurs des démonstrations avec l'ordre naturel des propositions; et le *Traité élémentaire de Trigonométrie et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie*, composent un Cours élémentaire après lequel on peut passer immédiatement au *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. L'Auteur a évité l'emploi des formules de l'Algèbre supérieure, afin de ne pas retarder l'entrée des Élèves dans la Mécanique et ses applications, qui sont ordinairement le but principal de l'étude des Mathématiques. Il n'a cessé, à chaque édition, de perfectionner les détails de ses ouvrages et de veiller à leur correction.

BOUDDON, Inspecteur de l'Université de Paris, Examinateur des Aspirans à l'École polytechnique. **ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE**, 1 vol. in 8., 5 fr.

5^e édit., 1827, 5 fr.

— **ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE**, 5^e édit., 1 fort vol. in-8., 1828, 7 fr. 50 c

- BOURDON. APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.**
1 fort vol. in-8^e avec 15 planches, 1825, 7 fr. 50 c.
- BIOT. Membre de l'Institut, professeur au Collège de France, etc. TRAITE ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE, destiné à l'enseignement dans les Collèges, etc.; 3 vol. in-8., 1810.**
- **PHYSIQUE MÉCANIQUE**, traduite de Poncelet de Fischer, avec notes, 4^e édition, considérablement augmentée, sous presse, in-8., avec figures.
- **ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE** appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, in-8., avec dix planches, 1826; 7^e édition, revue, corrigée et augmentée, 6 fr. 50 c.
- LEFEBVRE DE FOURCY, Examinateur des Aspirans à l'École royale Polytechnique, docteur ès-sciences, etc. LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE**, données au Collège royal de Saint-Louis, dans lesquelles on traite des Problèmes déterminés, de la ligne droite et des lignes du second ordre; 1 vol. in-8., 5 fr. 50 c.
- **THÉORIE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÈBRE** et de l'Élimination entre deux équations à deux inconnues. In-8., br., 1827 1 fr. 50 c.
- BEZOUT. TRAITE D'ARITHMÉTIQUE** à l'usage de la Marine et de l'Artillerie, avec des Notes fort étendues et des Tables de Logarithmes, pour les Elèves qui se destinent à l'École Polytechnique; par A.-A.-L. REYNAUD, Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique, etc., in-8., 12^e édit. 1826, 3 fr. 60 c.
- Le texte pur se vend séparément, 2 fr.
- Les Notes se vendent aussi séparément, 2 fr. 50 c.
- **ALGÈBRE** et Application de cette science à l'Arithmétique et à la Géométrie, nouvelle édition, revue et augmentée de Notes fort étendues; par A.-A.-L. REYNAUD, Examinateur des Candidats à l'École Polytechnique, etc., in-8., 1822, 6 fr.
- Le texte pur se vend séparément, 4 fr.
- Les Notes se vendent aussi séparément, 4 fr.
- **GÉOMÉTRIE** contenant la Trigonométrie rectiligne et la Trigonométrie sphérique; Notes sur la Géométrie, Elémens de Géométrie descriptive et Problèmes; par REYNAUD, 3^e édit. avec 21 planches, 1825, 6 fr.
- Le texte pur se vend séparément, 4 fr.
- Les Notes se vendent aussi séparément, 4 fr.
- LA GAILLE et MARIE. LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE MATHÉMATIQUES**, 5^e édit., avec des Notes par M. Labey, Professeur de Mathématiques et Examinateur des Candidats pour l'École Polytechnique, in-8., 6 fr. 50 c.
- DEMONFERRAND, Professeur de Mathématiques et de Physique au Collège de Versailles. MANUEL D'ELECTRICITÉ DYNAMIQUE, ou Traité sur l'Action mutuelle des conducteurs électriques et des aimans, et sur la nouvelle Théorie du Magnétisme, pour faire suite à tous les Traités de Physique élémentaire**, in-8., 1823, avec 5 planches, 4 fr.
- HAUY. TRAITE ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE**, adopté par le Conseil royal de l'Instruction publique pour l'enseignement dans les Collèges; troisième édition, considérablement augmentée, 2 vol. in-8., avec 19 pl., 15 fr.
- MONCE. TRAITE ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE**, à l'usage des Ecoles de la Marine; 6^e édition, in-8., revue par M. Hachette, ex-Instituteur à l'École Polytechnique, Professeur de Mathématiques, etc., 1826, 3 fr. 50 c.

OUVRAGES DESTINÉS AUX CANDIDATS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DES ÉCOLES MILITAIRES.

Ouvrages de M. le baron REYNAUD, Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique et de l'École spéciale militaire.

- 1^o. **ARITHMÉTIQUE**, à l'usage des Elèves qui se destinent à l'École Polytechnique et à l'École militaire; 14^e édition, augmentée d'une Table des Logarithmes des nombres entiers, depuis un jusqu'à dix-mille, 1 vol. in-8^e, 1827, 4 fr. 50 c.
- 2^o. **ELEMENS D'ALGÈBRE**, à l'usage des Elèves qui se destinent à l'École royale Polytechnique et à l'École spéciale militaire, 1 vol. in-8., 7^e édit., 1828, 5 fr.
- 3^o. **ALGÈBRE**, anc. édit., 2^e section, 1 vol. in-8., 1810, 5 fr.
- 4^o. **TRIGONOMETRIE RECTILIGNE ET SPHERIQUE**; 3^e édition, suivie des TABLES DES LOGARITHMES des nombres et des lignes trigonométriques de LALANDE, in-18, avec figures, 1818, 3 fr.

Les Tables de Logarithmes de LALANDE seules, sans la Trigonométrie, se vendent séparément. 2 fr.

50. TRAITE D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMETRIE, à l'usage des Elèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique, etc.; 1 vol. in-8, avec 10 planches, 1819. 6 fr.

60. COURS ELEMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE, suivi de quelques notions d'Astronomie, à l'usage des élèves qui se destinent à subir les examens pour le Baccalauréat-ès-lettres, un vol. in-8° avec 14 planches. 6 fr.

Ce Cours est entièrement conforme au programme qui a été publié par ordre de l'Université, dans le Manuel pour le Baccalauréat-ès-lettres.

70. REYNAUD ET DUHAMEL, Problèmes et Développement sur diverses parties de Mathématiques, in-8., 1823, avec 11 planches. 6 fr.

80. ARITHMÉTIQUE, à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, in-8., 5 fr.

90. MANUEL de l'Ingénieur du Cadastre; par MM. Pommies et Reynaud, in-4., 12 fr.

100. TRAITE DE TRIGONOMETRIE de Lagrange, avec les Notes de Reynaud, in-8., 7 fr.

Notes sur Benoit, par M. le baron Reynaud.

110. NOTES SUR L'ARITHMETIQUE, 13^e édit. in-8., 1826, 2 fr. 50 c.

120. — SUR LA GÉOMÉTRIE, in-8., 3^e édit., 1825, 4 fr.

130. — SUR L'ALGÈBRE et Application de l'Algèbre à la Géométrie, in-8., 1822, 4 fr.

Ouvrages de M. GARNIER, ex-Professeur à l'Ecole Polytechnique, Docteur de la Faculté des Sciences de l'Université, Professeur de Mathématiques à l'Ecole royale militaire.

TRAITE D'ARITHMETIQUE, 2^e édit., in-8., 1808, 2 fr. 50 c.

— ELEMENS D'ALGÈBRE, à l'usage des Aspirans à l'Ecole Polytechnique; 3^e édit., in-8., 1811, revue, corrigée et augmentée, 5 fr.

— Suite de ces Elémens, 2^e partie, ANALYSE ALGÈBRE, nouv. édit., considérablement augmentée, in-8., 1814, 7 fr.

— GEOMETRIE ANALYTIQUE, ou Application de l'Algèbre à la Géométrie; seconde édition, revue et augmentée, 1 vol. in-8., avec 14 planches, 1813, 6 fr.

— LES RECIPROQUES de la Géométrie, suivis d'un Recueil de Problèmes et de Théorèmes, et de la construction des Tables trigonométriques, in-8., 2^e éd., considérablement augmentée, 1810.

— ELEMENS DE GEOMETRIE, contenant les deux Trigonométries, les Elémens de la Polygonométrie et du levé des Plans, et l'Introduction à la Géométrie descriptive; 1 vol. in-8., avec planches, 1812, 5 fr.

— LEÇONS DE STATIQUE, à l'usage des Aspirans à l'Ecole Polytechnique; 1 vol. in-8., avec 12 planches, 1811, 5 fr.

— LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, 2 vol. in-8., avec 4 planches, 1811 et 1812, 14 fr.

— TRISECTION DE L'ANGLE, suivie de Recherches analytiques sur le même sujet, in-8., 1809, 2 fr. 50 c.

— DISCUSSION DES RACINES des Équations déterminées du premier degré à plusieurs inconnues, et élimination entre deux équations de degrés quelconques à deux inconnues; 2^e édit., 1 vol. in-8., 1 fr. 80 c.

FRANCCEUR, Professeur de la Faculté des Sciences de Paris, ex-Examinateur des Candidats de l'Ecole Polytechnique, etc. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES PURES, dédié à S. M. Alexandre 1^{er}, Empereur de Russie; Ouvrage destiné aux Elèves des Ecoles Normale et Polytechnique, et aux Candidats qui se préparent à y être admis, etc.; troisième édition, revue et augmentée, 2 vol. in-8., avec figures, 1827, 15 fr.

— URANOGRAPHIE ou TRAITE ELEMENTAIRE D'ASTRONOMIE, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, accompagné de planisphères, etc.; 3^e édit., considérab. augm., 1 vol. in-8., avec pl., 1821, 9 fr.

— TRAITE DE MECANIQUE ELEMENTAIRE, 5^e édit. 1825, 7 fr. 50 c.

SUZANNE, Docteur-ès-Sciences, Professeur de Mathématiques au Lycée Char-

- lemagne, à Paris. **DE LA MANIÈRE D'Étudier LES MATHÉMATIQUES**; Ouvrage destiné à servir de guide aux jeunes gens, à ceux surtout qui veulent approfondir cette Science, ou qui aspirent à être admis à l'Ecole Normale ou à l'Ecole Polytechnique; 3 gros vol. in-8.; avec figures.
Chaque partie se vend séparément, savoir :
- Première partie, **PRÉCEPTES GÉNÉRAUX et ARITHMÉTIQUE**; 2^e conde édit., considérablement augmentée, in-8., 6 fr.
 - Seconde partie, **ALGÈBRE**, épuisée.
 - Troisième partie, **GÉOMÉTRIE**, in-8., 6 fr. 50 c.
- BOUCHARLAT**, Professeur de Mathématiques transcendentes aux Écoles militaires, Docteur ès-Sciences, etc. **ELEMENS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL et de Calcul intégral**; 3^e édit., revue et augmentée, in-8., avec pl., 1826, 6 fr.
- **THÉORIE DES COURBES et des Surfaces du second ordre**, précédée des principes fondamentaux de la Géométrie analytique; 2^e éd., angl., in-8., 6 fr.
- **ELEMENS DE MÉCANIQUE**, in-8. 2^e édition, revue et considérablement augmentée, avec planches, 1827, 7 fr.
- POISSON**, Membre de l'Institut, Professeur à l'Ecole Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris, et Membre adjoint du Bureau des Longitudes. **TRAITÉ DE MÉCANIQUE**, 2 t. in-8., de plus de 500 pag. chacun, avec 8 pl., 1811, 12 fr.
- Ce Traité de Mécanique, le plus complet qui existe, a été adopté par l'Ecole Polytechnique pour l'instruction des Elèves. Il renferme, en outre, les notions de Statique élémentaire qu'on exige des Candidats qui se destinent pour ladite École.
- POINSON**, Membre de l'Institut. **TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE**, adopté pour l'instruction publique, in-8. 4^e édit., 1825, avec pl., 5 fr.
- DELABRE**, Membre de l'Institut. **ABRÉGÉ D'ASTRONOMIE**, ou Leçons élémentaires d'Astronomie théorique et pratique données au Collège de France, 1 vol. in-8., 1813, 12 fr.
- LAPLACE** (M. le marquis de), Membre de l'Institut. **EXPOSITION DU SYSTÈME DU MONDE**, 5^e édit., 1825, in-4., avec portrait, 15 fr.
- Le même, 2 vol. in-8., 1825.
 - **ESSAI PHILOSOPHIQUE SUR LES PROBABILITÉS**, in-8., 5^e édit., 1825, 4 fr.
- MONGE**, Membre de l'Institut, etc. **GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE**, 5^e édition, augmentée d'une Théorie des Ombrés et de la Perspective, extraite des papiers de l'Auteur; par M. BRISSON, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées; 1 vol. in-4., avec 28 pl., 1827, 12 fr.
- LE FRANÇAIS**. Essai de Géométrie analytique, 2^e édit., revue et angl., 2 fr. 50 c.
- TREUIL** Faisait de Mathématiques, contenant quelques détails sur l'Arithmétique, l'Algèbre, la Géométrie et la Statique, in-8., 1819, 2 fr.
- TRAITÉ DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS NUMÉRIQUES** de tous les degrés, avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des Equations algébriques; par **LAGRANGE**, Membre de l'Institut, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, etc.; 3^e édition, in-4., 1826, 15 fr.
-
- DE STAINVILLE**, Répétiteur à l'Ecole Polytechnique. **MÉLANGES D'ANALYSE ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE**, 1 vol. in-8., avec planches, 1815, 7 fr. 50 c.
- HACHETTE**. **PROGRAMME D'UN COURS DE PHYSIQUE**, ou Précis des Leçons sur le calorique et sur quelques applications des Mathématiques à la Physique, 1 vol. in-8., 1809, 5 fr. 50 c.
- LAGRANGE**, Membre de l'Institut. **LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS**, nouvelle édition, in-8., 6 fr. 50 c.
- EULER**. **ELEMENS D'ALGÈBRE**, nouvelle édition, revue par MM. Lagrange et Garnier, 2 vol. in-8., 1807, 12 fr.
- DURBOURGNET**. **TRAITES ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL**, 2 vol. in-8., 1810 et 1811, 16 fr.

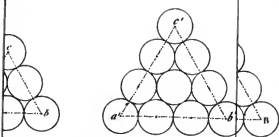


Fig. 2.

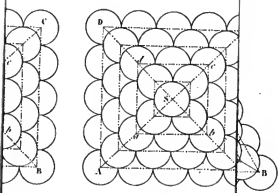


Fig. 4.

